NOMBRE: ____

1) a) Expresar en notación científica: $235{,}7\cdot 10^{-13}$
   b) Expresar en notación habitual: $1{,}7345\cdot 10^{-12}$

2) a) Simplificar, aplicando propiedades de potencias: $\dfrac{-4^{26}6^{72}}{(-12)^{36}}$

   b) Racionalizar: $\dfrac{2}{4-2\sqrt{3}}$

3) a) Para $P(x) = 2x^3 + mx + 2$, hallar, sin efectuar la división, el valor de m que hace que la división entre $x + 2$ sea exacta. Escribir como queda $P(x)$ al sustituir el m obtenido.
   b) Calcular 24^2. A continuación, factorizar, sin usar calculadora, el polinomio siguiente: $P(x) = 27x^3 + 21x^2 - 11x - 5$

4) Resolver la ecuación siguiente: $2x+\sqrt{x^2-6x+2}=1$

5) a) Resolver la ecuación siguiente: $5 \log x = 3 + \log \dfrac{x^3}{10}$
   b) Resolver la ecuación siguiente: $5^{2x} - 30\cdot 5^x + 125 = 0$

6) Sin calculadora, siendo $\operatorname{tg} \alpha = -2$, $90º < \alpha < 270º$, hallar el resto de razones trigonométricas de α. A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos.

7) Hallar el dominio de $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-4x}}$

8) Dibujar la siguiente función, calculando *eje*, *vértice* y *cortes con los ejes* de la parábola que constituye un trozo de la misma:

$$f(x)=\begin{cases} -x-3 & si \quad x<0 \\ -x^2+4x-3 & si \quad x>0 \end{cases}$$

9) Desarrollar, aplicando la fórmula del Binomio de Newton: $(2x - 3)^4$

10) El 30% de los aparatos que llegan a un servicio técnico para ser reparados están en garantía. De los que no están en garantía, el 20% ya fueron reparados en otra ocasión. De los que sí están en garantía, el 5% fue reparado con anterioridad. Elegido un aparato al azar, hallar:
   a) Probabilidad de que haya sido reparado anteriormente.
   b) Probabilidad de que el aparato no haya sido reparado anteriormente y no esté en garantía.

SOLUCIONES

1) a) Expresar en notación científica: $235,7\cdot10^{-13}$

$$235,7\cdot10^{-13} = 2,357\cdot10^{2}\cdot10^{-13} = \boxed{2,357\cdot10^{-11}}$$

b) Expresar en notación habitual: $1,7345\cdot10^{-12}$

$$1,7345\cdot10^{-12} = \boxed{0,000\ 000\ 000\ 001\ 7345}$$

2) a) Simplificar, aplicando propiedades de potencias: $\dfrac{-4^{26}6^{72}}{(-12)^{36}}$

$$\frac{-4^{26}6^{72}}{(-12)^{36}} = \frac{-(2^2)^{26}(2\cdot3)^{72}}{12^{36}} = -\frac{2^{52}2^{72}3^{72}}{(2^2 3)^{36}} = -\frac{2^{124}3^{72}}{(2^2)^{36}3^{36}} = -\frac{2^{124}3^{72-36}}{2^{72}} =$$

$$= -2^{124-72}3^{36} = \boxed{-2^{52}3^{36}}$$

b) Racionalizar: $\dfrac{2}{4-2\sqrt{3}}$

$$\frac{2}{4-2\sqrt{3}} = \frac{2}{4-2\sqrt{3}}\,\frac{4+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{2(4+2\sqrt{3})}{4^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16-2^2(\sqrt{3})^2} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16-4\cdot3} =$$

$$= \frac{4(2+\sqrt{3})}{4} = \boxed{2+\sqrt{3}}$$

3) a) Para $P(x) = 2x^3 + mx + 2$, hallar, sin efectuar la división, el valor de m que hace que la división entre $x + 2$ sea exacta. Escribir como queda $P(x)$ al sustituir el m obtenido.

Según el Teorema del Resto, el resto de dividir $P(x)$ entre $x + 2$ es $P(-2)$. Como este resto debe valer 0 para que la división sea exacta:

$$P(-2) = 0 \iff 2(-8) - 2m + 2 = 0 \iff -16 + 2 = 2m \iff -14 = 2m \iff$$

$$\iff \boxed{m = -7}$$

Por lo que $\boxed{P(x) = 2x^3 - 7x + 2}$

b) Calcular 24^2. A continuación, factorizar, sin usar calculadora, el polinomio siguiente: $P(x) = 27x^3 + 21x^2 - 11x - 5$

$24^2 = 576$. Probando, por Ruffini:

	27	21	−11	−5
−1		−27	6	−5
	27	−6	−5	0

No encontramos cómo seguir, pero al tener un polinomio de segundo grado, para encontrar sus raíces podemos optar por igualarlo a 0 y resolver la ecuación de segundo grado resultante:

$$27x^2 - 6x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6\pm\sqrt{36+540}}{54} = \frac{6\pm\sqrt{576}}{54} = \frac{6\pm24}{54} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-18}{54} = -\dfrac{1}{3} \\ = \dfrac{30}{54} = \dfrac{5}{9} \end{array}\right.$$

Como consecuencia, aplicando el Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios:

$$\boxed{P(x) = 27x^3 + 21x^2 - 11x - 5 = 27(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{5}{9})}$$

4) Resolver la ecuación siguiente: $2x+\sqrt{x^2-6x+2}=1$

Aislamos el sumando que contiene la raíz cuadrada y elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$2x+\sqrt{x^2-6x+2}=1 \Rightarrow \sqrt{x^2-6x+2}=1-2x \Rightarrow (\sqrt{x^2-6x+2})^2=(1-2x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-6x+2=1-4x+4x^2 \Rightarrow 0 = 4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 6x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 3x^2 + 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2\pm 4}{6} = \left\langle \begin{array}{l} =\frac{-6}{6}=-1 \\ =\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Como siempre que elevamos al cuadrado, hay que comprobar la validez de las soluciones, sustituyendo en la ecuación original:

- $\boxed{x = -1}$: $-2+\sqrt{1+6+2} = -2+3 = 1$: válida
- $\boxed{x = 1/3}$: Sustituimos y realizamos la operación con la calculadora, y resulta ser igualmente válida.

5) a) Resolver la ecuación siguiente: $5 \log x = 3 + \log \frac{x^3}{10}$

$$5 \log x = 2 + \log \frac{x^3}{10} \Leftrightarrow 5 \log x = 2 + \log x^3 - \log 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \log x = 2 + 3 \log x - 1 \Leftrightarrow 5 \log x - 3 \log x = 1 \Leftrightarrow 2 \log x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log x = 1/2 \Leftrightarrow x = 10^{1/2} \Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{10}}$$

La solución hallada es válida porque no anula los argumentos de los logaritmos de la ecuación inicial. En realidad, habría dos soluciones: $x = \pm\sqrt{10}$, pero $-\sqrt{10}$ no es válida, porque haría negativo el argumento del logaritmo del primer miembro de la ecuación original, lo que no es posible.

b) Resolver la ecuación siguiente: $5^{2x} - 30\cdot 5^x + 125 = 0$

$$5^{2x} - 30\cdot 5^x + 125 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 30\cdot 5^x + 125 = 0$$

Llamando $\boxed{t = 5^x}$:

$$t^2 - 30t + 125 = 0 \Rightarrow t = \frac{30\pm\sqrt{900-500}}{2} = \frac{30\pm 20}{2} = \left\langle \begin{array}{l} =\frac{10}{2}=5 \\ =\frac{50}{2}=25 \end{array} \right.$$

- Si $t = 5 \Rightarrow$ Como $t = 5^x$, $5^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$
- Si $t = 25 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

6) Sin calculadora, siendo tg $\alpha = -2$, $90º < \alpha < 270º$, hallar el resto de razones trigonométricas de α. A continuación, con ayuda de la calculadora, decir el valor de α en grados, minutos, segundos.

Como la tangente es negativa en el segundo cuadrante y positiva en el tercero, el ángulo está en el segundo cuadrante.

- $\boxed{\text{cotg}\, \alpha = \frac{1}{\text{tg}\, \alpha} = -\frac{1}{2}}$

- $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{1+(-2)^2} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{1}{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$, negativo por ser del segundo cuadrante.

- $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\mathrm{sen}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha\cos\alpha = -2\dfrac{-\sqrt{5}}{5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$

- $\boxed{\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{-1/\sqrt{5}} = -\sqrt{5}}$

- $\boxed{\mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}/5} = \dfrac{5}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2\cdot 5} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

Con la calculadora, obtenemos (partiendo de que tg α = – 2), que α = – 63,43º.
Como es del II cuadrante: $\boxed{\alpha = -63{,}43^\circ + 180^\circ = 116{,}57^\circ = 116^\circ\, 33'\, 54''}$

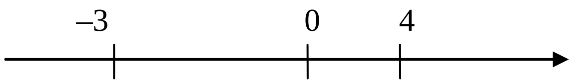
7) Hallar el dominio de $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-4x}}$

El dominio de esta función lo constituyen los valores de x que resuelven la siguiente inecuación, puesto que no existen raíces de números negativos y que dicha solución ya excluye los valores de x que anulen el denominador, que tampoco tienen imagen:

$$\frac{x+3}{x^2-4x} \geq 0$$

- Raíces del numerador: $x + 3 = 0 \Rightarrow \underline{x = -3}$. <u>Factorizado: $x + 3$</u>.
- Raíces del denominador: $x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \underline{x = 0 \text{ ó } x = 4}$. <u>Factorizado: $x(x-4)$</u>.
- Inecuación resultante con los polinomios factorizados: $\dfrac{x+3}{x(x-4)} \geq 0$

  División de R en intervalos mediante las raíces:



	(–∞, –3)	–3	(–3, 0)	0	(0, 4)	4	(4, +∞)
$x+3$	–	0	+	…	+	…	+
$x-0$	–	…	–	0	+	…	+
$x-4$	–	…	–	…	–	0	+
$\dfrac{x-3}{x(x-4)}$	–	0	+	∄	–	∄	+
¿Sirven? →	No	Si	Si	No	No	No	Si

Luego la solución, y el dominio, es: $\boxed{D(f) = [-3, 0) \cup (4, +\infty)}$.

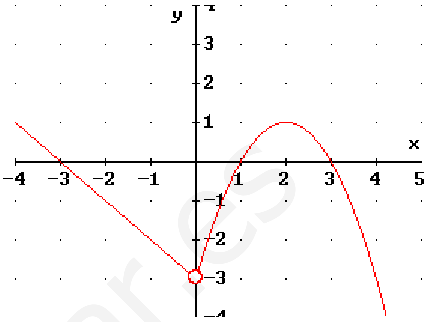
8) Dibujar la siguiente función, calculando *eje*, *vértice* y *cortes con los ejes* de la parábola que constituye un trozo de la misma:

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & si \quad x < 0 \\ -x^2+4x-3 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

La función $y = -x - 3$ es una recta. Con una pequeña tabla de valores la dibujamos. Y la restringimos a la zona $x < 0$ (lado izquierdo del eje OY, sin tocarlo).
La función $y = -x^2 + 4x - 3$ es una parábola *cóncava*, puesto que el coeficiente de x^2 es negativo. Además:

- $x = 0 \Rightarrow y = -3$. Corta a OY en $(0, -3)$.
- $y = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ó $x = 3$. Corta a OX en $(1, 0)$ y $(3, 0)$.
- Eje: $x = -b / 2a \Rightarrow x = \dfrac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2$.
- Vértice: $x = 2 \Rightarrow y = -4 + 8 - 3 = 1$: $(2, 1)$.

Con una pequeña tabla de valores adicional, obtenemos su gráfica, que restringimos a la zona $x > 0$, esto es, al lado derecho del eje OY sin tocarlo. Obtenemos así la función del gráfico adjunto. Observar que para $x = 0$ no hay imagen, lo que hemos destacado con un punto hueco.



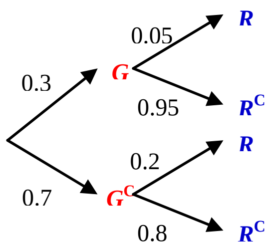
9) Desarrollar, aplicando la fórmula del Binomio de Newton: $(2x - 3)^4$

$$(2x-3)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 - \binom{4}{1}(2x)^3 3 + \binom{4}{2}(2x)^2 3^2 - \binom{4}{3}2x\cdot 3^3 + \binom{4}{4}3^4 =$$
$$= 1\cdot 2^4x^4 - 4\cdot 2^3x^3\cdot 3 + 6\cdot 2^2x^2\cdot 9 - 4\cdot 2x\cdot 27 + 1\cdot 81 =$$
$$= \boxed{16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81}$$

10) El 30% de los aparatos que llegan a un servicio técnico para ser reparados están en garantía. De los que no están en garantía, el 20% ya fueron reparados en otra ocasión. De los que sí están en garantía, el 5% fue reparado con anterioridad. Elegido un aparato al azar, hallar:

a) Probabilidad de que haya sido reparado anteriormente.

Tenemos dos experimentos aleatorios relacionados: El primero, con resultados *Estar en garantía* (lo llamaremos G) o *no estarlo* (G^c) y *Haber sido reparado con anterioridad* (R), *o no* (R^c). Es, por tanto, un problema susceptible de ser tratado a través de un diagrama de árbol. Lo construimos a la izquierda de este texto, teniendo en cuenta que la probabilidad que se pone *en cada rama* es la del suceso *terminal* de la misma *condicionado* a que se verifique el suceso *inicial*. Completamos dichas probabilidades con los datos del enunciado, recordando que *las probabilidades de todas las ramas que parten de un mismo punto deben sumar 1*.



Según el *Teorema de la Probabilidad Total*, la probabilidad de un suceso terminal del árbol (R), sin condicionar a nada, es la suma de los productos de las distintas ramas que conducen a cada aparición de dicho suceso. Es decir:

$$P(R) = 0.3 \cdot 0.05 + 0.7 \cdot 0.2 = \boxed{0.155}$$

b) Probabilidad de que el aparato no haya sido reparado anteriormente y no esté en garantía.

Nos piden la probabilidad de una intersección ("*y*"). Dicha probabilidad es el producto de todas las ramas que contienen los sucesos implicados, desde la izquierda a la derecha del árbol:

$$P(G^c \cap R^c) = 0.7 \cdot 0.8 = \boxed{0.56}$$