Unidad 2 – Polinomios y fracciones algebraicas

PÁGINA 35

cuestiones iniciales

1. Calcula el cociente y el resto en cada una de las siguientes divisiones:

a) $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x + 1)$ b) $(x^4 - x) : (x - 2)$

2. Calcula el valor de a para que el polinomio $A(x) = x^3 + ax^2 - 7x - 2$ dé como resto 5 al dividirlo por $x + 3$.

3. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $A(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ b) $B(x) = x^4 - 16$

4. Efectúa la siguiente operación y expresa el resultado en forma de fracción irreducible:

$$\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$$

SOLUCIONES

1. Diremos que:

   a) Resto 0; Cociente $x^2 - 4x + 4$

   b) Resto 14; Cociente $x^3 + 2x^2 + 4x + 7$

2. Utilizando el teorema del resto:

   $$\text{Resto} = A(-3) \Rightarrow 5 = (-3)^3 + a(-3)^2 - 7(-3) - 2 \Rightarrow a = \frac{13}{9}$$

3. La descomposición queda:

   a) $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3)$

   b) $x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$

4. Operando obtenemos:

   $$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x(x-1)}{x^2+1} = \frac{x}{x+1}$$

ACTIVIDADES

- Practica lo dicho anteriormente con los siguientes problemas:

1. **Relaciones familiares.** Por ahí vienen nuestros padres, padres de nuestros hijos, maridos de nuestras madres y nuestros propios maridos. ¿Es esto cierto?
2. **Animado baile.** Cuarenta y dos personas toman parte en un baile. Durante la velada, una primera dama bailó con siete caballeros; una segunda, con ocho; una tercera, con nueve; y así sucesivamente hasta la última, que bailó con todos los caballeros. ¿Cuántas damas había en aquel baile?
3. **La perra *Cati*.** Luis va todos los días desde su casa a la sierra más cercana, que dista 1,5 km. Va acompañado de su perra mastina *Cati,* que va corriendo a la sierra. Cuando la perra llega a la sierra, vuelve con Luis y así sucesivamente, hasta que Luis llega a la sierra. Luis camina a 6 km/h y *Cati* va a 16 km/h. ¿Cuántos km recorre *Cati*?
4. **La edad de Astérix.** ¿Qué edad tenía Astérix en el año 2000, sabiendo que esa edad es igual a la suma de las tres últimas cifras de su año de nacimiento?

SOLUCIONES

1. Sí puede ser cierto; se trata de dos padres que se han casado cada uno con la hija del otro.

2. Diremos que:

$a_1 = 7$

$a_2 = 8$

.

$a_n = 7 + (n-1)\cdot 1 = n + 6$

Además sabemos que $a_n + n = 42 \Rightarrow n = 18$ damas.

$a_n = 42 - 18 = 24$ caballeros.

Había 18 damas y 24 caballeros.

3. Luis tarda 15 minutos en llegar a la sierra.
La perra, por lo tanto, ha estado moviéndose durante 15 minutos. Por tanto ha recorrido:

$$16 \, {}^{\text{km}}\!/_{\text{h}} : 4 = 4 \text{ kilómetros.}$$

4. Diremos que:

$2000 - 19xy = 9 + x + y$

$2000 - (1000 + 900 + 10x + y) = 9 + x + y$

$\Rightarrow 11x + 2y = 91 \Rightarrow x = 7 \quad y = 7$

Es decir, Astérix nació en el año 1 977 y en el año 2 000 tendrá 23 años.

PÁGINA 52

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Encuentra el polinomio $A(x)$ que satisfaga la igualdad $(x^2 - 3) \cdot A(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$ de tres formas diferentes:
   a) Utilizando la definición de identidad de polinomios
   b) Utilizando el principio de identidad de polinomios
   c) Usando la división de polinomios

2. Calcula a, b y c en las siguientes situaciones:
   a) Si $ax^2 + 6x + b$ es el cuadrado del binomio $2x + c$
   b) Si se cumple $(x - 2) \cdot (ax^2 + bx + c) = 2x^3 - 9x^2 + 14x - 8$

3. Dados los polinomios $P(x) = (3x - 2)^2$, $Q(x) = (4x - 1) \cdot (4x + 1)$ y $R(x) = 4x(x + 1) - (2x + 3)^2$, calcula los siguientes valores numéricos:

$$P(2);\quad Q(\sqrt{2});\quad R(-1);\quad P\left(\frac{1}{3}\right);\quad Q\left(-\frac{1}{2}\right);\quad R(0)$$

4. Determina a y b de modo que sea cierta la siguiente igualdad:

$$(x^2 - 2x + 3) \cdot (ax + b) + 5 = x^3 - 4x^2 + 7x - 1$$

5. Descompón en factores los siguientes polinomios:
   a) $A(x) = x^4 - 25x^2 + 144$
   b) $B(x) = x^3 + 2x^2 + x$
   c) $C(x) = x^3 - x^2 - x + 1$
   d) $D(x) = 8x^3 + 2x^2 - 13x + 3$
   e) $E(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

6. Calcula el MCD y el mcm de los siguentes polinomios:
   a) $A(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$; $B(x) = x^2 + x - 6$
   b) $C(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$; $D(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
   c) $E(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 4$; $F(x) = -2x^2 - x + 10$

↑ *El jardín meridional*, de Paul Klee.

7. Resuelve las siguientes cuestiones:
   a) Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x) = 2x^3 - kx^2 + x + 6$ sea múltiplo de $x - \frac{1}{2}$.
   b) Calcula a y b para que el polinomio $A(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$.
   c) Calcula el valor de m para que el resto de la división $(x^5 - 4x^3 - mx) : (x + \sqrt{3})$ sea $5\sqrt{3}$.
   d) Calcula el resto de dividir el polinomio $C(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$ por el binomio $x + \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   e) Calcula a, b y c en el polinomio $B(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ para que sea divisible por $x - 2$, por $x + 1$ y dé resto 4 al dividirlo entre x.

SOLUCIONES

1. Quedan del siguiente modo:

- Mediante identidad de polinomios:

$(x^2-3)(ax+b)=x^3+2x^2-3x-6$

$ax^3+bx^2-3ax-3b = x^3+2x^2-3x-6$

Identificando coeficientes obtenemos:

$a=1,\ b=2 \ \Rightarrow$ el polinomio $\mathrm{A}(x)=x+2$

- Mediante división:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{x^3+2x^2-3x-6}{x^2-3}=x+2$$

2. El cálculo queda:

a) $ax^2+6x+b=(2x+c)^2$

$$ax^2+6x+b=4x^2+4cx+c^2 \ \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=9/4 \\ c=3/2 \end{cases}$$

b) $(x-2)(ax^2+bx+c)=2x^3-9x^2+14x-8$

$$ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c=2x^3-9x^2+14x-8 \ \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b-2a=-9 \\ c-2b=14 \\ -2c=-8 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow a=2 \\ \Rightarrow b=-5 \\ \Rightarrow c=4 \end{matrix}$$

3. Quedarían:

$\mathrm{P}(2)=(3\cdot 2-2)^2=16$

$\mathrm{Q}(\sqrt{2})=(4\sqrt{2}-1)(4\sqrt{2}+1)=31$

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\right)=\left(3\cdot\frac{1}{3}-2\right)^2=1$

$\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{-4}{2}-1\right)\left(\frac{-4}{2}+1\right)=3$

$\mathrm{R}(0)=-9$

4. Operando y utilizando la identidad de polinomios:

$a = 1 \qquad b = -2$

5. Las descomposiciones pedidas son:

a) $A(x) = (x-3)(x+3)(x-4)(x+4)$

b) $B(x) = x(x+1)^2$

c) $C(x) = (x-1)^2 (x+1)$

d) $D(x) = 8(x-1)\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

e) $E(x) = (x+1)^2 (x+1)(x-3)$

6. En cada uno de los casos descomponemos los polinomios en factores y calculamos el MCD y el mcm.

a) $$\left.\begin{array}{l} A(x) = x\,(x-3)\,(x-2) \\ B(x) = (x+3)\,(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} MCD\,[A(x), B(x)] = (x-2) \\ mcm\,[A(x), B(x)] = x\,(x-3)\,(x-2)\,(x+3) \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} C(x) = (x-3)\,(x^2 - x + 2) \\ D(x) = (x-2)^2\,(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} MCD\,[C(x), D(x)] = 1 \\ mcm\,[C(x), D(x)] = C(x) \cdot D(x) \end{array}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} E(x) = 2\,(x^2 + x + 1)\,(x-2) \\ F(x) = -2\,(x-2)\left(x + \frac{5}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} MCD\,[E(x), F(x)] = 2\,(x-2) \\ mcm\,[E(x), F(x)] = -2\,(x-2)\,(x^2 + x + 1)\left(x + \frac{5}{2}\right) \end{array}$$

7. Quedaría:

a) El resto de dividir P(x) por $x-\frac{1}{2}$ debe ser cero.

$$Resto = P\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - K\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 6 = 0 \Rightarrow K = 27$$

b) Ha de ser divisible por $(x-2)$ y por $(x+2)$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} A(2)=0 \\ A(-2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8+24+2a+b=0 \\ -8+24-2a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=-4 \\ b=-24 \end{array}$$

c) Queda:

$$Resto = \left(-\sqrt{3}\right)^5 - 4\left(-\sqrt{3}\right)^3 - m\left(-\sqrt{3}\right) = 5\sqrt{3} \Rightarrow m = 2$$

d) Queda:

$$Resto = C\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} = 2$$

e) Queda:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para que sea divisible por } (x-2) \Rightarrow B(2)=0 \\ \text{Para que sea divisible por } (x+1) \Rightarrow B(-1)=0 \\ \text{Para que dé resto 4 al dividir por } x \Rightarrow B(0)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8+4a+2b+c=0 \\ -1+a-b+c=0 \\ c=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=-3 \\ b=0 \\ c=4 \end{array}$$

PÁGINA 53

8. Obtén la fracción irreducible en cada una de las siguientes:

a) $\dfrac{5x^2-15x}{10x^3+15x^2}$

b) $\dfrac{2x-4}{x^2-4x+4}$

c) $\dfrac{6-x-x^2}{x^2+2x-8}$

d) $\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-6x^2+2x+12}$

9. Efectúa las siguientes operaciones y presenta el resultado en forma de fracción irreducible:

a) $\dfrac{5x}{x+3}+\dfrac{3}{x-2}$

b) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}-\dfrac{2}{x+2}$

c) $\dfrac{7x}{x-3}-\dfrac{5}{x+3}+\dfrac{6x}{x^2-9}$

d) $\dfrac{2x-6}{x^2-1}\cdot\dfrac{5x+5}{4x-12}$

e) $\dfrac{x-1}{2x+6}:\dfrac{x^2-1}{-3x-9}$

f) $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+5x+6}\cdot\dfrac{2x^2-8}{x^2-x}:\dfrac{2x-10}{x^2+3x}$

g) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right):\dfrac{x-1}{x}$

h) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right):\left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)$

i) $\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)\cdot\dfrac{x^3+9x}{x-3}$

j) $\dfrac{x+1}{2x}\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

10. Descompón en suma de fracciones simples cada una de las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{5x+2}{3x^2+x}$

b) $\dfrac{2x+10}{x^3-2x^2+3x-6}$

c) $\dfrac{2x-1}{x^2+2x-8}$

d) $\dfrac{4x^2+5}{x^3-x^2+2x-2}$

e) $\dfrac{2x^2-10x+20}{x^3-2x^2-4x+8}$

f) $\dfrac{2x^3+x^2-2x-2}{x^2+x}$

g) $\dfrac{-2x^2+2x-4}{x^3-4x}$

h) $\dfrac{x^2+2}{x+1}$

i) $\dfrac{2-x-x^2}{x^2-2x+1}$

11. Halla A y B para que sean ciertas cada una de las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{3x^2-12x-6}{(x-2)(x+1)^2}=\dfrac{-2}{x-2}+\dfrac{Ax+B}{(x+1)^2}$

b) $\dfrac{3x^2-12x-6}{(x-2)(x+1)^2}=\dfrac{-2}{x-2}+\dfrac{A}{(x+1)^2}+\dfrac{B}{x+1}$

12. Encuentra el polinomio de segundo grado $P(x)$ que cumple:

- $P(0)=-5$
- Tiene como raíz $x=-1$
- Da resto 9 al dividirlo por $x+2$

8. Queda en cada caso:

a) $\dfrac{5x^2-15x}{10x^3+15x^2}=\dfrac{5x\,(x-3)}{5x^2\,(2x+3)}=\dfrac{x-3}{2x^2+3x}$

b) $\dfrac{2x-4}{x^2-4x+4}=\dfrac{2\,(x-2)}{(x-2)^2}=\dfrac{2}{x-2}$

c) $\dfrac{6-x-x^2}{x^2+2x-8}=\dfrac{(x-2)\,(x+3)\,(-1)}{(x-2)\,(x+4)}=\dfrac{-x-3}{x+4}$

d) $\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-6x^2+2x+12}=\dfrac{(x-2)^2\,(x+3)}{(x-2)\,(x^2-4x-6)}=\dfrac{(x-2)\,(x+3)}{x^2-4x-6}=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x-6}$

9. Queda en cada caso:

a) $\dfrac{5x}{x+3}+\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{5x^2-7x+9}{(x+3)\,(x-2)}$

b) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{3}{x^2-4}$

c) $\dfrac{7x}{x-3}-\dfrac{5}{x+3}+\dfrac{6x}{x^2-9}=\dfrac{7x^2+22x+15}{x^2-9}$

d) $\dfrac{2x-6}{x^2-1}\cdot\dfrac{5x+5}{4x-12}=\dfrac{2\,(x-3)\cdot 5\cdot(x+1)}{(x-1)\,(x+1)\cdot 4\cdot(x-3)}=\dfrac{5}{2x-2}$

e) $\dfrac{x-1}{2x+6}:\dfrac{x^2-1}{-3x-9}=\dfrac{(x-1)\cdot(-3)\cdot(x+3)}{2\,(x+3)\,(x-1)\,(x+1)}=\dfrac{-3}{2x+2}$

f) $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+5x+6}\cdot\dfrac{2x^2-8}{x^2-x}:\dfrac{2x-10}{x^2+3x}=\dfrac{(x-1)\,(x-5)\cdot 2\cdot(x-2)\,(x+2)\cdot x\cdot(x+3)}{(x+2)\,(x+3)\cdot x\cdot(x-1)\cdot 2\cdot(x-5)}=x-2$

g) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right):\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}:\dfrac{x-1}{x}=x+1$

h) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right):\left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{x^2}{x-1}:\dfrac{x^2-2x}{x-1}=\dfrac{x^2(x-1)}{(x-1)\cdot x\cdot(x-2)}=\dfrac{x}{x-2}$

i) $\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)\cdot\dfrac{x^3+9x}{x-3}=\dfrac{x^2-9}{3x}\cdot\dfrac{x^3+9x}{x-3}=\dfrac{(x-3)\,(x+3)\cdot x\cdot(x^2+9)}{3\cdot x\cdot(x-3)}=$

$=\dfrac{(x+3)\,(x^2+9)}{3}=\dfrac{x^3+3x^2+9x+27}{3}$

j) $\dfrac{x+1}{2x}\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{x+1}{2x}\cdot\dfrac{-2}{(x+1)\,(x-1)}=\dfrac{-2\cdot(x+1)}{2\cdot x\cdot(x+1)\,(x-1)}=\dfrac{-1}{x^2-x}$

10. La descomposición en cada caso queda:

a) $\dfrac{5x+2}{3x^2+x}=\dfrac{5x+2}{x\,(3x+1)}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{3x+1}$

b) $\dfrac{2x+10}{x^3-2x^2+3x-6}=\dfrac{2x+10}{(x-2)\,(x^2+3)}=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{-2x-2}{x^2+3}$

c) $\dfrac{2x-1}{x^2+2x-8}=\dfrac{2x-1}{(x-2)\,(x+4)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{x-2}+\dfrac{\frac{3}{2}}{x+4}$

d) $\dfrac{4x^2+5}{x^3-x^2+2x-2}=\dfrac{4x^2+5}{(x-1)\,(x^2+2)}=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{x+1}{x^2+2}$

e) $\dfrac{2x^2-10x+20}{x^3-2x^2-4x+8}=\dfrac{2x^2-10x+20}{(x+2)\,(x-2)^2}=\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{2}{(x-2)^2}+\dfrac{-1}{x-2}$

f) $\dfrac{2x^3+x^2-2x-2}{x^2+x}=\dfrac{(2x-1)\,(x^2+x)-x-2}{x^2+x}=(2x-1)+\dfrac{-x-2}{x\,(x+1)}=2x-1+\dfrac{-2}{x}+\dfrac{1}{x+1}$

g) $\dfrac{-2x^2+2x-4}{x^3-4x}=\dfrac{-2x^2+2x-4}{x\,(x-2)\,(x+2)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{-1}{x-2}+\dfrac{-2}{x+2}$

h) $\dfrac{x^2+2}{x+1}=\dfrac{(x+1)\,(x-1)+3}{x+1}=x-1+\dfrac{3}{x+1}$

i) $\dfrac{2-x-x^2}{x^2-2x+1}=\dfrac{-(x+2)\,(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-x-2}{x-1}=-1-\dfrac{3}{x-1}$

11. Los valores en cada caso son:

a) $\dfrac{-2}{x-2}+\dfrac{Ax+B}{(x+1)^2}=\dfrac{-2\,(x+1)^2+(Ax+B)\,(x-2)}{(x-2)\,(x+1)^2}$

$\Rightarrow\ -2\,(x+1)^2+(Ax+B)\,(x-2)=3x^2-12x-6$

Por el principio de identidad de polinomios obtenemos: $\text{A}=5$ y $\text{B}=2$

b) $\dfrac{-2}{x-2}+\dfrac{A}{(x+1)^2}+\dfrac{B}{x+1}=\dfrac{-2\,(x+1)^2+A\,(x-2)+B\,(x-2)\,(x+1)}{(x-2)\,(x+1)^2}$

$\Rightarrow\ -2\,(x+1)^2+A\,(x-2)+B\,(x-2)\,(x+1)=3x^2-12x-6$

Por el principio de identidad de polinomios obtenemos: $\text{A}=-3$ y $\text{B}=5$

12. Queda:

El polinomio es: $\text{P}(x)=ax^2+bx+c$

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} P(0)=-5\ \Rightarrow\ c=-5 \\ P(-1)=0\ \Rightarrow\ a-b+c=0 \\ P(-2)=9\ \Rightarrow\ 4a-2b+c=9 \end{array}\right\}\Rightarrow\ \begin{array}{l} a=2 \\ b=-3 \\ c=-5 \end{array}$$

El polinomio buscado es: $2x^2-3x-5$.

PÁGINA 54

ACTIVIDADES FINALES

■ 13. Calcula las siguientes potencias simplificando los resultados:

a) $(3+x)^5$ c) $(4-x)^7$ e) $\left(3\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)^5$ g) $\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x\right)^4$

b) $(1+2x)^6$ d) $(-2+\sqrt{2})^4$ f) $(-3+2x^2)^5$ h) $\left(\frac{1}{3}+3x\right)^5$

■ 14. En el desarrollo del binomio $\left(3x-\frac{1}{x}\right)^7$, escribe:

a) El quinto término b) El coeficiente del sexto c) El exponente del cuarto

■ 15. Calcula $(x+3)^4+(x-3)^4$.

■ 16. Efectúa las siguientes operaciones ofreciendo el resultado como fracción irreducible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{x}{1-x^2}}{\dfrac{x-2x^2}{1-x}}$ b) $\dfrac{\dfrac{1+2x}{x-2}-2}{1+\dfrac{2+4x}{x-2}}$

■ 17. Encuentra un polinomio de grado 4 en cada uno de los siguientes casos:

a) Coeficiente principal -1; raíz doble 1; raíces simples 0 y -1

b) Coeficiente principal 2; raíz simple -2; raíz triple -1

c) Raíces simples 1, 2, 3 y 4

■ 18. Halla A, B y C de modo que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\frac{5x^2-x+12}{x^3+4x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$

■ 19. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla el término sexto del desarrollo de $(1+x)^{10}$.

b) Halla el término central del desarrollo de $(3-4x)^{12}$.

c) Halla el lugar que ocupa el término en el que x tiene exponente 18 del desarrollo $(x^2+\sqrt{x})^{12}$.

■ 20. Calcula el valor del término independiente en el desarrollo del binomio $\left(\frac{1}{x}-2x\right)^6$.

■ 21. Opera y simplifica:

a) $\dfrac{\dfrac{x-a}{x+a}-\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}}{\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^2-1}$ b) $\dfrac{\left(1-\dfrac{m}{m+1}\right)^2}{1+\dfrac{m}{m+1}}\cdot\dfrac{\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{m^2}}{1-\dfrac{1}{m}}$

13. Utilizando el binomio de Newton y operando obtenemos:

a) $(3+x)^5 = 243 + 405x + 270x^2 + 90x^3 + 15x^4 + x^5$

b) $(1+2x)^6 = 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6$

c) $(4-x)^7 = 16384 - 28672x + 21504x^2 - 8960x^3 + 2240x^4 - 336x^5 + 28x^6 - x^7$

d) $\left(-2+\sqrt{2}\right)^4 = 68 - 48\sqrt{2}$

e) $\left(3\sqrt{3} - \dfrac{1}{3}\right)^5 = \dfrac{61484\sqrt{3}}{27} - \dfrac{297676}{243}$

f) $\left(-3+2x^2\right)^5 = 32x^{10} - 240x^8 + 720x^6 - 1080x^4 + 810x^2 - 243$

g) $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}x\right)^4 = \dfrac{1}{16} - \dfrac{3}{8}x + \dfrac{27}{32}x^2 - \dfrac{27}{32}x^3 + \dfrac{81}{256}x^4$

h) $\left(\dfrac{1}{3} - 3x\right)^5 = \dfrac{1}{243} + \dfrac{5}{27}x + \dfrac{10}{3}x^2 - 30x^3 + 135x^4 + 243x^5$

14. En cada uno de los casos quedaría:

a) $T_{5^o} = \binom{7}{4} \cdot (3x)^3 \cdot \left(-\dfrac{1}{x}\right)^4 = \dfrac{945}{x}$

b) $T_{6^o} = \binom{7}{5} \cdot (3x)^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{x}\right)^5 = -\dfrac{189}{x^3} \Rightarrow \text{Coeficiente} = -189$

c) $T_{4^o} = \binom{7}{3} \cdot (3x)^4 \cdot \left(-\dfrac{1}{x}\right)^3 = -2835x \Rightarrow$ Exponente del término en x es 1

15. Desarrollando cada una de las potencias mediante la fórmula del binomio de Newton obtenemos:

$$(x+3)^4 + (x-3)^4 = (x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81) + (x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81) =$$
$$= 2x^4 + 108x^2 + 162$$

16. Ambos resultados quedan:

$$\text{a)}\ \frac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{x}{1-x^2}}{\dfrac{x-2x^2}{1-x}}=\frac{\dfrac{1-2x}{(1-x)\,(1+x)}}{\dfrac{x\,(1-2x)}{1-x}}=\frac{(1-2x)\cdot(1-x)}{x\,(1-x)\,(1+x)\,(1-2x)}=\frac{1}{x\,(x+1)}$$

$$\text{b)}\ \frac{\dfrac{1+2x}{x-2}-2}{1+\dfrac{2+4x}{x-2}}=\frac{\dfrac{5}{x-2}}{\dfrac{5x}{x-2}}=\frac{5\cdot(x-2)}{5x\,(x-2)}=\frac{1}{x}$$

17. Los polinomios pedidos son:

a) $\mathrm{P(x)}=-1\cdot(x-1)^2\,(x-0)(x+1)=-x^4+x^3+x^2-x$

b) $\mathrm{P(x)}=2\cdot(x+1)^3\,(x+2)=2x^4+10x^3+18x^2+14x+4$

c) $\mathrm{P(x)}=a\cdot(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=a\cdot(x^4-10x^3+35x^2-50x+24)$

18. Operamos y aplicamos el principio de identidad de polinomios:

$$\frac{5x^2-x+12}{x^3+4x}=\frac{A\left(x^2+4\right)+(Bx+C)\,x}{x\left(x^2+4\right)}\ \Rightarrow\ 5x^2-x+12=(A+B)\,x^2+Cx+4A\ \Rightarrow\ \begin{cases}A=3\\B=2\\C=-1\end{cases}$$

19. Queda lo siguiente:

a) $\mathrm{T}_{6^\circ}=\binom{10}{5}\cdot(1)^5\cdot(x)^5=252x^2$

b) $\mathrm{T}_{7^\circ}=\binom{12}{6}\cdot(3)^6\cdot(-4x)^6=924\cdot3^6\cdot4^6\cdot x^6=2\,759\,049\,216\,x^6$

c) $\mathrm{T}_{n+1}=\binom{12}{n}\cdot\left(x^2\right)^{12-n}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^n=\binom{12}{n}\cdot x^{24-\frac{3n}{2}}$

Por tanto: $24-\dfrac{3n}{2}=18\ \Rightarrow\ n=4$ es el término quinto.

20. Desarrollamos:

$$T_{n+1}=\binom{6}{n}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{6-n}\cdot(-2x)^{n}=\binom{6}{n}\cdot x^{n-6}\cdot x^{n}\cdot(-2)^{n}=\binom{6}{n}\cdot x^{2n-6}\cdot(-2)^{n}$$

Por tanto, el término independiente cumplirá: $2n-6=0 \Rightarrow n=3$

El valor del término independiente es:

$$T_{4^o}=\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{3}\cdot(-2x)^{3}=-160$$

21. Ambos resultados quedan:

a) $$\frac{\frac{x-a}{x+a}-\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}}{\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2-1}=\frac{\frac{-2ax}{x^2-a^2}}{\frac{-4ax}{(x+a)^2}}=\frac{-2ax\,(x+a)^2}{-4ax\,(x-a)\,(x+a)}=\frac{x+a}{2x-2a}$$

b) $$\frac{\left(1-\frac{m}{m+1}\right)^2}{1+\frac{m}{m+1}}\cdot\frac{\frac{2}{m}+\frac{1}{m^2}}{1-\frac{1}{m}}=\frac{\frac{1}{(m+1)^2}}{\frac{2m+1}{m+1}}\cdot\frac{\frac{2m+1}{m^2}}{\frac{m-1}{m}}=\frac{(2m+1)\cdot(m+1)\cdot m}{(m+1)^2\cdot(2m+1)\cdot m^2\cdot(m-1)}=$$

$$=\frac{1}{m\,(m^2-1)}=\frac{1}{m^3-m}$$