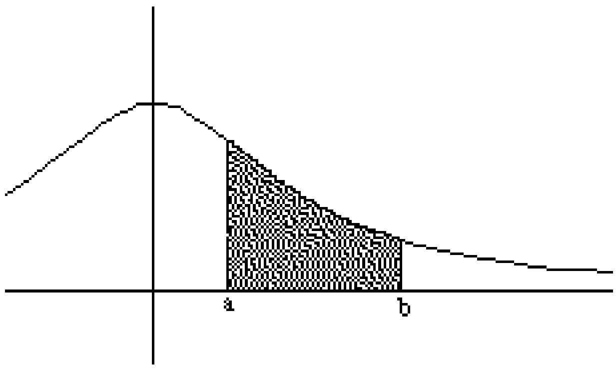
Capítulo 11

INTEGRACIÓN. CÁLCULO DE ÁREAS

11.1. Introducción

Si el problema del cálculo de la recta tangente llevó a los matemáticos del siglo XVII al desarrollo de las técnicas de la derivación, otro problema, el del cálculo del área encerrada por una curva, propició el desrrollo de las técnicas de integración.

Se trataba, por ejemplo, de hallar el área encerrada bajo la curva $f(x)$ entre los puntos a y b:



Se conocían fórmulas para recintos de forma igual a figuras geométricas(rectangulares, triangulares, e incluso algunas de curvas específicas), pero si la curva no tenía forma regular, no se conocía, en general, su área exacta.

El cálculo integral da respuesta a esta y otras cuestiones.

11.2. Primitivas. Integral indefinida

Dada un función $f(x)$, sabemos calcular su derivada $f'(x)$, e incluso sus derivadas sucesivas, $f''(x)$, $f'''(x)$, etc.

Sin embargo ahora nos planteamos el problema recíproco:

Dada una función $f(x)$, se trata de encontrar otra, $F(x)$, tal que al derivar esta última función, obtengamos la función inicial, es decir:

$$F'(x) = f(x)$$

Veamos un ejemplo:

Tomemos la función $f(x) = 2x$.

Se trata de encontrar una función $F(x)$ tal que al derivarla nos de $f(x)$.

Si pensamos un poco, llegamos a que tal función puede ser:

$$F(x) = x^2$$

pues su derivada es precisamente $f(x) = 2x$.

Ahora bien, no es $F(x)$ la única función que cumple eso.

Tomemos esta otra:

$$F(x) = x^2 + 43$$

También su derivada es $f(x) = 2x$.

Esto nos hace ver que no sólo hay una función que cumple lo requerido, sino infinitas, sin más que añadir cualquier número. Esto se expresa como:

$$F(x) = x^2 + C$$

Una función $F(x)$ como la que hemos encontrado se llama *primitiva* de $f(x)$, y hemos visto que si una función tiene una primitiva, entonces tiene infinitas.

Llamaremos *integral indefinida* de la función al conjunto de todas estas primitivas.

Lo representaremos, en el caso anterior, como:

$$\int 2x\, dx = x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Definición: Dada una función $f(x)$, se llama *primitiva* de $f(x)$ a otra función $F(x)$ tal que:

$$F'(x) = f(x)$$

Se denomina *integral indefinida* de $f(x)$ al conjunto de todas las primitivas (hay infinitas) de $f(x)$, y se representa por:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Así, el problema de calcular una primitiva de una función es inverso al de calcular una derivada; como son operaciones inversas la suma y la resta, el producto y el cociente, la potenciación y la radicación.

11.3. Primitivas inmediatas

De modo análogo al caso de las derivadas, debemos recordar algunas primitivas de las funciones más usuales:

$$1.-\int k\,dx = kx + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$2.-\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad ,n \in \mathbb{R}, \quad n \neq -1$$

$$3.-\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$4.-\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$5.-\int e^x\,dx = e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$6.-\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$7.-\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$8.-\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$9.-\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$10.-\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Estas primitivas permiten calcular algunas integrales sencillas.

Además es conveniente la utilización de las dos propiedades siguientes:

1. $$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

   Esta propiedad indica que si hay un número multiplicando a toda la integral, entonces se puede sacar fuera de la integral.

2. $$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

   Lo que indica esta propiedad es que si tenemos una suma (o resta) de dos funciones, entonces podemos separar la integral en la suma (o resta) de dos integrales.

Utilizando estas propiedades de manera combinada, se calculan las primeras integrales sencillas.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo: Calcular las integrales siguientes:

$$a)\ \int \sqrt{x}\,dx \quad b)\ \int (15x^4 + 10x^3 - 12x^2 - 8x + 5)\,dx \quad c)\ \int \left(\frac{2}{x} + e^x - 3\cos x\right)\,dx$$

Para la primera integral , expresamos la raíz en forma de potencia y utlizamos la integral inmediata 2:

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

En la segunda, separamos las sucesivas sumas y restas y sacamos los números fuera de las integrales, aplicando las propiedades de la integral para luego aplicar la integral inmediata 2 de nuevo:

$$\int (15x^4 + 10x^3 - 12x^2 - 8x + 5)\, dx = \int 15x^4\, dx + \int 10x^3\, dx - \int 12x^2\, dx - \int 8x\, dx + \int 5\, dx =$$
$$= 15\int x^4\, dx + 10\int x^3\, dx - 12\int x^2\, dx - 8\int x\, dx + \int 5\, dx = \frac{15x^5}{5} + \frac{10x^4}{4} - \frac{12x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 5x =$$
$$= 3x^5 + \frac{5x^4}{2} - 4x^3 - 4x^2 + 5x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Por último, volvemos a separar las integrales y los números y aplicamos la tabla de integrales inmediatas:

$$\int \left(\frac{2}{x} + e^x - 3\cos x\right)\, dx = \int \frac{2}{x}\, dx + \int e^x\, dx - \int 3\cos x\, dx =$$
$$= 2\int \frac{1}{x}\, dx + \int e^x\, dx - 3\int \cos x\, dx = 2\ln x + e^x - 3 \cdot \text{sen } x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ejercicio: Calcular las siguientes integrales:

$$a)\ \int \frac{5x^3 - 4x}{x^4}\, dx \quad b)\ \int \text{sen } x + 2\cos x + 3\, dx \quad c)\ \int (18x + 1)\, dx$$

$$d)\ \int (2x-1)^2(2x+1)\, dx \quad e)\ \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)\, dx \quad f)\ \int (x+2)^2\, dx \quad g)\ \int 2\sqrt[3]{x}\, dx$$

11.4. Integración por cambio de variable

A veces las integrales no son tan simples como las inmediatas, sino que hay pequeños detalles que nos impiden aplicar la tabla de primitivas.

Por ejemplo, podemos calcular sin problema la integral:

$$\int \text{sen } x\, dx = -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

pues es inmediata.

Sin embargo otra integral tan parecida y de aspecto simple como:

$$\int \text{sen } (2x + 6)\, dx$$

ya no la sabemos calcular porque no aparece en la tabla de primitivas inmediatas.

El razonamiento a utilizar en este caso es el siguiente:

Si en vez de tener en la integral anterior $2x + 6$, tuviésemos simplemente x, la integral sería inmediata. Por tanto, la idea es la siguiente, vamos a cambiar la variable x por otra nueva (que usualmente denotaremos por t) y que simplifica la tarea.

Llamaremos t a la variable que tiene la siguiente relación con x, en este caso:

$$t = 2x + 6$$

Ahora bien, se nos plantea otro problema. En la integral aparece el término dx (léase diferencial de x). Lo lógico es que si la integral tiene una nueva variable t, en vez de aparecer diferencial de x, aparezca diferencial de t, para no mezclar las variables.

Aunque pueda parecer una forma un poco artificial, daremos aquí la forma para calcular dt. Simplemente se deriva en la expresión del cambio de variable:

Derivando $t = 2x + 6$, se obtiene, $1 \cdot dt = 2 \cdot dx$, es decir que:

$$dx = \frac{dt}{2}$$

Una vez calculado esto, ya podemos calcular la integral:

$$\int \text{sen } (2x+6)\ dx \underset{\text{cambio}}{=} \int \text{sen } t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \text{sen } t \cdot\ dt = \frac{1}{2}(-\cos t) =$$
$$\underset{\text{deshacer el cambio}}{=} \frac{-1}{2} \cos (2x+6) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

El método del cambio de variable permite resolver de manera simple integrales que de otro modo no se podrían abordar.

Ejemplo:

$$\int e^{2x^3-5} x^2\ dx$$

Razonando como antes, se observa que la parte problemática de la integral está en el exponente de dicha integral.

Hacemos entonces el cambio:

$$t = 2x^3 - 5$$

y calculando el diferencial:

$$dt = 6x^2\ dx$$

de donde despejamos la parte que aparece en la integral:

$$x^2\ dx = \frac{dt}{6}$$

y por tanto la integral queda reducida a:

$$\int e^{2x^3-5} x^2\ dx \underset{\text{cambio}}{=} \int e^t \frac{dt}{6} = \frac{1}{6} \int e^t\ dt = \frac{1}{6} e^t \underset{\text{deshacer el cambio}}{=} \frac{1}{6} e^{2x^3-5} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ejemplo:

$$\int (6x^2 + 15x + 3)^{178} (12x + 15)\ dx$$

El cambio necesario en este caso es:

$$t = 6x^2 + 15x + 3$$

con lo que queda:

$$dt = 12x + 15\ dx$$

y por tanto la integral es:

$$\int (6x^2 + 15x + 3)^{178} (12x + 15)\ dx = \underset{\text{cambio}}{=} \int t^{178}\ dt = \frac{t^{179}}{179} =$$
$$\underset{\text{deshacer el cambio}}{=} \frac{(6x^2 + 15x + 3)^{179}}{179} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ejercicios: Calcula mediante integración por cambio de variable las siguientes integrales:

$$a)\ \int \frac{3x^2-2x}{x^3-x^2+3}\,dx \quad \text{Cambio:} t=x^3-x^2+3 \quad b)\ \int \cos\left(x^2+1\right)\ 2x\,dx \quad c)\ \int 5\text{sen }(3x+1)\,dx$$

$$d)\ \int \cos\left(\frac{2x+1}{3}\right)dx \quad e)\ \int e^{x+2}\,dx \quad f)\ \int (x-4)^{\frac{5}{7}}\,dx \quad g)\ \int \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$h)\ \int \frac{1+\cos x}{x+\text{sen }x}\,dx \quad i)\ \int xe^{x^2}\,dx \quad j)\ \int \frac{1}{(x+2)^3}\,dx$$

11.5. Determinación de una primitiva particular de una función

Ya hemos visto que si una función tiene una primitiva, entonces tiene infinitas, lo que representamos añadiendo la constante C al cálculo de la integral.

Ahora bien, si queremos determinar una primitiva concreta de entre todas esas infinitas, necesitamos un dato más, como por ejemplo, un punto por el que pase dicha función.

Ejemplo: Calcular la primitiva de la función:

$$f(x) = x^3 - 2x + 5$$

que pasa por el punto $(1,3)$.

Calculamos en primer lugar todas las primitivas de $f(x)$, es decir la integral indefinida:

$$\int x^3-2x+5\,dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2} + 5x = \frac{x^4}{4} - x^2 + 5x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

De todas estas primitivas, la única que cumple que pasa por el $(1,3)$, es aquella tal que:

$$\frac{1^4}{4} - 1^2 + 5\cdot 1 + C = 3$$

es decir

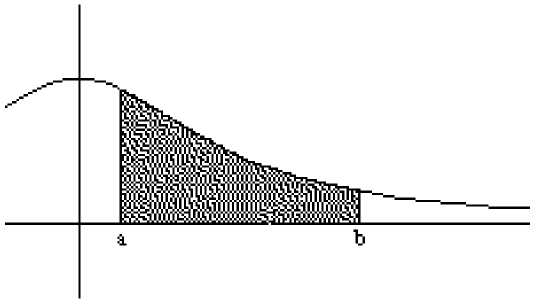
$$\frac{1}{4} - 1 + 5 + C = 3 \Longrightarrow \frac{17}{4} + C = 3 \Longrightarrow C = \frac{-5}{4}$$

y por tanto la primitiva buscada es:

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 5x - \frac{5}{4}$$

11.6. El problema del cálculo del área

Ya se dijo que el desarrollo del cálculo integral en buena medida se debe al problema de calcular áreas de funciones como esta:



Una aproximación para calcular el área consiste en dividir el intervalo en otros más pequeños y calcular el área de los rectángulos que se forman bien al tomar el valor de la función en un extremo del intervalo, bien en otro entremo, es decir:

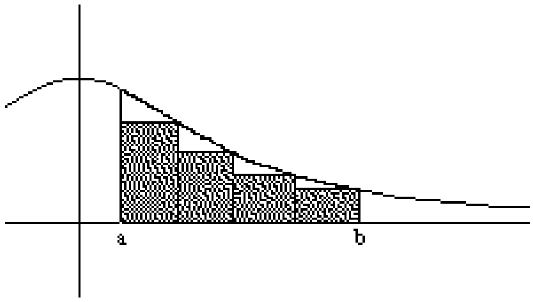


Figura 11.1: Aproximación del área mediante rectángulos más pequeños que la función

En este caso, hemos dividido el intervalo mayor en 4 subintevalos más pequeños y hemos tomado como altura de los rectángulos el valor de la función en el extremo superior del intervalo.

Así la suma de las áreas de los rectángulos son más pequeñas que el área buscada.

Área suma rectángulos< Área de la función

Esta suma, en la que la suma de las áreas de los rectángulos es menor que el área total se denomina *suma inferior* de la función en el intervalo.

Pero podríamos haber tomado estos otros rectángulos:

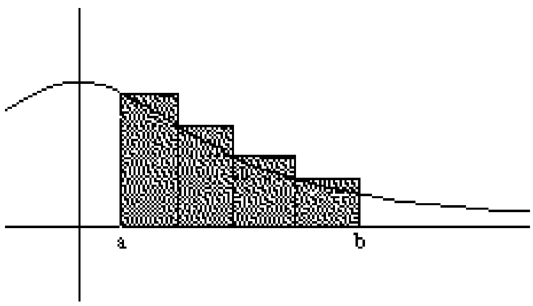


Figura 11.2: Aproximación del área mediante rectángulos más grandes que la función

Ahora la suma del área de los rectángulos es mayor que el área total, es decir:

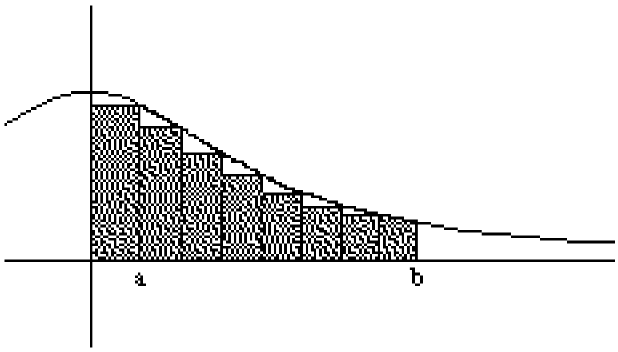
Área de la función$<$ Área suma rectángulos

Esta suma, en la que la suma de las áreas de los rectángulos es mayor que el área total se denomina *suma superior* de la función en el intervalo.

Por tanto, el área buscada está entre la suma superior y la suma inferior de la función:

Suma inferior$\leq$ Área$\leq$ Suma superior

Además, obervemos lo que ocurre cuando los subintervalos que tomamos son cada vez menores:



Vemos que las sumas inferiores son cada vez mayores y cada vez más cercanas al área buscada, a medida que los intervalos son más pequeños.

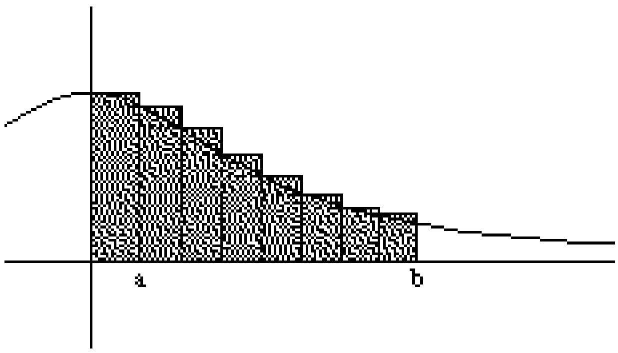


Figura 11.3: La aproximación se mejora al aumentar el número de rectángulos

Por contra, las sumas superiores son cada vez más pequeñas y también cada vez más cercanas al área buscada, a medida que los intervalos son más pequeños.

A medida que los subintervalos son menores, las sumas superiores e inferiores se acercan al área buscada. Para llegar a calcular dicha área, necesitamos calcular una suma infinita (la de los infinitos rectángulos a medida que estos son más pequeños), cosa que en matemáticas se denomina *sumar una serie*.

Esto excede con mucho los contenidos del curso. Lo que se necesita saber es que tanto las sumas superiores como las sumas inferiores convergen (se acercan) al área buscada, y dicha suma se representa, si la función es $f(x)$ y el intervalo es $[a, b]$, por la integral:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Ahora bien, el siguiente problema es cómo se calcula esta integral, pues en las integrales indefinidas no habíamos incluido ningún intervalo.

11.7. La integral definida. La regla de Barrow

Se denomina *integral definida* de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ a la expresión:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

La integral definida posee las mismas propiedades que la definida, es decir:

1.
$$\int_a^b k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

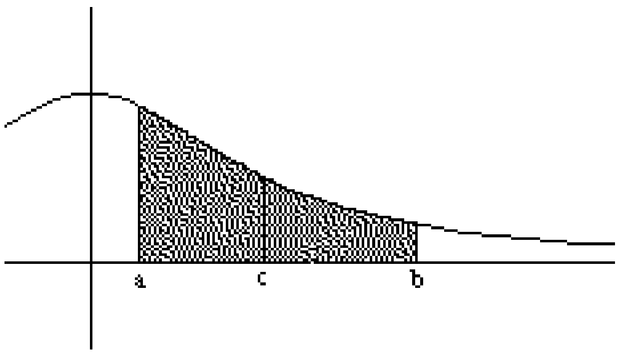
2.
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$

La integral definida, puesto que representa, si la función es positiva, el área que encierra la función con el eje x, tiene algunas propiedades tales como:

1. Si c es un punto que está dentro del intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

En otras palabras, el área de la función desde a hasta b es la suma de las áreas de la función desde a hasta c y desde c hasta b, si la función es positiva.



2. Si calculamos la integral de derecha a izquierda ,en vez de izquierda a derecha se cumple:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

3. La integral cuando el intervalo se reduce a un punto es cero:

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

Pero sin duda la propiedad más importante, y que permite calcular integrales definidas es la llamada Regla de Barrow.

Regla de Barrow: Si $f(x)$ es una función que tiene primitiva $F(x)$, y queremos calcular su integral definida en un intervalo $[a, b]$, se cumple que:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)}$$

Ejemplo: Calcular la integral definida:

$$\int_1^3 x^2 \, dx$$

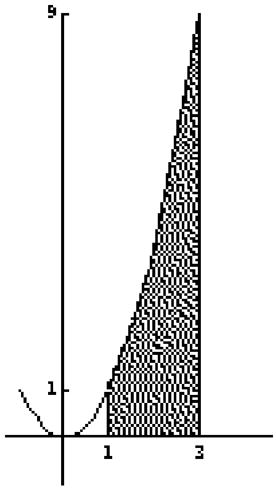
e interpretar el resultado geométricamente.

Aplicando la regla de Barrow, queda:

$$\int_1^3 x^2 \, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=3} = \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{26}{3} \approx 8'67 \;\; u^2$$

donde u^2 representa unidades de área.

Geométricamente es el área representada en la figura:



Ejercicio: Utilizando la regla de Barrow, calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_1^3 (2x^3 - 4x^2 + 5x - 2) \, dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-1}^4 (3x+1)^2 \, dx$ *c)* $\displaystyle\int_2^4 (2x^4 - 3x^2 - 7) \, dx$ *d)* $\displaystyle\int_{-2}^1 (x+1)(x-2) \, dx$

11.8. Aplicaciones de la integral definida al cálculo de áreas de recintos planos

La aplicación de la integral definida para el cálculo de áreas depende de cómo sea la función en el intervalo concreto. Se pueden presentar los siguientes casos:

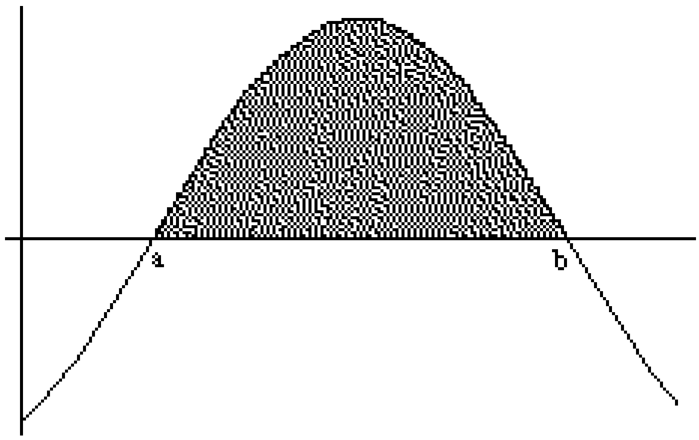
11.8.1. Áreas limitadas por una función y el eje x

1. La función es siempre positiva siempre en el intevalo: En este caso el área simplemente viene dada por:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\, dx$$

   donde a y b son los puntos entre los que queremos calcular el área, y que habitualmente son los puntos de corte de la función con el eje x.

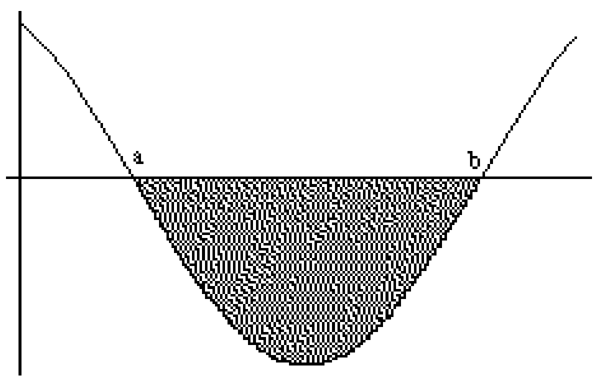
   Geométricamente:



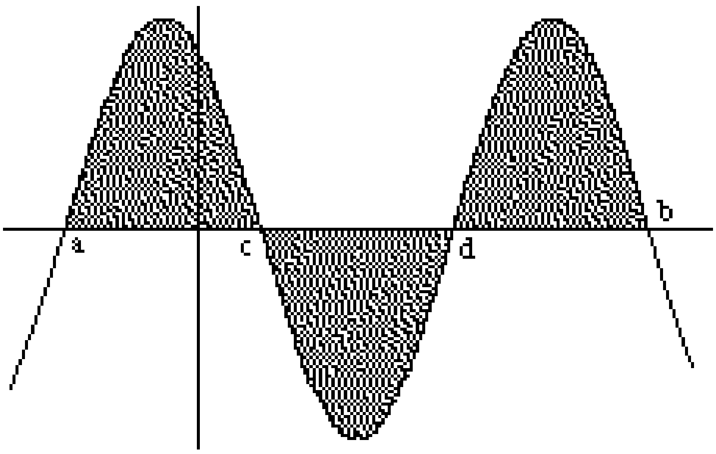
2. La función se siempre negativa dentro del intervalo: En este caso el área viene dada por:

$$\text{Área} = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$$

   Geométricamente:



3. Si la función es a veces positiva y a veces negativa en el intervalo, se calculan los puntos de corte y se calculan las integrales sucesivas, utilizando los apartados anteriores:



En la figura, sería:

$$\text{Área} = \int_a^c f(x)\ dx + \left| \int_c^d f(x)\ dx \right| + \int_d^b f(x)\ dx$$

En cualquier caso, y cuando calculemos áreas, siempre es conveniente comenzar por calcular los puntos de corte de la función con el eje x para saber si es positiva o negativa y calcular las integrales correspondientes, o bien utilizar siempre el valor absoluto para asegurarnos de que el resultado es positivo.

Ejemplo: Calcular el área que encierra con el eje x la gráfica de la función:

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$$

No hace falta dibujar la gráfica.

Calculamos los puntos de corte con el eje x:

$$x^3 - 7x^2 + 10x = 0 \Longrightarrow x(x^2 - 7x + 10) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = 0, \quad x = 2, \quad x = 5$$

Corta al eje x en $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(5, 0)$.

Veamos cómo es la función entre 0 y 2. Tomamos un valor situado en ese intervalo y lo sustituimos en la función. Se obtiene:

$$f(1) = 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 1 - 7 + 10 = 4$$

como 4 es positivo, significa que la función es positiva en ese intervalo, luego el área será:

$$\text{Área} = \int_0^2 x^3 - 7x^2 + 10x\ dx = \left(\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^3}{3} + 10\frac{x^2}{2} \right) \Bigg]_{x=0}^{x=2} =$$

$$= \left(\frac{2^4}{4} - 7\frac{2^3}{3} + 10\frac{2^2}{2} \right) - \left(\frac{0^4}{4} - 7\frac{0^3}{3} + 10\frac{0^2}{2} \right) = 4 - \frac{56}{3} + 20 = \frac{16}{3}\ \ u^2$$

En el otro intervalo, entre el 2 y el 5, tomamos otro valor para saber si la función es positiva o negativa:

$$f(3) = 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 = 27 - 63 + 30 = -6$$

la función es negativa en el intervalo, luego el área será:

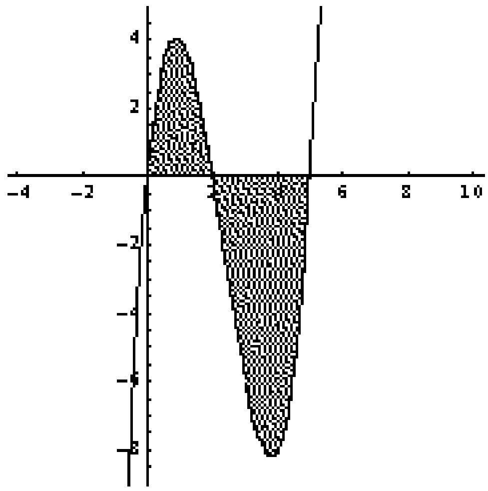
$$\text{Área} = \left|\int_2^5 x^3 - 7x^2 + 10x\,dx\right| = \left|\left(\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^3}{3} + 10\frac{x^2}{2}\right)\right]_{x=2}^{x=5}\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{5^4}{4} - 7\frac{5^3}{3} + 10\frac{5^2}{2}\right) - \left(\frac{2^4}{4} - 7\frac{2^3}{3} + 10\frac{2^2}{2}\right)\right| = \left|\left(\frac{-125}{12} - \frac{16}{3}\right)\right| = \left|\frac{-63}{4}\right| = \frac{63}{4}\ u^2$$

En total el área pedida será:

$$\frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}\ u^2 \approx 21'08\ u^2$$

Gráficamente:



Observa lo importante que es diferenciar los dos intervalos, pues si simplemente hubiésemos calculado, sin más:

$$\int_0^5 x^3 - 7x^2 + 10x\,dx$$

sin separar, el resultado sería:

$$\int_0^5 x^3 - 7x^2 + 10x\,dx = -10'42$$

(Compruébala) que no es el área buscada, sino la diferencia entre las áreas.

Desde luego, si es posible, es mejor hacer un dibujo para saber como va la gráfica y determinar el área a calcular.

Ejercicio: Calcula las áreas encerradas por el eje x y las funciones siguientes:

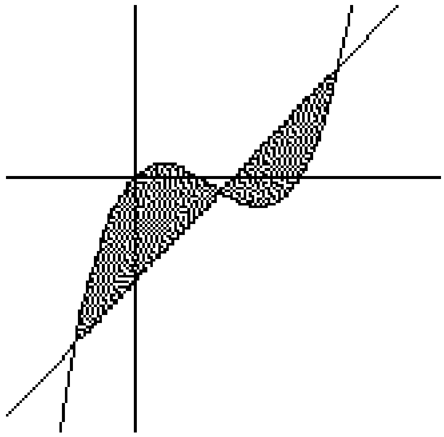
a) $f(x) = x - x^3$

b) $g(x) = -x^2 + 9$

c) $h(x) = x^2 - 2x - 3$ entre x=1 y x=5.

11.8.2. Áreas limitadas por dos funciones

También es posible aplicar las integrales definidas para el cálculo de áreas de recintos limitados por dos curvas, por ejemplo el de la figura:



Si las curvas son $f(x)$ y $g(x)$ se cumple que el área limitada por las dos curvas en el intervalo $[a, b]$ es:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

siempre que $f(x)$ esté por encima de $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Si las curvas se cortan en el intervalo, se subdivide el intervalo en otros menores, en cada uno de los cuales se aplican la integral anterior, determinando qué curva está por encima, y se suma el resultado.

En todo caso siempre es necesario hallar los puntos de corte entre las curvas, que se calculan igualando las expresiones algebraicas de ambas funciones:

$$f(x) = g(x)$$

y resolviendo la ecuación resultante.

Ejemplo: Calcular el área limitada por las curvas $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 4x - 4$.

Comenzamos calculando los puntos de corte de las funciones:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 1 = 4x - 4 \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

Las funciones se cortan en los puntos 1 y 3.

Veamos qué función está por encima y cuál por debajo en ese intervalo.

Dando un valor intermedio, por ejemplo el 2:

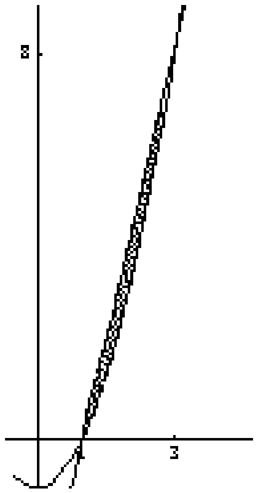
$$f(2) = 2^2 - 1 = 3 \quad g(2) = 8 - 4 = 4$$

Como el valor de $g(x)$ es mayor, significa que $g(x)$ está por encima de $f(x)$ en el intervalo, de modo que el valor del área será el dado por la integral definida:

$$\text{Área} = \int_1^3 (g(x) - f(x))\, dx = \int_1^3 (4x - 4 - (x^2 - 1))\, dx = \int_1^3 4x - 3 - x^2\, dx =$$

$$= \left(2x^2 - 3x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{x=1}^{x=3} = (18 - 9 - 9) - \left(2 - 3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\;\; u^2 \approx 1'33\;\; u^2$$

Si se hace un dibujo, lo cuál es sencillo porque se trata de una recta y una parábola:



Ejercicio: Calcular el área encerrada por las curvas:
a) $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 6x - x^2$
b) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$
c) $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x$

11.9. Otras aplicaciones de las integrales

Las aplicaciones de las integrales a las Ciencias Sociales se relacionan con las de las derivadas.

Sabemos, por ejemplo, que si cierta función $I(x)$, es la función de ingresos de una determinada empresa, la función de ingresos marginal es su derivada $I'(x)$.

Las integrales, al ser la operación recíproca, permiten calcular la función de ingresos conocida la de ingresos marginal, es decir:

$$\int I'(x)\, dx = I(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(Lo mismo si la función es de coste o de beneficio, etc).

Por tanto, en general, conociendo la función de cambio (o crecimiento) de cualquier proceso, integrando se puede conocer la función que mide dicho proceso.

Ejemplo: El ritmo de crecimiento de la población de palomas en una ciudad viene dado por la función:

$$f(x) = 2x - 0'5x^2$$

x en años a partir del actual y $f(x)$ en miles de palomas.

Actualmente hay 2500 palomas.

a) ¿Cuántas habrá dentro de x años?

b) ¿En cuánto aumentará la población durante el segundo semestre a partir del momento actual?

c) ¿Hasta cuando aumenta la población de palomas?. ¿Qué número máximo alcanza?.

a) Como conocemos la función de crecimiento, la función que da el número total de palomas será una primitiva de ésta:

$$F(x) = \int f(x)\, dx = \int 2x - 0'5x^2\, dx = x^2 - \frac{1}{6}x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Para determinar C, sabemos que la población de palomas ahora mismo es de 2500, es decir:

$$F(0) = 2'5$$

luego sustituyendo:

$$0^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 + C = 2'5 \Longrightarrow C = 2'5$$

La población de palomas sigue una función:

$$F(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^3 + 2'5$$

b) El segundo semestre, x va desde $0'5$ hasta 1, y el aumento de palomas será:

$$F(1) - F(0'5) = \frac{20}{6} - \frac{131}{48} = \frac{29}{49} = 0'604$$

es decir, 604 palomas (recuerda que la función viene dada en miles de palomas).

c) Calculamos los máximos y mimimos de $F(x)$.

Como:

$$F'(x) = f(x)$$

resulta que igualamos $f(x) = 0$, y queda:

$$2x - 0'5x^2 = 0 \Longrightarrow x(2 - 0'5x) = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = 4$$

Para saber si son máximos o mínimos, con la derivada segunda:

$$F''(x) = 2 - x$$

luego:

$$F''(0) = 2$$

$x = 0$ es un mínimo y:

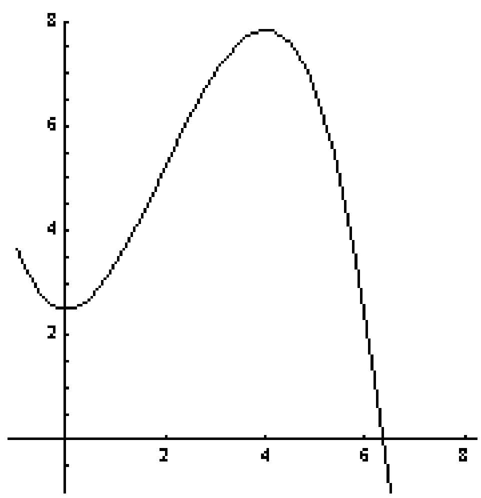
$$F''(4) = -2$$

$x = 4$ es un máximo, luego a lo sumo, la población de palomas se dará a los 4 años a partir de ahora, es decir:

$$F(4) = 4^2 - \frac{1}{6}4^3 + 2'5 = 16 - \frac{64}{6} + 2'5 = 7'833$$

aproximadamente 7833 palomas.

La gráfica de F(x) es:



Ejercicios:

1. Supongamos que dentro de x meses la población de tu ciudad crecerá a razón de $5+4\sqrt{x}$ personas por mes.

   Si la población actual es de 7500 personas.

   a) ¿Cuál será la población dentro de un año?

   b) ¿En cuántos habitantes aumentará durante el segundo año?

   c) ¿Llegará a algún máximo su número de habitantes?.

2. Halla la función de beneficio de una empresa, $B(x)$, sabiendo que los costes e ingresos marginales , $c(x)$ e $i(x)$, vienen dados respectivamente por las funciones:

$$c(x) = 0'04x + 4 \qquad i(x) = 200 - 2x$$

   con $C(0) = 80$, siendo $C(x)$ la función de coste.