Ejercicio 1.

Los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ forman un ángulo de 60° y, además, $|\vec{u}|=5\ \ y\ \ \vec{u}\cdot\vec{v}=15$

- Calcula $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ y $2\vec{v}\cdot(3\vec{u}-\vec{v})$
- Halla la longitud del vector $\vec{u}-\vec{v}$

Como $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot \cos 60^o \Rightarrow 15=5\cdot|\vec{v}|\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow |\vec{v}|=6$

$$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}=5^2+15=40$$

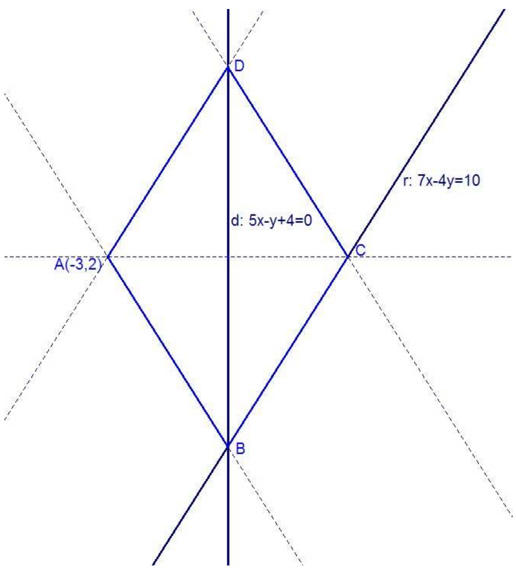
$$2\vec{v}\cdot(3\vec{u}-\vec{v})=6\vec{u}\cdot\vec{v}-2\vec{v}\cdot\vec{v}=6\vec{u}\cdot\vec{v}-2|\vec{v}|^2=6\cdot15-2\cdot6^2=18$$

La longitud de $\vec{u}-\vec{v}$ *es* $|\vec{u}-\vec{v}|$

$$|\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})}=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{|\vec{u}|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2}=\sqrt{25-2\cdot15+36}=\sqrt{31}$$

Ejercicio 2.

De un rombo conocemos el vértice $A(-3,2)$, la ecuación de la recta que contiene a uno de los lados $r_1\equiv 7x-4y=10$ y la ecuación de la recta que contiene a una de las diagonales $d_1\equiv 5x-y+4=0$. Calcula las coordenadas de los demás vértices y el área del rombo.



El punto A no está en las rectas que contienen a la diagonal y al lado, con lo que lo situamos fuera de ellas. Esta es una posible situación.

Así $B=r_1\cap d_1 \Rightarrow \begin{cases}7x-4y=10\\5x-y=-4\end{cases} \Rightarrow B=(-2,-6)$

La otra diagonal d_2 *es perpendicular a* d_1 *y pasa por A*

$$d_2\equiv\begin{cases}A(-3,2)\\\vec{u}=(5,-1)\end{cases} \Rightarrow d_2\equiv\frac{x+3}{5}=\frac{y-2}{-1} \Rightarrow d_2\equiv x+5y=7$$

$$C=r_1\cap d_2 \Rightarrow \begin{cases}7x-4y=10\\x+5y=7\end{cases} \Rightarrow C=(2,1)$$

También podríamos haber cortado las dos diagonales, obteniendo el centro del rombo que sería el punto medio de A, C *y de* B, D*; condición suficiente para sacar ambos vértices.*

Aún así vamos a obtener el punto D como corte de la recta r_2*, que contiene al lado* $\overline{AD}$*, con* d_1*.*

r_2 *es paralela a* r_1 *y pasa por* $A \Rightarrow r_2\equiv\begin{cases}A(-3,2)\\\vec{v}=(4,7)\end{cases} \Rightarrow r_2\equiv\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{7} \Rightarrow r_2\equiv 7x-4y=-29$

$$D = r_2 \cap d_1 \quad \begin{cases} 7x - 4y = -29 \\ 5x - y = -4 \end{cases} \Rightarrow D = (1,9)$$

Ahora la forma más rápida de calcular el área del rombo es: $Área = \dfrac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (5,-1) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{26} \\ \overrightarrow{BD} = (3,15) \Rightarrow |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{234} \end{array} \right\} \Rightarrow Área = \frac{\sqrt{26} \cdot \sqrt{234}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 13} \cdot \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 13}}{2} = 39\ u^2$$

Ejercicio 3.

Sean los vectores $\vec{u}_1 = (2,-1)$ y $\vec{u}_2 = (-1,3)$, cuyas coordenadas están expresadas en la base canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

- Encuentra el ángulo que forman $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$.
- Si el vector $\vec{v}$ tiene coordenadas $\vec{v} = (5,-3)$ en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, calcula las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

$$\vec{u}_1 = (2,-1) \Rightarrow |\vec{u}_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{u}_2 = (-1,3) \Rightarrow |\vec{u}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = |\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2| \cdot \cos\alpha \Rightarrow 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-5}{\sqrt{50}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135^o$$

$$\vec{v} = (5,-3) \text{ en la base } \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \Rightarrow \vec{v} = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$$

$$\vec{v} = (x,y) \text{ en la base } \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \Rightarrow \vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 \;;\; \text{además } \vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \;,\; \vec{u}_2 = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$

$$\text{Entonces } 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 \Rightarrow 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 = x(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2) + y(-\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) \Rightarrow$$

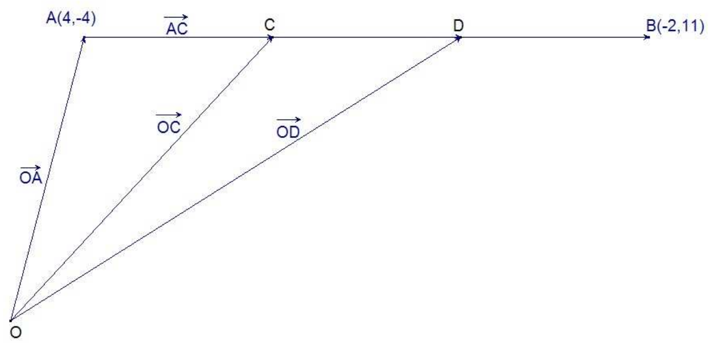
$$\Rightarrow 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 = (2x - y)\vec{e}_1 + (-x + 3y)\vec{e}_2 \Rightarrow \begin{cases} 5 = 2x - y \\ -3 = -x + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{12}{5} \\ y = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{12}{5}\vec{u}_1 - \frac{1}{5}\vec{u}_2$$

$$\vec{v} = \left(\frac{12}{5}, -\frac{1}{5}\right) \text{ en la base } \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

Ejercicio 4.

Sea el segmento de extremos $A(4,-4)$ y $B(-2,11)$. Calcula las ecuaciones de las rectas paralelas a $r \equiv 2x + y - 3 = 0$, que dividen dicho segmento en tres partes iguales.

Debemos calcular los dos puntos que dividen al segmento en tres partes iguales



$\overrightarrow{AB}=(-6,15)$

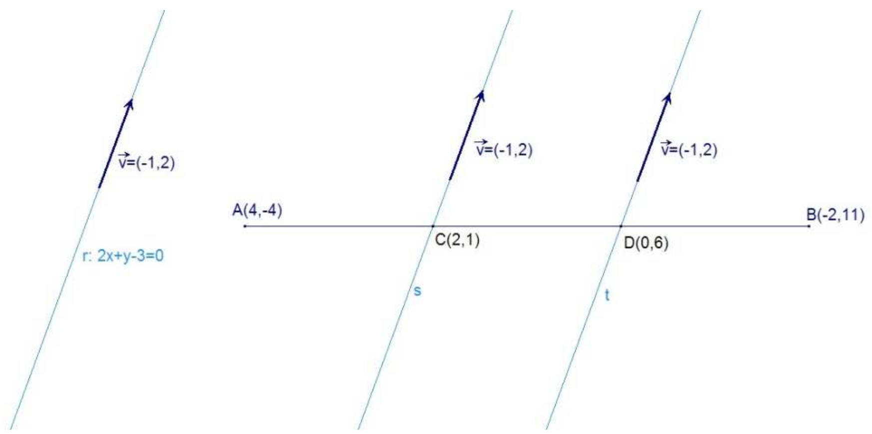
Las coordenadas del punto C son las mismas que las del vector $\overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OC}=(4,-4)+\frac{1}{3}(-6,15) \Rightarrow \overrightarrow{OC}=(2,1) \Rightarrow C=(2,1)$$

Las coordenadas del punto D son las mismas que las del vector $\overrightarrow{OD}$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OD}=(4,-4)+\frac{2}{3}(-6,15) \Rightarrow \overrightarrow{OD}=(0,6) \Rightarrow D=(0,6)$$

Ahora vamos a calcular las dos rectas que nos piden.



La recta s es paralela a r y pasa por el punto C

$$s \equiv \begin{cases} C(2,1) \\ \vec{v}=(-1,2) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2} \Rightarrow s \equiv 2x+y-5=0$$

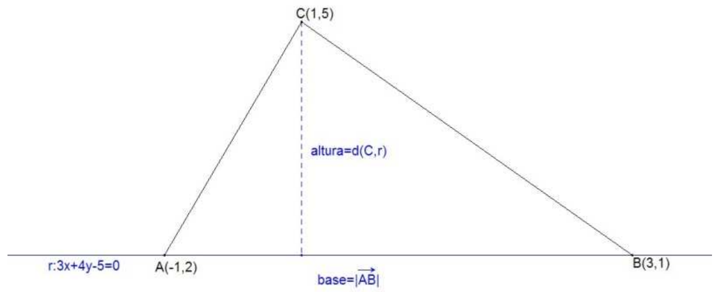
La recta t es paralela a r y pasa por el punto D

$$t \equiv \begin{cases} D(0,6) \\ \vec{v}=(-1,2) \end{cases} \Rightarrow t \equiv \frac{x-0}{-1}=\frac{y-6}{2} \Rightarrow t \equiv 2x+y-6=0$$

Ejercicio 5.

En el triángulo de vértices $A(-1,2)$, $B(3,-1)$ y $C(1,5)$, se pide:

- Calcular el área del triángulo.
- Encontrar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo.

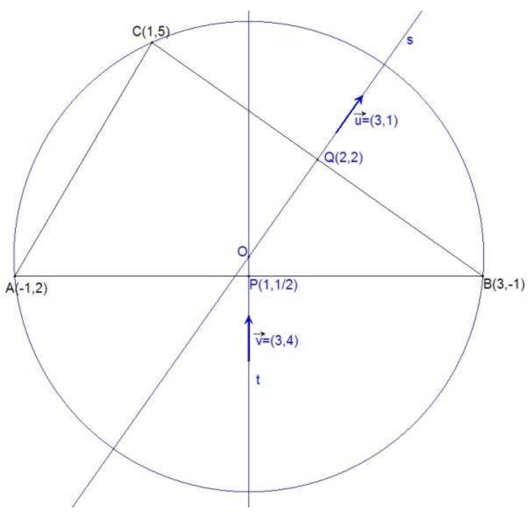


Tomamos como base el lado AB. Este lado está sobre la recta $r \equiv \begin{cases} A(-1,2) \\ \overrightarrow{AB} = (4,-3) \end{cases}$

$$r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-3} \quad \Rightarrow \quad r \equiv 3x + 4y - 5 = 0$$

$$\text{medida de la base} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5 \ ; \ \text{medida de la altura} = d(C,r) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 - 5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{18}{5}$$

$$\text{área del triángulo} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot d(C,r)}{2} = \frac{5 \cdot \frac{18}{5}}{2} = 9 \ u^2$$



Para calcular la circunferencia circunscrita podemos seguir dos caminos:

1^o) *Calcular el centro y el radio.*

El circuncentro O es el corte de las mediatrices

Calculemos dos de ellas:

$$s \equiv \begin{cases} Q(2,2) \ \text{punto medio de } B \text{ y } C \\ \vec{u} = (3,1) \ \text{vector perpendicular a } \overrightarrow{BC} = (-2,6) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{1} \quad \Rightarrow \quad s \equiv x - 3y + 4 = 0$$

$$t \equiv \begin{cases} P\left(1,\frac{1}{2}\right) \ \text{punto medio de } A \text{ y } B \\ \vec{v} = (3,4) \ \text{vector perpendicular a } \overrightarrow{AB} = (4,-3) \end{cases} \Rightarrow \ t \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-\frac{1}{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad t \equiv 8x - 6y - 5 = 0$$

$O = s \cap t : \begin{cases} x - 3y = -4 \\ 8x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow O\left(\frac{13}{6}, \frac{37}{18}\right)$

El radio es la distancia de un vértice al centro, por ejemplo: $R = \left|\overrightarrow{AO}\right|$; $\overrightarrow{AO} = \left(\frac{19}{6}, \frac{1}{18}\right)$

$$R = \left|\overrightarrow{AO}\right| = \sqrt{\left(\frac{19}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{18}\right)^2} = \sqrt{\frac{3250}{324}}$$

Ecuación de la circunferencia $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$$\left(x - \frac{13}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{37}{18}\right)^2 = \frac{3250}{324} \Rightarrow x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{169}{36} + y^2 - \frac{37}{9}y + \frac{1369}{324} = \frac{3250}{324} \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{13}{3}x - \frac{37}{9}y = \frac{10}{9}$$

Por tanto la circunferencia es $\boxed{9x^2 + 9y^2 - 39x - 37y - 10 = 0}$

2º) *En este caso, como conocemos tres puntos por los que pasa la circunferencia, podemos determinarla directamente, ya que son tres condiciones.*

La ecuación de una circunferencia tiene la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

como $A(-1,2)$ *está en la circunferencia* $\Rightarrow (-1)^2 + 2^2 + D\cdot(-1) + E\cdot 2 + F = 0$

$B(3,-1)$ *también* $\Rightarrow 9 + 1 + 3D - E + F = 0$

igual para $C(1,5) \Rightarrow 1 + 25 + D + 5E + F = 0$

obtenemos el sistema $\begin{cases} D - 2E - F = 5 \\ 3D - E + F = -10 \\ D + 5E + F = -26 \end{cases} \Rightarrow \left\{ D = -\frac{13}{3} \; ; \; E = -\frac{37}{9} \; ; \; F = -\frac{10}{9} \right.$

y la ecuación es $x^2 + y^2 - \frac{13}{3}x - \frac{37}{9}y - \frac{10}{9} = 0 \Rightarrow \boxed{9x^2 + 9y^2 - 39x - 37y - 10 = 0}$