1) Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \sqrt{\frac{2x+4}{3x+9}}$

b. $f(x) = \frac{5}{x^2-2x-3}$

c. $f(x) = \frac{2x+6}{\sqrt{x^2-9}}$

d. $f(x) = \ln\,(x+5)$

Solución:

$a)\ \ f(x) = \sqrt{\frac{2x+4}{3x+9}} \ \rightarrow\ \frac{2x+4}{3x+9} \geq 0$

Calculamos las raíces del numerador y del denominador:

$2x + 4 = 0\ \rightarrow 2x\ = -4\ \rightarrow x = -2$

$3x + 9 = 0\ \rightarrow 3x\ = -9\ \rightarrow x = -3$

Construimos la tabla para ver los signos:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
$2(x+2)$	-	…	-	0	+
$3(x+3)$	-	0	+	+	+
$\frac{2x+4}{3x+9}$	+	$\nexists$	-	0	+
≥ 0	SI	$\nexists$	NO	SI	SI

Por tanto, Dom$(f) = (-\infty,-3) \cup [-2,+\infty) = \mathbb{R} - [-3,-2)$

$b)\ \ f(x) = \frac{5}{x^2-2x-3}$

En este caso, los únicos puntos que dan problemas son los que anulan el denominador:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Por tanto, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1,3\} = (-\infty, -1) \cup (-1,3) \cup (3, +\infty)$

$c)\ \ f(x) = \dfrac{2x + 6}{\sqrt{x^2 - 9}}$

En esta función, como tenemos la raíz en el denominador, lo que se encuentra dentro debe ser estrictamente positivo: $x^2 - 9 > 0$

Calculamos las raíces y construimos la tabla de signos:

$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3$

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$x - 3$	-	-	-	0	+
$x + 3$	-	0	+	+	+
$x^2 - 9$	+	$\nexists$	-	$\nexists$	+
> 0	SI	$\nexists$	NO	$\nexists$	SI

Luego, $\text{Dom}(f) = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) = \mathbb{R} - [-3,3]$

$d)\ \ f(x) = \ln\,(x + 5)$

$x + 5 > 0 \rightarrow x > -5$

En este caso, $\text{Dom}(f) = (-5, +\infty) = \mathbb{R} - (-\infty, -5]$

2) a) Estudia la simetría de las siguientes funciones:

- $f(x) = \frac{x^3}{x^5 + x^3 - x}$

Solución:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^5 + (-x)^3 - (-x)} = \frac{-x^3}{-x^5 - x^3 + x} = \frac{-x^3}{-(x^5 + x^3 - x)} = \frac{x^3}{x^5 + x^3 - x}$$

$f(x) = f(-x) \rightarrow$ Simetría PAR

- $f(x) = \frac{2x^3+6x}{x^4-2x+1}$

Solución:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3 + 6(-x)}{(-x)^4 - 2(-x) + 1} = \frac{-2x^3 - 6x}{x^4 + 2x - 1}$$

$$-f(x) = -\frac{2x^3 + 6x}{x^4 - 2x + 1} = \frac{-2x^3 - 6x}{x^4 - 2x + 1}$$

No tiene simetría.

2) b) Representa la siguiente función definida a trozos. Estudia su dominio y continuidad.

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & si\ x < -3 \\ x^2 - 2x - 7 & si - 3 \leq x < 2 \\ -7 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Solución:

Para representar la función estudiamos cada uno de los trozos que la definen:

- $si\ x < -3 \ \rightarrow\ f(x) = x - 2$

Construimos una tabla de valores:

X	-3	-4	-5
Y	- 5	-6	-7

- $si - 3 \leq x < 2 \ \rightarrow\ f(x) = x^2 - 2x - 7$

Nos encontramos ante una función de segundo grado (parábola). Por tanto estudiamos los puntos de corte con los ejes, el eje de la parábola y el vértice, además de construir una tabla de valores.

Puntos de corte con los ejes:

Corte OX: $f(x) = 0 \ \rightarrow x^2 - 2x - 7 = 0 \ \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+28}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$

De las dos soluciones que obtenemos una no es válida pues se sale del intervalo de definición ($x = 1 + 2\sqrt{2} \approx 3.82$)

Por tanto el punto de corte con el eje OX es: ($1 - 2\sqrt{2}$, 0)

Corte OY: $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 7 = -7$

Luego el punto de corte con el eje OY es: (0, -7)

Eje de la parábola: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

Vértice: $\left(x, f(x)\right) = \left(1, f(1)\right) = (1, -8)$

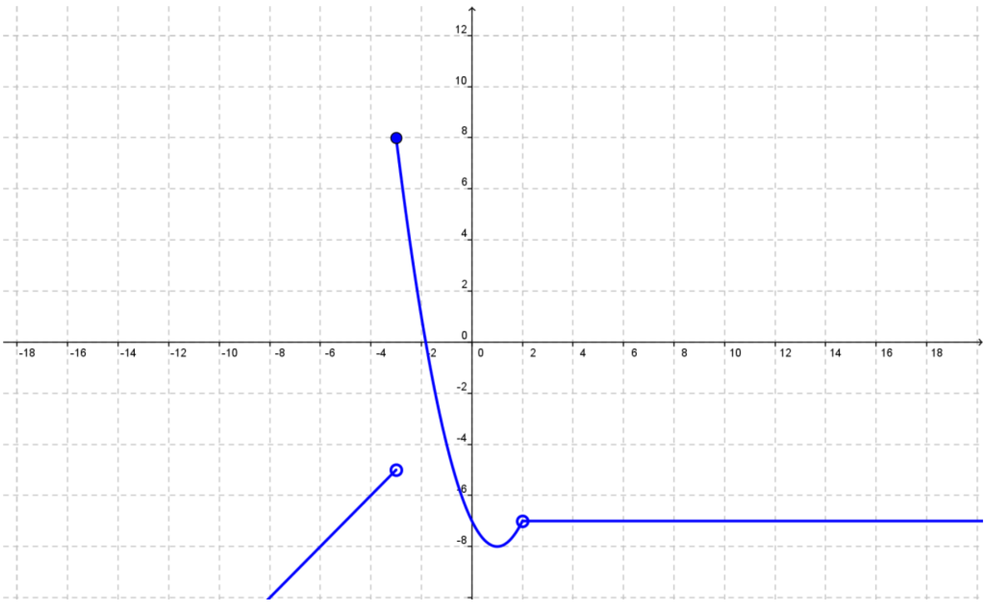
Finalmente construimos una tabla de valores:

X	-3	0	2
Y	8	-7	-7

- $si\ x > 2 \ \ \rightarrow \ f(x) = -7$

En este caso la función es constante, con lo cual su valor no cambia.

La representación gráfica de la función es la que sigue:



El dominio de la función es todo los número reales menos el 2, pues ese valor no lo toma la función. $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

Es una función discontinua y los puntos de discontinuidad son $x = -3$, pues la función tiene un salto, y $x = 2$, pues la función no toma ese valor.

3) Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kg de fresas depende del precio de venta de acuerdo con la siguiente función:

$$B(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Siendo B(x) el beneficio por kg y x el precio de cada kg, expresados en euros.

a) ¿Entre qué precios se producen beneficios no negativos para el almacenista?
b) ¿Qué precio maximiza los beneficios?¿Cuál es ese beneficio máximo?
c) Si tiene en el almacén 10000kg de fresas, ¿cuál será el beneficio total que obtenga si cada kg lo vende a un precio de 2€?

Solución:

En primer lugar vamos a representar la función beneficios que es una parábola:

$$B(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Comenzamos calculando los puntos de corte con los ejes:

Corte con OX: $f(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$

Por tanto los puntos de corte con el eje OX son: (3,0), (1,0)

Corte con OY: $f(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 3 = -3$

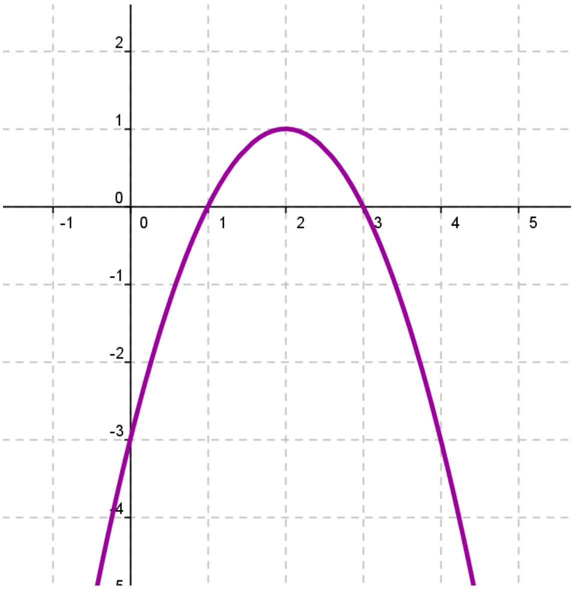
Luego el punto de corte con el eje OY es: (0,-3)

Eje de la parábola: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$

Vértice: $(x, f(x)) = (2, f(2)) = (2,1)$

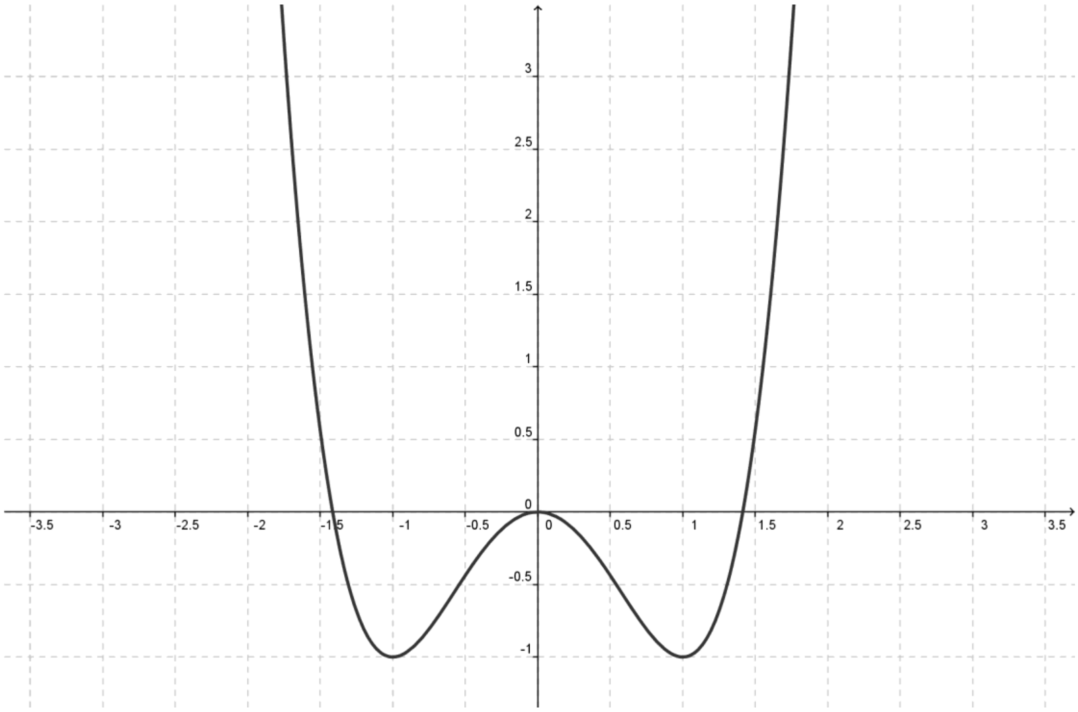
Vamos a realizar la representación gráfica, y a partir de ella responderemos a las preguntas planteadas.

La representación gráfica es la siguiente:



a) Como se puede observar en la gráfica, la función es no negativa en el intervalo [1,3]. Por tanto los beneficios serán no negativos si el precio x está en el intervalo de [1,3] euros.
b) Al ser una parábola cóncava, el máximo se alcanza en el vértice de la misma. Luego el precio que maximiza los beneficios es x = 2€; y el beneficio máximo que se obtiene es de 1€.
c) Para saber el beneficio total que se obtiene por 10000kg necesitamos saber en primer lugar el beneficio que proporciona un kg.
   Si el precio es de 2€, ya sabemos que el beneficio por kg es de 1€ (basta mirar la gráfica y comprobar que la imagen de x=2 es y=1).
   Luego si un kg proporciona un beneficio de 1€, el beneficio total por los 10000 kg será: 10000 · 1= 10000 €

4) Para cada una de las siguientes gráficas de funciones, indica, de forma justificada, el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y los mínimos.
   a) En esta función indica además la curvatura y los puntos de inflexión.



Solución:

Dominio: $\mathbb{R}$

Creciente: (-1,0), (1,+∞)

Decreciente: (-∞,-1), (0,1)

Máximo relativo: en x=0 pues la función pasa de ser creciente a ser decreciente y tiene la mayor imagen en un entorno del mismo.

Mínimos absolutos y relativos: en x=-1 y x=1 pues en ellos la función pasa de ser decreciente a creciente y alcanzan la menor imagen de toda la función y en un entorno de los puntos.

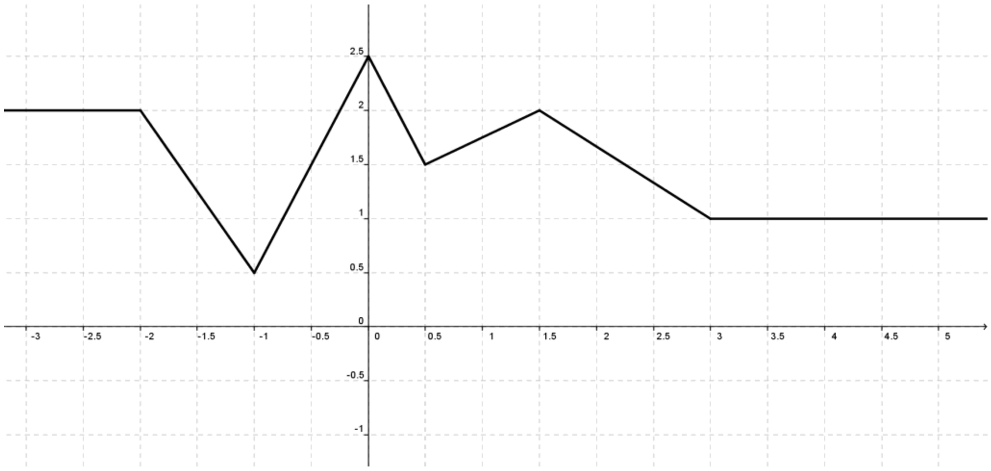
Convexa: (-∞,-0.5), (0.5, +∞) pues las ramas se abren hacia arriba.

Cóncava: (-0.5, 0.5) pues las ramas se abren hacia abajo.

Puntos de inflexión: x=-0.5 (cambio de convexa a cóncava)

x=0.5 (cambio de cóncava a convexa)

b)



Solución:

Dominio: $\mathbb{R}$

Constante: $(-\infty,-2)$, $(3,+\infty)$

Creciente: (-1,0), (0.5, 1.5)

Decreciente: (-2,-1), (0, 0.5), (1.5, 3)

Máximo relativo: en x=1.5 pues la función pasa de ser creciente a ser decreciente y tiene la mayor imagen en un entorno del mismo.

Máximo absoluto y relativo: en x=0 pues la función pasa de ser creciente a decreciente y alcanzan la mayor imagen de toda la función y en un entorno del punto.

Mínimo relativo: en x=0.5 pues la función pasa de ser decreciente a ser creciente y tiene la menor imagen en un entorno del mismo.

Mínimos absolutos y relativos: en x=-1 pues la función pasa de ser decreciente a creciente y alcanzan la menor imagen de toda la función y en un entorno del punto.