Unidad 1 – Números reales

PÁGINA 9

cuestiones iniciales

1. Encuentra varios números que estén comprendidos entre:

a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ b) 2,1 y 2,2 c) 2,01 y 2,1

2. Describe un procedimiento que calcule $\sqrt[3]{10}$ utilizando solamente las teclas de las operaciones elementales de tu calculadora.

3. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

5,31; –4,21; 5,201; –4,201; 5,2101; –4,2101; 4,211; 4,201

4. Comprueba la siguiente igualdad elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

5. ¿Para qué valores de n y a se cumple $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$?

SOLUCIONES

1. Diremos que:

a) Los números comprendidos entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ son: 0,42; 0,46; 0,54; 0,57.

b) Los números comprendidos entre 2,1 y 2,2 son: 2,11; 2,14; 2,18; 2,195.

c) Los números comprendidos entre 2,01 y 2,1 son: 2,03; 2,045; 2,076; 2,098.

2. Utilizando la tecla del producto podemos conseguir aproximaciones sucesivas del valor. Así:

$$2\times2\times2<\sqrt[3]{10}<3\times3\times3$$
$$2{,}1\times2{,}1\times2{,}1<\sqrt[3]{10}<2{,}2\times2{,}2\times2{,}2$$
$$2{,}15\times2{,}15\times2{,}15<\sqrt[3]{10}<2{,}16\times2{,}16\times2{,}16$$
$$2{,}154\times2{,}154\times2{,}154<\sqrt[3]{10}<2{,}155\times2{,}155\times2{,}155$$
$$2{,}1544\times2{,}1544\times2{,}1544<\sqrt[3]{10}<2{,}1545\times2{,}1545\times2{,}1545$$

3. La ordenación queda: $-4{,}2101<-4{,}21<-4{,}201<4{,}201<4{,}211<5{,}201<5{,}2101<5{,}31$

4. Elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos:

$$\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 4\left(2-\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{12}$$
$$\Rightarrow \quad 8-4\sqrt{3}=8-4\sqrt{3} \qquad \text{Se verifica la igualdad}$$

5. n par y $a \in \mathrm{R}^+$ ó n impar y $a \in \mathrm{R}$

PÁGINA 25

A C T I V I D A D E S

■ Clasifica las siguientes tareas en problemas o ejercicios e intenta resolverlas:

1. **Sumas.** Considera la serie de números pares 2, 4, 6, 8, etc. ¿Cuánto vale la suma de los *m* primeros?
2. **El camello sediento.** El beduino Ali-kan desea transportar 100 bidones llenos de agua desde Kamal hasta Wadi, pueblos separados por 100 km de desierto. Para ello, dispone de un camello capaz de andar descargado indefinidamente, o, de cargar con un solo bidón, siempre y cuando beba una cantidad de agua igual a la que contiene el bidón cada vez que completa 100 km cargado.

   El beduino no dispone de más agua para el camello que la contenida en los bidones. ¿Cuántos de estos 100 bidones podrán llegar a Wadi?

SOLUCIONES

1. $2+4+6+8+...+2m=m(m+1)$

2. Resolvemos en los siguientes pasos:
   - Supongamos que el camello lleva un bidón hasta la mitad del camino, vuelve a Kamal, carga con otro bidón hasta el mismo punto y se bebe uno de los bidones transportados, quedándole otro. Repitiendo el proceso conseguirá llevar 50 bidones hasta la mitad del camino. De aquí repitiendo lo mismo hasta Wadi conseguirá que lleguen 25 bidones según la expresión:

$$50 \text{ bidones} = 100 \times \frac{1^2}{2^2}$$

   - Si mejoramos la solución conseguiremos que lleguen más bidones, haciendo el camino en tres fases tras el 1.^{er} tercio, el camello habrá bebido 33,333… bidones y quedan 66,666… En el 2.^{do} tercio se bebe 22,222… y quedan 44,444… En Wadi se bebe 14,81… y quedan 29,629… bidones, es decir:

$$100 \times \frac{8}{27} = 100 \times \frac{2^3}{3^3}$$

   - Avanzando por cuartos de camino se puede mejorar la solución, llegan:

$$31{,}640 \cong 100 \times \frac{81}{256} = 100 \times \frac{3^4}{4^4} = 100 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

   - Siguiendo así sucesivamente se puede decir que en el mejor de los casos llegan:

$$100 \times \left(\frac{99}{100}\right)^{100} \cong 100 \times \frac{1}{e}$$

PÁGINA 28

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla el menor conjunto numérico al que pertenecen los siguientes números:

3	4,23	$\sqrt{13}$	0	$-\frac{3}{7}$	$-\sqrt{64}$	$1,0\widehat{3}$	$-\frac{12}{3}$	$\sqrt[3]{-8}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{-1,3}{0,5}$

2. Razona la verdad o la falsedad de las siguientes afirmaciones:
   a) Algún número decimal es racional
   b) Todo número entero es natural
   c) Ningún número racional es entero
   d) Algún número real es irracional

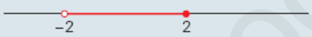
3. Representa en la recta real los siguientes números:

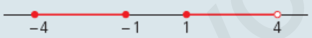
-3^2	$2\sqrt{3}$	$\frac{8}{5}$	$-\sqrt{8}$	$-\frac{4}{3}$	1,6	$0,\widehat{7}$	$\sqrt[3]{125}$	$-\frac{18}{\sqrt{9}}$	$4^{\frac{1}{2}}$

4. Dibuja sobre la recta real los siguientes conjuntos:
   a) Los números reales mayores o iguales que 3
   b) $B = \{b \in \mathbb{R} \mid b < 0 \text{ y } b > -7\}$
   c) $(-\infty, -5]$
   d) $D = \{d \in \mathbb{Z} \mid d > 1 \text{ ó } d > -5\}$
   e) $E(5, 2)$
   f) Los números enteros menores que -2

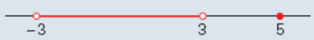
5. Expresa de forma simbólica los siguientes conjuntos; estudia su acotación y la existencia de supremo, ínfimo, máximo y mínimo:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

6. Estudia la acotación de los siguientes conjuntos; determina si existen supremo, ínfimo, máximo y mínimo:
   a) $E(5, 6)$
   b) $(-3, 1) \cap [0, 3]$
   c) $[-3, 0) \cup (-1, 3]$
   d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 3 \text{ y } n < 9\}$
   e) $E^{+}(-5, 1) \cup E^{-}(-5, 1) \cup \{-5\}$
   f) $F = \{f \in \mathbb{R} \mid f < 0 \text{ ó } f < 5\}$
   g) $E^{*}(2, 5) \cap E(5, 4)$
   h) $I = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \text{ y } n \neq 0\right\}$

7. Expresa en forma de intervalo los siguientes conjuntos; estudia su acotación y la existencia de máximo y mínimo:
   a) $E(-2, 4) \cap E(2, 2)$
   b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ y } x \geq -2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

SOLUCIONES

1. Quedan del siguiente modo:

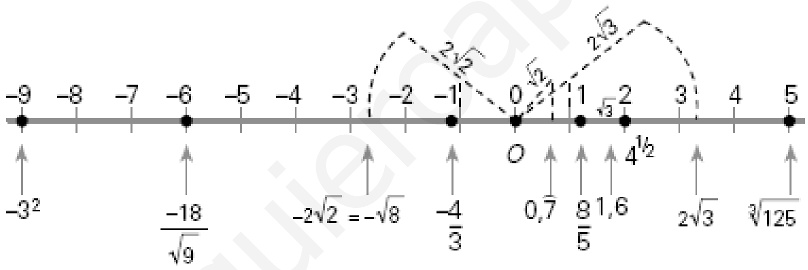
$$3 \in \mathbb{N};\ \ 4,23 \in \mathbb{Q};\ \ \sqrt{13} \in \mathrm{I};\ \ 0 \in \mathbb{N};\ \ -\frac{7}{3} \in \mathbb{Q};$$

$$\sqrt{64} = 8 \in \mathbb{N};\ \ 1,0\hat{3} \in \mathbb{Q};\ \ -\frac{12}{3} = -4 \in \mathbb{Z};$$

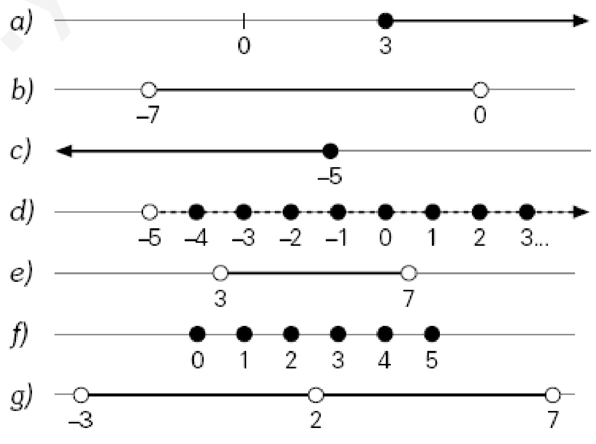
$$\sqrt[3]{-8} = -2 \in \mathbb{Z};\ \ \frac{1}{\pi} \in \mathrm{I};\ \ -\frac{1,3}{0,5} \in \mathbb{Q}$$

2. Las siguientes afirmaciones son:
   a) Verdadero, todos los decimales son relacionales excepto los decimales infinitos y no periódicos.
   b) Falso, sólo son naturales los enteros positivos y el cero.
   c) Falso, $\frac{15}{3}$ es racional y entero.
   d) Verdadero, todos los decimales infinitos no periódicos son reales e irracionales.

3. Quedaría representado del siguiente modo:



4. Las representaciones quedarían:



5. Quedan del siguiente modo:
    a) $(1, +\infty)$. No acotado.
    b) $(-2,2]$. Acotado. $\text{Inf} = -2$. $\text{Máximo} = 2$.
    c) $[-4,-1]$ U $[1,4)$. Acotado. $\text{Mínimo} = -4$. $\text{Sup} = 4$.
    d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \in x \in 3\}$. Acotado. $\text{Mínimo} = -1$. $\text{Máximo} = 3$.
    e) $(-3,3) \cup \{5\}$. Acotado. $\text{Inf} = -3$. $\text{Máximo} = 5$.
    f) $(-\infty,5] \cup [5,+\infty) - \{7\}$. No acotado.

6. Quedan del siguiente modo:
    a) Acotado. $\text{Supremo} = 11$; $\text{Ínfimo} = -1$.
    b) Acotado. $\text{Sup} = 1$; $\text{Inf} = 0 = \text{Mínimo}$.
    c) Acotado. $\text{Sup} = 3$; $\text{Inf} = -3$; $\text{Máximo} = 3$; $\text{Mínimo} = -3$.
    d) Acotado. $\text{Sup} = 8$; $\text{Inf} = 4$; $\text{Máximo} = 8$; $\text{Mínimo} = 4$.
    e) Acotado. $\text{Sup} = -4$; $\text{Inf} = -6$.
    f) No acotado inferiormente, por tanto no está acotado.
    g) Acotado. $\text{Sup} = 7$; $\text{Inf} = 1$.
    h) Acotado. $\text{Sup} = 1$; $\text{Inf} = 0$; $\text{Máximo} = 1$.

7. Quedan del siguiente modo:
    a) $E(-2,4) \cap E(2,2) = (-6,2) \cap (0,4) = (0,2)$. Acotado.
    b) $[-2,+\infty)$. No acotado. Mínimo en el -2.

PÁGINA 29

8. Rellena la tabla siguiente en tu cuaderno:

Valor exacto	Aproximación decimal a milésimas por defecto y cota de error	Aproximación decimal a centésimas por exceso y cota de error	Redondeo a décimas y cota de error	Truncamiento a centésimas y cota de error
2,236067...				
	3,421 0,001			
			0,8 0,05	
				32,42 0,01

9. Dado el número 1 724,157203...
Indica cuáles de las siguientes aproximaciones decimales del número anterior son redondeos. En los casos en que lo sean, anota la cota de error.

1 725	1 724,16	1 724,2	1 724,1	1 720	1 724,158	1 724,1572

10. Calcula, aproximadamente, el error absoluto y relativo que se comete al tomar $\frac{221}{71}$ como valor aproximado de π.

11. Calcula, aproximadamente, el error absoluto y relativo que se comete al redondear el número de oro Φ a centésimas.

12. Expresa en notación científica las siguientes cantidades, y determina el orden de magnitud:

a) Distancia Tierra-Luna: 384 000 km
b) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km
c) Virus de la gripe: 0,000 000 002 2 m
d) Radio del protón: 0,000 000 000 05 m
e) 57 billones
f) 623 cienmilésimas
g) 0,035 millones
h) 12 centésimas

13. Un año-luz es la distancia recorrida por la luz en un año:

$$1 \text{ año-luz} = 9{,}4605 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

Sabiendo que:

$$\text{distancia}_{\text{Tierra-Luna}} = 384\,403 \text{ km} \quad \text{y}$$
$$\text{distancia}_{\text{Tierra-Sol}} = 1{,}5 \cdot 10^{8} \text{ km}$$

Calcula con redondeo a centésimas la distancia de la Tierra a la Luna en segundos-luz, y la distancia Tierra-Sol en minutos-luz.

14. En un supermercado nos presentan la cuenta a cobrar en euros. Los productos que hemos comprado tienen los siguientes precios:

a) 1,325 euros
b) 0,477 euros
c) 25,008 euros
d) 122,553 euros
e) 82,572 euros
f) 7,634 euros

El supermercado redondea a centésimas de euro. ¿Cuántos euros pagaremos si el supermercado primero redondea y luego suma? ¿y si primero suma y luego redondea?

8. La tabla completa se presenta del siguiente modo:

Valor exacto	Aproximación decimal a milésimas por defecto y cota de error	Aproximación decimal a centésimas por exceso y cota de error	Redondeo a décimas y cota de error	Truncamiento a centésimas y cota de error
2,236067…	2,236 Cota 0,001	2,24 Cota 0,01	2,2 Cota 0,05	2,23 Cota 0,01
3,42173…	**3,421** **Cota 0,001**	3,43 Cota 0,01	3,4 Cota 0,05	3,42 Cota 0,01
0,7643…	0,764 Cota 0,001	0,77 Cota 0,01	**0,8** **Cota 0,05**	0,76 Cota 0,01
32,42751…	32,427 Cota 0,001	32,43 Cota 0,01	32,4 Cota 0,05	**32,42** **Cota 0,01**

9. Para cada uno de los números queda:

1 725 no es redondeo.

1 724,16 es un redondeo a centésimas. Cota de error 0,005.

1 724,2 es un redondeo a décimas. Cota de error 0,05.

1 724,1 no es redondeo.

1 724,158 no es redondeo.

1 724,1572 es un redondeo a diezmilésimas. Cota de error 0,00005.

10. Realizamos el siguiente cálculo:

Consideramos como valor real $\pi = 3{,}141592$.

Error absoluto :

$$\left| 3{,}141592 - \frac{221}{71} \right| = 0{,}028916...$$

Error relativo :

$$\frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}} = \frac{0{,}028916}{3{,}141592} = 0{,}0092...$$

11. El número de oro es :

$\Phi = 1{,}61803398...$

Redondeo a centésimas : 1,62

Error absoluto $= 0{,}00197...$

Error relativo $= 0{,}00121506...$

12. La notación científica queda:

a) $3,84 \times 10^{5}$. Orden de magnitud 10^{5}.
b) $1,5 \times 10^{8}$. Orden de magnitud 10^{8}.
c) $2,2 \times 10^{-9}$. Orden de magnitud 10^{-9}.
d) 5×10^{-11}. Orden de magnitud 10^{-10}.
e) $5,7 \times 10^{13}$. Orden de magnitud 10^{14}.
f) $6,23 \times 10^{-3}$. Orden de magnitud 10^{-2}.
g) $3,5 \times 10^{4}$. Orden de magnitud 10^{4}.
h) $1,2 \times 10^{-2}$. Orden de magnitud 10^{-2}.

13. El cálculo queda:

$1 \text{ año - luz} = 9,4605 \times 10^{12} \text{ km} \Rightarrow 1 \text{ segundo} - \text{luz es :}$

$$\frac{9,4605 \times 10^{12}}{365 \times 24 \times 60 \times 60} = 299\,990,4871 \text{ km}$$

Distancia de la Tierra a la Luna es $384\,403$ km, es decir :

$384\,403 : 299\,990,4871 = 1,28138$ segundos – luz

redondeando a las centésimas es $1,28$ segundos – luz.

Distancia de la Tierra al Sol es $1,5 \times 10^{8}$ km, es decir :

$1,5 \times 10^{8} : 17\,999\,429,22 = 8,333596$ minutos – luz

que redondeando a las centésimas es $8,33$ minutos - luz.

14. Quedaría:

Primero redondea y luego suma :

$1,33 + 0,48 + 25,01 + 122,55 + 82,57 + 7,63 = 239,57$ euros.

Primero sumamos y después redondeamos a centésimas :

$1,325 + 0,477 + 25,008 + 122,553 + 82,572 + 7,634 = 239,569$ euros.

que redondeando a la centésima queda : $239,57$ euros.

ACTIVIDADES FINALES

15. Efectúa las siguientes operaciones haciendo uso de la calculadora:

a) $1,57 \cdot 10^{-5} + 4,325 \cdot 10^{-2}$

b) $6,215 \cdot 10^{5} : 3,25 \cdot 10^{-1}$

c) $2,9 \cdot 10^{4} + 3,25 \cdot 10^{-2} - 7,2 \cdot 10^{3}$

d) $2,32 \cdot 10^{6} \cdot 7,2 \cdot 10^{-2}$

e) $9,7 \cdot 10^{7} \cdot (8,3 \cdot 10^{-4} - 5,2 \cdot 10^{-5})$

f) $5 \cdot 10^{7} \cdot 4,5 \cdot 10^{-3} : 1,5 \cdot 10^{2}$

16. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt{25a^2b^4}$

b) $\sqrt[5]{32x^{15}}$

c) $\sqrt[3]{64a^6b^3}$

d) $\sqrt[4]{625z^8}$

e) $\sqrt[4]{81a^8}$

f) $\sqrt[3]{8x^3y^6}$

17. Expresa en forma de potencia las raíces, o en forma de raíz las potencias siguientes:

a) $\sqrt[3]{a}$

b) $2^{\frac{2}{3}}$

c) $\sqrt[4]{a^5}$

d) $5^{\frac{1}{2}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

f) $5^{\frac{-3}{2}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

h) $a^{\frac{-2}{3}}$

18. Pon las siguientes expresiones bajo un único radical:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{8}}$

b) $\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^5$

c) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$

d) $\left(\sqrt{a^3\sqrt{b}}\right)^4$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$

f) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^8}}$

19. Extrae todos los factores posibles de los radicales siguientes:

a) $\sqrt{1\,000}$

b) $\sqrt[3]{a^4b^3}$

c) $\sqrt[3]{8a^5}$

d) $\sqrt[4]{x^8y^5}$

e) $\sqrt{16a^5b^7}$

f) $\sqrt[5]{xy^5z^7}$

g) $\sqrt{4a^2 + 4}$

h) $\sqrt{a^2 - a^2b}$

20. Introduce los factores en el radical:

a) $4\sqrt{2}$

b) $2ab\sqrt[3]{a^2}$

c) $3\sqrt[4]{3^2}$

d) $a^2b^4\sqrt{2ab^3}$

e) $3\sqrt[3]{a}$

f) $4a\sqrt[3]{a^2b}$

21. Calcula, presentando el resultado en forma de raíz y en forma de potencia:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}$

b) $\sqrt{a} \cdot a^2$

c) $\sqrt[5]{2a^4} : \sqrt[5]{2a^3}$

d) $a^{-1} \cdot \sqrt[3]{a}$

e) $\sqrt[6]{3^5} : \sqrt[6]{3^3}$

f) $a : \sqrt{a}$

22. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \frac{4}{5}\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{3} + \frac{1}{4}\sqrt[4]{3} - \frac{3}{2}\sqrt[4]{3}$

c) $\frac{4}{5}\sqrt{8} - \sqrt{50} + \frac{7}{2}\sqrt{18} - \frac{3}{4}\sqrt{98}$

d) $2\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{54} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{250}$

e) $5\sqrt{4x} - 3\sqrt{36x} + \sqrt{25x} - 6\sqrt{x}$

f) $6\sqrt[3]{x^7} + x^2\sqrt[3]{x} - 3x^2\sqrt[3]{27x}$

15. Las soluciones son:

a) $4{,}32657 \times 10^{-2}$
b) $1{,}912307692 \times 10^{6}$
c) 21 735
d) 167 040
e) 75 466
f) 1 500

16. Las soluciones son:

a) $5ab^2$
b) $2x^2$
c) $4a^2b$
d) $5z^2$
e) $3a^2$
f) $2xy^2$

17. Las expresiones quedan:

a) $a^{1/3}$
b) $\sqrt[3]{4}$
c) $a^{5/4}$
d) $\sqrt{5}$
e) $a^{-3/2}$
f) $\dfrac{1}{\sqrt{125}}$
g) $a^{-2/3}$
h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

18. Las expresiones quedan:

a) $\sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$
b) $\sqrt[3]{a^{10}b^5}$
c) $\sqrt[8]{3^7}$
d) $\sqrt[4]{a^{24}b^4} = a^6b$
e) $\sqrt[12]{a}$
f) $\sqrt[12]{a^{11}}$

19. Las expresiones quedan:

a) $10\sqrt{10}$
b) $ab\sqrt[3]{a}$
c) $2a\sqrt[3]{a^2}$
d) $x^2y\sqrt[4]{y}$
e) $4a^2b^3\sqrt{ab}$
f) $yz\sqrt[5]{xz^2}$
g) $2\sqrt{a^2+1}$
h) $a\sqrt{1-b}$

20. Los radicales quedan:

a) $\sqrt{32}$
b) $\sqrt[3]{8a^5b^3}$
c) $\sqrt[4]{3^6}$
d) $\sqrt{2a^5b^{11}}$
e) $\sqrt[3]{27a}$
f) $\sqrt[3]{64a^5b}$

21. La solución queda:

a) $\sqrt[3]{2^3}=2$

b) $\sqrt{a^5}=a^{5/2}$

c) $\sqrt[5]{a}=a^{1/5}$

d) $\sqrt[3]{a^{-2}}=a^{-2/3}$

e) $\sqrt[6]{3^2}=3^{1/3}$

f) $\sqrt{a}=a^{1/2}$

22. La solución queda:

a) $\frac{98}{15}\sqrt{2}$

b) $-\frac{11}{12}\sqrt[4]{3}$

c) $\frac{37}{20}\sqrt{2}$

d) $-10\sqrt[3]{2}$

e) $-9\sqrt{x}$

f) $-2x^2\sqrt[3]{x}$

PÁGINA 31

23. Realiza las siguientes operaciones simplificando lo más posible los resultados:

a) $\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

b) $(2\sqrt{7} + 3)^2 - 4\sqrt{7}(\sqrt{7} + 3)$

c) $(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{2})^2$

d) $(4\sqrt{18} - 2\sqrt{12} + \sqrt{32}) \cdot 2\sqrt{2}$

e) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{3}$

f) $(\sqrt{72} - \sqrt{20} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 2\sqrt{8} + 2\sqrt{5})$

g) $2\sqrt{12} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{20}$

h) $\sqrt{3}(2\sqrt{3} - \sqrt{5}) - \sqrt{5}(2\sqrt{5} - \sqrt{3})$

i) $(3\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 3(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

j) $(\sqrt{75} - \sqrt{27} + 2\sqrt{12}) : 3\sqrt{3}$

k) $(4\sqrt{63} - 5\sqrt{28}) : (\sqrt{343} - \sqrt{175})$

l) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{45} - \frac{3}{2}\sqrt{20}\right) \cdot \frac{2}{3}\sqrt{125}$

24. Reduce a índice común y ordena de menor a mayor las raíces de cada apartado:

a) $\sqrt{2}, \sqrt[5]{5}$

b) $\sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{6}$

c) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[9]{3}, \sqrt{5}$

d) $\sqrt[3]{10}, \sqrt[5]{100}$

e) $\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}$

f) $\sqrt{3^{-1}}, \sqrt[4]{5^{-3}}$

25. Opera:

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{6}$

b) $\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^3} : \sqrt[10]{a}$

c) $\sqrt{2ab} : \sqrt[4]{8a^3b}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[12]{64}}$

e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[8]{243}$

f) $\sqrt[8]{ab^3} \cdot \sqrt[6]{2a^2b^2}$

g) $\sqrt{3\sqrt[3]{3^2}}$

h) $\dfrac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}$

26. Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{7}{\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{3}}$

c) $\dfrac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2}$

d) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

e) $\dfrac{3}{2 + \sqrt{2}}$

f) $\dfrac{11}{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}$

g) $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$

h) $\dfrac{\sqrt{3}}{3 - 2\sqrt{3}}$

i) $\dfrac{\sqrt{7} + 1}{2\sqrt{7} + 5}$

27. Realiza las operaciones racionalizando previamente:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{96} - \dfrac{3}{\sqrt{7}}\sqrt{189}$

b) $\dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{\dfrac{5}{3}} - \sqrt{\dfrac{3}{5}}$

d) $\dfrac{2}{1 + \sqrt{3}} - \dfrac{2}{1 - \sqrt{3}}$

23. Quedan:

a) $\frac{9}{2}-2\sqrt{2}$

b) 9

c) $-4-4\sqrt{2}$

d) $64-8\sqrt{6}$

e) $3-3\sqrt{6}$

f) 30

g) 120

h) -4

i) $6+12\sqrt{6}$

j) 2

k) 1

l) $-\frac{50}{3}$

24. La solución queda:

a) $\sqrt[10]{5^2} < \sqrt[10]{2^5}$

b) $\sqrt[12]{6^2} < \sqrt[12]{4^3}$

c) $\sqrt[18]{3^2} < \sqrt[18]{2^6} < \sqrt[18]{5^9}$

d) $\sqrt[15]{10^5} < \sqrt[15]{100^3}$

e) $\sqrt[12]{2^3} < \sqrt[12]{2^4} < \sqrt[12]{2^6}$

f) $\sqrt[4]{5^{-3}} < \sqrt[4]{3^{-2}}$

25. Tras operar obtenemos:

a) $\sqrt[12]{8\,640\,000}$

b) $\sqrt[3]{a^4}$

c) $\sqrt[4]{\frac{b}{2a}}$

d) 1

e) $\sqrt[8]{3^{15}}$

f) $\sqrt[24]{16a^{11}b^{17}}$

g) $\sqrt[6]{3^5}$

h) $\sqrt[12]{2^{13}}=2\sqrt[12]{2}$

26. Tras racionalizar se obtiene:

a) $\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt[6]{7^3\cdot 3^2}}{3}=\frac{\sqrt[6]{3\,087}}{3}$

c) $9-4\sqrt{5}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

e) $\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$

f) $\frac{11\left(3\sqrt{5}+2\sqrt{7}\right)}{17}$

g) $\frac{\sqrt[5]{162}}{3}$

h) $-2-\sqrt{3}$

i) $3-\sqrt{7}$

27. La solución queda:

a) $11\sqrt{3}$

b) $\frac{34+23\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$

d) $2\sqrt{3}$

PÁGINA 32

ACTIVIDADES FINALES

28. Calcula, simplificando al máximo el valor de:

a) $\dfrac{4\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{16}} - 5\sqrt[4]{1875} + \dfrac{2}{\sqrt[4]{32}}$

b) $\left(2\sqrt{45} + 5\sqrt{80} - \dfrac{3}{5}\sqrt{125}\right)\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

c) $2\sqrt[3]{81} \cdot \left(\dfrac{2\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{3}} + \dfrac{5}{\sqrt[3]{9}}\right)$

d) $\left(\dfrac{2}{3}\sqrt[5]{256} - \dfrac{2}{\sqrt[5]{972}}\right) : \dfrac{\sqrt[5]{8}}{2}$

29. Racionaliza, efectúa y simplifica la expresión:

a) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} - \left(\sqrt{6} - 2\right)^2$

b) $\dfrac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} + 3} - \dfrac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{3} - 3}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4} + \dfrac{5}{2\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} + 2} - \sqrt{\dfrac{4}{7}}$

30. Efectúa y simplifica:

a) $\sqrt{4\sqrt{9\sqrt[3]{729}}}$

b) $\sqrt{14 + \sqrt{7 - \sqrt[4]{81}}}$

c) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5^5}}}}$

d) $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$

e) $\left(\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16}\right) \cdot \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}}$

31. Elevando al cuadrado ambos miembros, comprueba que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2$.

32. Demuestra la identidad:

$$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

33. Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

b) $\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2}{\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2}$

34. Efectúa la siguiente operación:

$$1 - \left(\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}\right)^2$$

35. Halla dos números racionales positivos x e y tales que:

$$\sqrt{11 + \sqrt{112}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

36. Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{6}}{1 - \sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}}\right)^2$$

28. Queda:

a) $\dfrac{\sqrt[4]{8}-38\sqrt[4]{3}}{2}$ c) $48+10\sqrt[3]{9}$

b) 92 d) 2

29. Tras simplificar obtenemos:

a) $\dfrac{22\sqrt{6}-37}{5}$ c) $\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}$

b) $-8\sqrt{3}$ d) $\dfrac{49-20\sqrt{7}}{21}$

30. Queda:

a) 6 d) 5

b) 4 e) 6

c) $5\sqrt[16]{5^3}$ f) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

31. Elevamos los dos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2=2^2 \Rightarrow 4+2\sqrt{3}-2\sqrt{\left(4+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(4-2\sqrt{3}\right)}+4-2\sqrt{3}=4$$

$$\Rightarrow 8-2\sqrt{4}=4 \Rightarrow 8-4=4 \quad \text{Se verifica la igualdad.}$$

32. Elevamos los dos miembros al cuadrado:

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{2+2\sqrt{12}+6}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16} \quad \text{Se verifica la igualdad}$$

33. Queda:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\dfrac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}}=\dfrac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4-3}}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-2}=\dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2-2^2}=\dfrac{-1-2\sqrt{3}}{2+\sqrt{15}}=\dfrac{2+4\sqrt{3}-\sqrt{15}-6\sqrt{5}}{11}$

34. Queda:

$$1-\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right)^2=1-\frac{9+4\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}=\frac{-8\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}=-160-72\sqrt{5}$$

35. Elevamos al cuadrado y agrupamos:

$11+\sqrt{112}=x+y+2\sqrt{xy} \Rightarrow \quad 11+\sqrt{112}=x+y+\sqrt{4xy}$

De donde se obtienen dos ecuaciones que forman el siguiente sistema :

$\left.\begin{array}{l} x+y=11 \\ 4xy=112 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Las dos posibles soluciones serían $\begin{array}{l} x=7 \\ y=4 \end{array}$ y también $\begin{array}{l} x=4 \\ y=7 \end{array}$

36. Resolviendo:

$$\frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^2}{\left(1-\sqrt{6}\right)^2}-\frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^2}{\left(1+\sqrt{6}\right)^2}=\frac{7+2\sqrt{6}}{7-2\sqrt{6}}-\frac{7-2\sqrt{6}}{7+2\sqrt{6}}=\frac{\left(7+2\sqrt{6}\right)^2-\left(7-2\sqrt{6}\right)^2}{7^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=\frac{56\sqrt{6}}{25}$$