TRIGONOMETRÍA (Resumen)

- **Definiciones en triángulos rectángulos**

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{cosec}\,\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$$

- **Razones de 30º, 60º y 45º**

$$\text{sen}\,30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \text{sen}\,60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{sen}\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

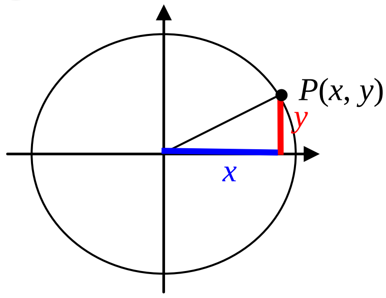
$$\text{tg}\,30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{tg}\,60^\circ = \sqrt{3} \qquad \text{tg}\,45^\circ = 1$$

- **Definiciones generales (válidas para cualquier ángulo de cualquier cuadrante)**

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{r} \qquad \text{cosec}\,\alpha = \frac{r}{y}$$

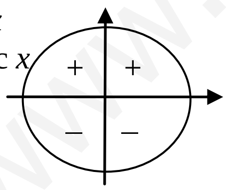
$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} \qquad \text{cotg}\,\alpha = \frac{x}{y}$$

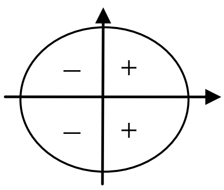


- **Signos de las razones según los cuadrantes**

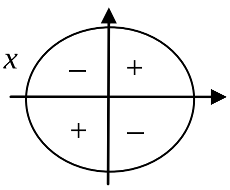
sen x
cosec x



cos x
sec x

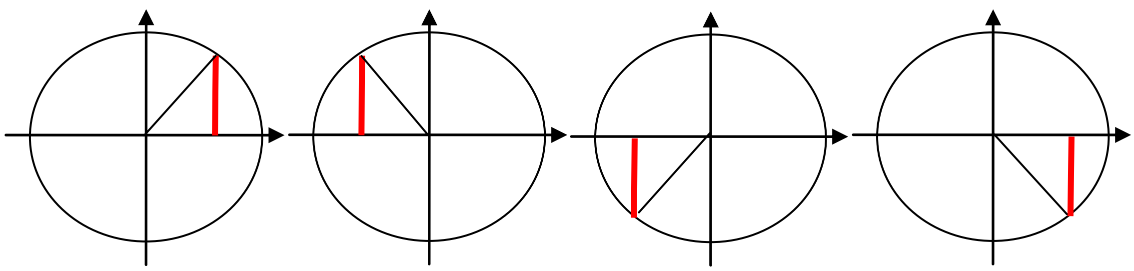


tg x
cotg x



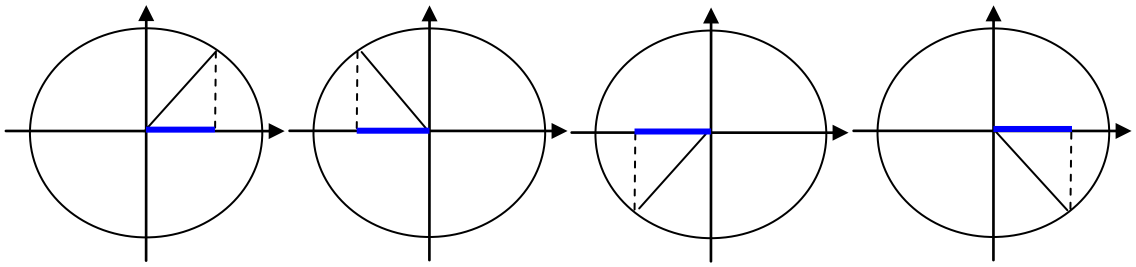
- **Las razones en la circunferencia trigonométrica (radio = 1)**

sen *x*

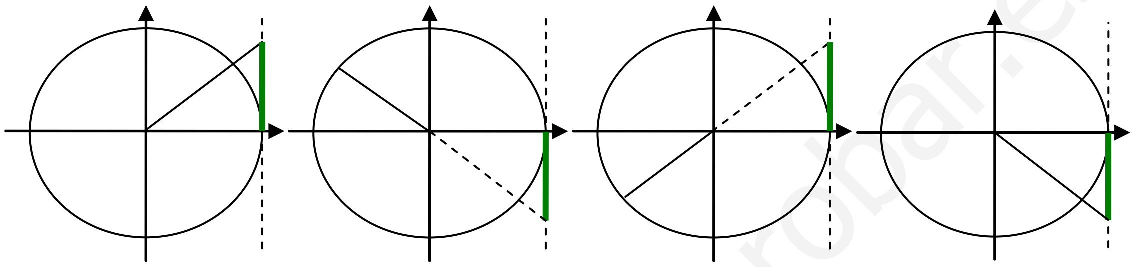


www.yoquieroaprobar.es

cos *x*



tg *x*



- **Recorrido**

$$-1 \le \text{sen}\, x \le 1 \qquad -1 \le \cos x \le 1 \qquad -\infty < \text{tg}\, x < +\infty, \qquad \forall x$$

- **Situar un ángulo en la circunferencia**
- Si el ángulo es mayor de 360º, lo dividimos entre 360 (sin eliminar ceros en dividendo y divisor, si se pudiera) y coincide con la posición del resto de la división sobre la circunferencia. Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 2100 & 360 \\ \hline 300 & 5 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 2100 = 5·360 + 300 (5 vueltas completas + 300º) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ 2100º y 300º coinciden sobre la circunferencia.

- Si el ángulo es negativo y menor de – 360º, dividimos entre 360 su valor absoluto, como antes. El ángulo coincide con el resto negativo. Sumándole 360º se convierte en un ángulo entre 0º y 360º. Ejemplo: Tomemos – 2100º; se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 2100 & 360 \\ \hline 300 & 5 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 2100 = 5·360 + 300 $\Rightarrow$ – 2100 = 5·(– 360) – 300 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ – 2100º y – 300º coinciden sobre la circunferencia.
Pero – 300º coincide sobre la circunferencia con – 300º + 360º = 60º. Por tanto, – 2100º coincide con 60º.

www.yoquieroaprobar.es

• Fórmulas fundamentales

1) $\cot g\,\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

2) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

3) $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

4) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

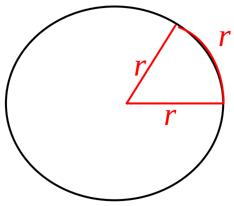
5) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

6) $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

7) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

8) $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$

• El radián

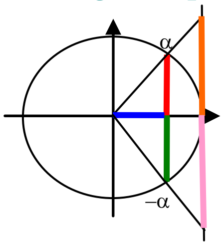


El *radián* es una medida de ángulos. Un ángulo mide 1 radián (y se denota como 1 rad) si delimita un arco de circunferencia cuya longitud coincide con el radio.
Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, dicha longitud (el arco que delimita) es 2π veces mayor que el radio. Por tanto, un ángulo de 360º es 2π veces mayor que aquél que mide 1 rad. Luego 360º equivale a 2π rad. Y por ello, 180º equivale a π rad. Así, una regla de 3 permite pasar de grados a radianes, o al revés:

$$\frac{180^\circ}{\pi\ \text{rad}} = \frac{\text{Ángulo en grados}}{\text{Ángulo en rad}}$$

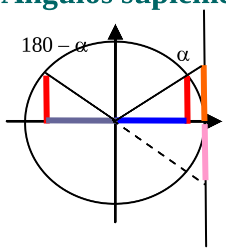
• Relaciones entre razones de distintos ángulos

Ángulos opuestos: α y – α



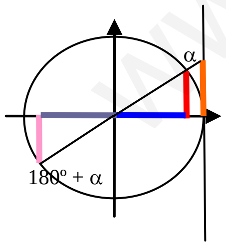
sen (– α) = – sen α
cos (– α) = cos α
tg (– α) = – tgα

Ángulos suplementarios: α y 180º–α



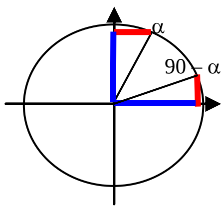
sen (180º – α) = sen α
cos (180º – α) = – cos α
tg (180º – α) = – tgα

Áng. que difieren en 180º: α y 180º+α



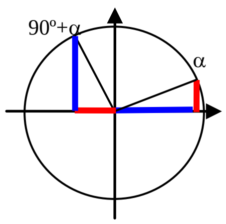
sen (180º +α) = – sen α
cos (180º +α) = – cos α
tg (180º +α) = tg α

Ángulos complementarios: α y 90º–α



sen (90º – α) = cos α
cos (90º – α) = sen α
tg (90º – α) = cotgα

Áng. que difieren en 90º: α y α + 90º

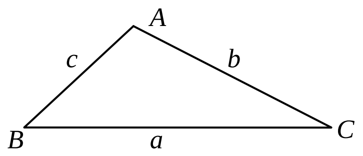


sen (90º + α) = cos α
cos (90º + α) = – sen α
tg (90º + α) = – cotg α

www.yoquieroaprobar.es

- ## Resolución de triángulos no rectángulos

Teorema de los senos

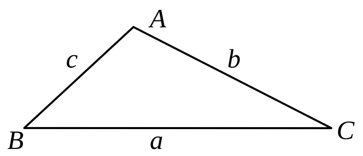


$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Observaciones relativas al Teorema de los senos:

1) Sirve para resolver un triángulo conocidos dos ángulos y un lado o dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
2) Cuando se calcula un ángulo hay, en principio, dos soluciones: α y $180^\circ - \alpha$. Hay que comprobar si ambas son válidas: La suma de los tres ángulos no puede superar 180º, y un triángulo tiene, a lo sumo, un solo ángulo obtuso.
3) Si en un problema determinado, para calcular un ángulo, podemos optar por aplicar el Teorema de los senos o el Teorema del coseno, hay que elegir siempre el del coseno (porque el de los senos puede aportar dos soluciones falsamente válidas en estos casos).

Teorema del coseno



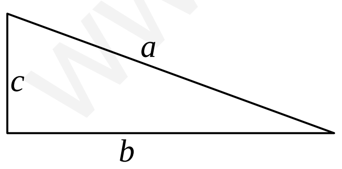
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\, c \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b \cos C$$

Observaciones relativas al Teorema del coseno:

1) Sirve para resolver un triángulo conocidos los tres lados o dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.
2) Si en un problema determinado, para calcular un ángulo, podemos optar por aplicar el Teorema de los senos o el Teorema del coseno, hay que elegir siempre el del coseno (porque el de los senos puede aportar dos soluciones falsamente válidas en estos casos).

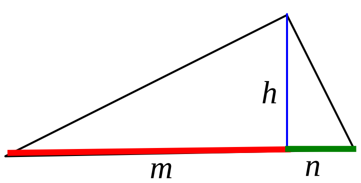
- ## Otras fórmulas útiles

Teorema de Pitágoras



Sólo en triángulos rectángulos:
$a^2 = b^2 + c^2$ (a es la *hipotenusa*)

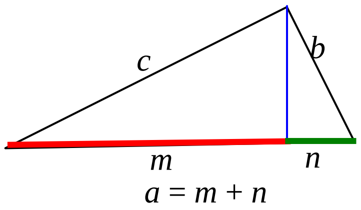
Teorema de la altura



Sólo en triángulos rectángulos:
$h^2 = m \cdot n$ ($a = m + n$ es la *hipotenusa*)

www.yoquieroaprobar.es

Teorema del cateto



Sólo en triángulos rectángulos:
$c^2 = m \cdot a$ (*a* es la *hipotenusa*)
$b^2 = n \cdot a$

Fórmula de Herón

Calcula el área de un triángulo <u>cualquiera</u> conocidos sus tres lados. Si llamamos p al *semiperímetro* del triángulo, esto es: $p = \frac{a+b+c}{2}$, se tiene:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Área de un triángulo

$$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

Longitud de la circunferencia

$$l = 2\pi r$$

Área del círculo

$$S = \pi r^2$$

www.yoquieroaprobar.es