

NOMBRE: \_\_\_\_\_

- 1) a) Expresar en notación científica:  $235,7 \cdot 10^{-13}$   
b) Expresar en notación habitual:  $1,7345 \cdot 10^{-12}$
- 2) a) Simplificar, aplicando propiedades de potencias:  $\frac{-4^{26}6^{72}}{(-12)^{36}}$   
b) Racionalizar:  $\frac{2}{4-2\sqrt{3}}$
- 3) a) Para  $P(x) = 2x^3 + mx + 2$ , hallar, sin efectuar la división, el valor de  $m$  que hace que la división entre  $x + 2$  sea exacta. Escribir como queda  $P(x)$  al sustituir el  $m$  obtenido.  
b) Calcular  $24^2$ . A continuación, factorizar, sin usar calculadora, el polinomio siguiente:  $P(x) = 27x^3 + 21x^2 - 11x - 5$
- 4) Resolver la ecuación siguiente:  $2x + \sqrt{x^2 - 6x + 2} = 1$
- 5) a) Resolver la ecuación siguiente:  $5 \log x = 3 + \log \frac{x^3}{10}$   
b) Resolver la ecuación siguiente:  $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$
- 6) Sin calculadora, siendo  $\operatorname{tg} \alpha = -2$ ,  $90^\circ < \alpha < 270^\circ$ , hallar el resto de razones trigonométricas de  $\alpha$ . A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de  $\alpha$  en grados, minutos, segundos.
- 7) Hallar el dominio de  $y = \sqrt{\frac{x+3}{x^2-4x}}$
- 8) Dibujar la siguiente función, calculando *eje*, *vértice* y *cortes con los ejes* de la parábola que constituye un trozo de la misma:  
$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x < 0 \\ -x^2+4x-3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
- 9) Desarrollar, aplicando la fórmula del Binomio de Newton:  $(2x - 3)^4$
- 10) El 30% de los aparatos que llegan a un servicio técnico para ser reparados están en garantía. De los que no están en garantía, el 20% ya fueron reparados en otra ocasión. De los que sí están en garantía, el 5% fue reparado con anterioridad. Elegido un aparato al azar, hallar:
  - a) Probabilidad de que haya sido reparado anteriormente.
  - b) Probabilidad de que el aparato no haya sido reparado anteriormente y no esté en garantía.

## SOLUCIONES

1) a) Expresar en notación científica:  $235,7 \cdot 10^{-13}$

$$235,7 \cdot 10^{-13} = 2,357 \cdot 10^2 \cdot 10^{-13} = \boxed{2,357 \cdot 10^{-11}}$$

b) Expresar en notación habitual:  $1,7345 \cdot 10^{-12}$

$$1,7345 \cdot 10^{-12} = \boxed{0,000\ 000\ 000\ 001\ 7345}$$

2) a) Simplificar, aplicando propiedades de potencias:  $\frac{-4^{26}6^{72}}{(-12)^{36}}$

$$\begin{aligned} \frac{-4^{26}6^{72}}{(-12)^{36}} &= \frac{-(2^2)^{26}(2 \cdot 3)^{72}}{12^{36}} = -\frac{2^{52}2^{72}3^{72}}{(2 \cdot 3)^{36}} = -\frac{2^{124}3^{72}}{(2^2)^{36}3^{36}} = -\frac{2^{124}3^{72-36}}{2^{72}} = \\ &= -2^{124-72}3^{36} = \boxed{-2^{52}3^{36}} \end{aligned}$$

b) Racionalizar:  $\frac{2}{4-2\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{4-2\sqrt{3}} &= \frac{2}{4-2\sqrt{3}} \frac{4+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{2(4+2\sqrt{3})}{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16-2^2(\sqrt{3})^2} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16-4 \cdot 3} = \\ &= \frac{4(2+\sqrt{3})}{4} = \boxed{2+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

3) a) Para  $P(x) = 2x^3 + mx + 2$ , hallar, sin efectuar la división, el valor de  $m$  que hace que la división entre  $x + 2$  sea exacta. Escribir como queda  $P(x)$  al sustituir el  $m$  obtenido.

Según el Teorema del Resto, el resto de dividir  $P(x)$  entre  $x + 2$  es  $P(-2)$ . Como este resto debe valer 0 para que la división sea exacta:

$$\begin{aligned} P(-2) = 0 &\Leftrightarrow 2(-8) - 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow -16 + 2 = 2m \Leftrightarrow -14 = 2m \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \boxed{m = -7} \end{aligned}$$

Por lo que  $\boxed{P(x) = 2x^3 - 7x + 2}$

b) Calcular  $24^2$ . A continuación, factorizar, sin usar calculadora, el polinomio siguiente:  $P(x) = 27x^3 + 21x^2 - 11x - 5$

$24^2 = 576$ . Probando, por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 27 & 21 & -11 & -5 \\ & & -27 & 6 & -5 \\ \hline & 27 & -6 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

No encontramos cómo seguir, pero al tener un polinomio de segundo grado, para encontrar sus raíces podemos optar por igualarlo a 0 y resolver la ecuación de segundo grado resultante:

$$27x^2 - 6x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 540}}{54} = \frac{6 \pm \sqrt{576}}{54} = \frac{6 \pm 24}{54} = \left\langle \begin{aligned} &= \frac{-18}{54} = -\frac{1}{3} \\ &= \frac{30}{54} = \frac{5}{9} \end{aligned} \right.$$

Como consecuencia, aplicando el Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios:

$$\boxed{P(x) = 27x^3 + 21x^2 - 11x - 5 = 27(x+1)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{5}{9}\right)}$$

4) Resolver la ecuación siguiente:  $2x + \sqrt{x^2 - 6x + 2} = 1$

Aislamos el sumando que contiene la raíz cuadrada y elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned} 2x + \sqrt{x^2 - 6x + 2} = 1 &\Rightarrow \sqrt{x^2 - 6x + 2} = 1 - 2x \Rightarrow (\sqrt{x^2 - 6x + 2})^2 = (1 - 2x)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 1 - 4x + 4x^2 \Rightarrow 0 = 4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 6x - 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 = 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{-6}{6} = -1 \\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Como siempre que elevamos al cuadrado, hay que comprobar la validez de las soluciones, sustituyendo en la ecuación original:

- $x = -1$ :  $-2 + \sqrt{1 + 6 + 2} = -2 + 3 = 1$ : válida
- $x = 1/3$ : Sustituimos y realizamos la operación con la calculadora, y resulta ser igualmente válida.

5) a) Resolver la ecuación siguiente:  $5 \log x = 3 + \log \frac{x^3}{10}$

$$\begin{aligned} 5 \log x = 2 + \log \frac{x^3}{10} &\Leftrightarrow 5 \log x = 2 + \log x^3 - \log 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5 \log x = 2 + 3 \log x - 1 &\Leftrightarrow 5 \log x - 3 \log x = 1 \Leftrightarrow 2 \log x = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log x = 1/2 &\Leftrightarrow x = 10^{1/2} \Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{10}} \end{aligned}$$

La solución hallada es válida porque no anula los argumentos de los logaritmos de la ecuación inicial. En realidad, habría dos soluciones:  $x = \pm \sqrt{10}$ , pero  $-\sqrt{10}$  no es válida, porque haría negativo el argumento del logaritmo del primer miembro de la ecuación original, lo que no es posible.

b) Resolver la ecuación siguiente:  $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$

$$5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$$

Llamando  $t = 5^x$ :

$$t^2 - 30t + 125 = 0 \Rightarrow t = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 500}}{2} = \frac{30 \pm 20}{2} = \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{50}{2} = 25 \end{cases}$$

- Si  $t = 5 \Rightarrow$  Como  $t = 5^x$ ,  $5^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$
- Si  $t = 25 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

6) Sin calculadora, siendo  $\text{tg } \alpha = -2$ ,  $90^\circ < \alpha < 270^\circ$ , hallar el resto de razones trigonométricas de  $\alpha$ . A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de  $\alpha$  en grados, minutos, segundos.

Como la tangente es negativa en el segundo cuadrante y positiva en el tercero, el ángulo está en el segundo cuadrante.

- $\boxed{\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = -\frac{1}{2}}$

$$\bullet \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}}, \text{ negativo por ser del segundo cuadrante.}$$

$$\bullet \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = -2 \frac{-\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\bullet \quad \boxed{\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-1/\sqrt{5}} = -\sqrt{5}}$$

$$\bullet \quad \boxed{\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{2\sqrt{5}/5} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Con la calculadora, obtenemos (partiendo de que  $\operatorname{tg} \alpha = -2$ ), que  $\alpha = -63,43^\circ$ .  
Como es del II cuadrante:  $\boxed{\alpha = -63,43^\circ + 180^\circ = 116,57^\circ = 116^\circ 33' 54''}$

7) Hallar el dominio de  $y = \sqrt{\frac{x+3}{x^2-4x}}$

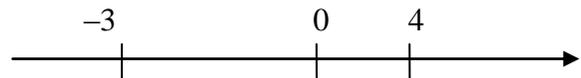
El dominio de esta función lo constituyen los valores de  $x$  que resuelven la siguiente inecuación, puesto que no existen raíces de números negativos y que dicha solución ya excluye los valores de  $x$  que anulen el denominador, que tampoco tienen imagen:

$$\frac{x+3}{x^2-4x} \geq 0$$

- Raíces del numerador:  $x+3=0 \Rightarrow x=-3$ . Factorizado:  $x+3$ .
- Raíces del denominador:  $x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x=0$  ó  $x=4$ . Factorizado:  $x(x-4)$ .

- Inecuación resultante con los polinomios factorizados:  $\frac{x+3}{x(x-4)} \geq 0$

División de  $\mathbb{R}$  en intervalos mediante las raíces:



	$(-\infty, -3)$	$-3$	$(-3, 0)$	$0$	$(0, 4)$	$4$	$(4, +\infty)$
$x+3$	-	0	+	...	+	...	+
$x-0$	-	...	-	0	+	...	+
$x-4$	-	...	-	...	-	0	+
$\frac{x+3}{x(x-4)}$	-	0	+	$\exists$	-	$\exists$	+
¿Sirven? →	No	Si	Si	No	No	No	Si

Luego la solución, y el dominio, es:  $\boxed{D(f) = [-3, 0) \cup (4, +\infty)}$ .

- 8) Dibujar la siguiente función, calculando *eje*, *vértice* y *cortes con los ejes* de la parábola que constituye un trozo de la misma:

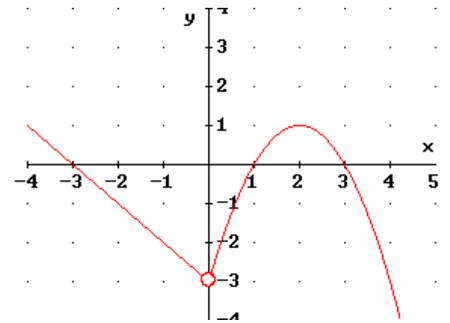
$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x < 0 \\ -x^2+4x-3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función  $y = -x - 3$  es una recta. Con una pequeña tabla de valores la dibujamos. Y la restringimos a la zona  $x < 0$  (lado izquierdo del eje OY, sin tocarlo).

La función  $y = -x^2 + 4x - 3$  es una parábola *cóncava*, puesto que el coeficiente de  $x^2$  es negativo. Además:

- $x = 0 \Rightarrow y = -3$ . Corta a OY en (0, -3).
- $y = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ó } x = 3$ . Corta a OX en (1, 0) y (3, 0).
- Eje:  $x = -b / 2a \Rightarrow x = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2$ .
- Vértice:  $x = 2 \Rightarrow y = -4 + 8 - 3 = 1$ : (2, 1).

Con una pequeña tabla de valores adicional, obtenemos su gráfica, que restringimos a la zona  $x > 0$ , esto es, al lado derecho del eje OY sin tocarlo. Obtenemos así la función del gráfico adjunto. Observar que para  $x = 0$  no hay imagen, lo que hemos destacado con un punto hueco.



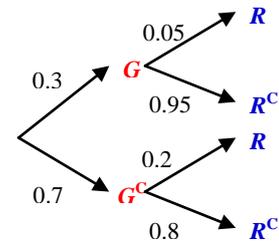
9) Desarrollar, aplicando la fórmula del Binomio de Newton:  $(2x - 3)^4$

$$\begin{aligned} (2x - 3)^4 &= \binom{4}{0}(2x)^4 - \binom{4}{1}(2x)^3 \cdot 3 + \binom{4}{2}(2x)^2 \cdot 3^2 - \binom{4}{3}2x \cdot 3^3 + \binom{4}{4}3^4 = \\ &= 1 \cdot 2^4 x^4 - 4 \cdot 2^3 x^3 \cdot 3 + 6 \cdot 2^2 x^2 \cdot 9 - 4 \cdot 2x \cdot 27 + 1 \cdot 81 = \\ &= \boxed{16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81} \end{aligned}$$

10) El 30% de los aparatos que llegan a un servicio técnico para ser reparados están en garantía. De los que no están en garantía, el 20% ya fueron reparados en otra ocasión. De los que sí están en garantía, el 5% fue reparado con anterioridad. Elegido un aparato al azar, hallar:

a) Probabilidad de que haya sido reparado anteriormente.

Tenemos dos experimentos aleatorios relacionados: El primero, con resultados *Estar en garantía* (lo llamaremos  $G$ ) o *no estarlo* ( $G^c$ ) y *Haber sido reparado con anterioridad* ( $R$ ), o *no* ( $R^c$ ). Es, por tanto, un problema susceptible de ser tratado a través de un diagrama de árbol. Lo construimos a la izquierda de este texto, teniendo en cuenta que la probabilidad que se pone *en cada rama* es la del suceso *terminal* de la misma *condicionado* a que se verifique el suceso *inicial*. Completamos dichas probabilidades con los datos del enunciado, recordando que *las probabilidades de todas las ramas que parten de un mismo punto deben sumar 1*.



Según el *Teorema de la Probabilidad Total*, la probabilidad de un suceso terminal del árbol ( $R$ ), sin condicionar a nada, es la suma de los productos de las distintas ramas que conducen a cada aparición de dicho suceso. Es decir:

$$P(R) = 0.3 \cdot 0.05 + 0.7 \cdot 0.2 = \boxed{0.155}$$

b) Probabilidad de que el aparato no haya sido reparado anteriormente y no esté en garantía.

Nos piden la probabilidad de una intersección (" $y$ "). Dicha probabilidad es el producto de todas las ramas que contienen los sucesos implicados, desde la izquierda a la derecha del árbol:

$$P(G^c \cap R^c) = 0.7 \cdot 0.8 = \boxed{0.56}$$