Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Ejercicio 1

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas (se deja el doble de espacio para que hagas las comprobaciones):

$a)$ $2\log x - \log(x+6) = 0$ Al haber sólo dos logaritmos, intentaremos la operación de quitarlos; para ello, ponemos la ecuación en la forma: $\boxed{\log A = \log B}$

$\log x^2 = \log(x+6)$; quitando logaritmos: $x^2 = x+6$; al resolver la ecuación de 2º grado se obtienen estos dos resultados: $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$.

No existen los logaritmos de números negativos, por tanto, ignoramos la primera de las soluciones. $\boxed{x=3}$

$b)$ $\log(x+1) - \log x = 1$ $\qquad \log\frac{(x+1)}{x} = \log 10$; $\boxed{x = \frac{1}{9}}$

$c)$ $\log(x+6) = 1 + \log(x-3)$ $\qquad \log(x+6) = \log 10(x-3)$; $\boxed{x=4}$

$d)$ $\log(3x+5) - \log(2x+1) = 1 - \log 5$ $\qquad \log\frac{3x+5}{2x+1} = \log\frac{10}{5}$; $\boxed{x=3}$

$e)$ $\log(x-1) - \log\sqrt{5+x} - \log\sqrt{5-x} = 0$; evitamos el problema de las dos restas poniendo un paréntesis y cambiando el signo del segundo logaritmo:

$\log(x-1) - \left(\log\sqrt{5+x} + \log\sqrt{5-x}\right) = 0$; $\log(x-1) - \log\left(\sqrt{5+x}\cdot\sqrt{5-x}\right) = 0$

$\log(x-1) - \log\left(\sqrt{25-x^2}\right) = 0$; $\log(x-1) = \log\left(\sqrt{25-x^2}\right)$; $x-1 = \sqrt{25-x^2}$;

$x^2 - 2x + 1 = 25 - x^2$; $2x^2 - 2x - 24 = 0$; $x^2 - x - 12 = 0$;

soluciones: $x_1 = -3$ y $x_2 = 4$; la única solución válida es: $\boxed{x=4}$

(Sigue →)

(Continuación)

$f)\quad \log 2+\log\left(11-x^2\right)=2\log(5-x)$

$\log\left[2\left(11-x^2\right)\right]=\log(5-x)^2$;

$22-2x^2=25-10x+x^2$

$3x^2-10x+3=0$; $\boxed{x_1=\frac{1}{3}}$; $\boxed{x_2=3}$

$g)\quad \log\left(3-x^2\right)=\log 2+\log x$

$3-x^2=2x$; $x^2+2x-3=0$

Soluciones: $x_1=-3$; $x_2=1$; Válida: $\boxed{x=1}$

$h)\quad 2\log x-\log\left(x^2-6\right)=1$

$\frac{x^2}{x^2-6}=10$; $9x^2-60=0$; $\boxed{x=+\sqrt{\frac{20}{3}}}$

Hacer la COMPROBACIÓN

$2\log\sqrt{\frac{20}{3}}-\log\left(\frac{20}{3}-6\right)=1$; $2\log\left(\frac{20}{3}\right)^{\frac{1}{2}}-\log\left(\frac{20-18}{3}\right)=1$;

$2\frac{1}{2}\log\frac{20}{3}-\log\frac{2}{3}=1$; $\log 20-\log 3-\log 2+\log 3=1$; $\log 20-\log 2=1$;

$\log(10\cdot 2)-\log 2=1$; $\log 10+\log 2-\log 2=1$; $\log 10=1$ evidente.

$i)\quad \log(5x+4)-\log 2=\frac{1}{2}\log(x+4)$; Aplicamos propiedades de los logaritmos:

$\frac{5x+4}{2}=\sqrt{x+4}$; $25x^2+40x+16=4x+16$; $25x^2+36x=0$; cuyas soluciones son:

$x_1=0$; $x_2=-\frac{36}{25}$; Válida: $\boxed{x_1=0}$

Hacer la COMPROBACIÓN

$\log 4-\log 2=\frac{1}{2}\log 4$; $\log\frac{4}{2}=\log 4^{\frac{1}{2}}$; $\log 2=\log\sqrt{4}$; evidente.

Ejercicio 2

Despeja en valor de ***x*** en $\log x - \log y = \log(x-y)$

$\log \frac{x}{y} = \log(x-y)$; $\frac{x}{y} = x-y$; $x = xy - y^2$; $x - xy = -y^2$; $x(1-y) = -y^2$

Solución: $\boxed{x = \frac{y^2}{y-1}}$

Ejercicio 3

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$a)$ $3 \cdot 5^x = 75$ *(Ecuación 3 anterior)* $5^x = 25$; $\boxed{x=2}$

$b)$ $25^{2x-2} = 5$ $5^{2(2x-2)} = 5$; $5^{4x-4} = 5^1$; por tanto: $4x-4=1$; $\boxed{x = \frac{5}{4}}$

$c)$ $7^{-3x-10} - 7^{5x+6} = 0$ $7^{-3x-10} = 7^{5x+6}$; por tanto: $-3x-10 = 5x+6$; $\boxed{x=-2}$

$d)$ $32^{7x-11} = 4^{5x+10}$ $2^{35x-55} = 2^{10x+20}$; $35x-55 = 10x+20$; $\boxed{x=3}$

$e)$ $25^{-2x-2} = 1$ $5^{-4x-4} = 5^0$; $-4x-4=0$; $\boxed{x=-1}$

$f)$ $27^{4x+9} = 81^{8x-7}$ $3^{12x+27} = 3^{32x-28}$; $12x+27 = 32x-28$; $\boxed{x = \frac{11}{4}}$

$g)$ $9^{-2x-2} - 1 = 0$ $9^{-2x-2} = 9^0$; $-2x-2=0$; $\boxed{x=-1}$

Ejercicio 4

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$a)\quad 2^{x+1}+2^{x}=3$

$2^{x}\left(2+1\right)=3\,;\; 2^{x}=1\,;\; 2^{x}=2^{0}\,;\; \boxed{x=0}$

$b)\quad 3^{-x+1}+3^{-x+2}=324$

$3^{-x}\left(3+3^{2}\right)=324\,;\; 3^{-x}\left(12\right)=324\,;$

$3^{-x}=27\,;\; 3^{-x}=3^{3}\,;\; \boxed{x=-3}$

$c)\quad 3^{x+2}+3^{x+1}+3^{x}+3^{x-1}=120$ *(Ecuación 6 anterior)*

$$3^{x}\left(3^{2}+3+1+\frac{1}{3}\right)=120\,;\; 3^{x}\left(\frac{39+1}{3}\right)=120\,;$$

$$3^{x}=\frac{120\cdot 3}{40}\,;\; 3^{x}=3^{2}\,;\; \boxed{x=2}$$

$d)\quad 3^{3x-2}+3^{3x}=10$

$$3^{3x}\left(3^{-2}+1\right)=10\,;\; 3^{3x}\left(\frac{1}{9}+1\right)=10\,;$$

$$3^{3x}\left(\frac{1+9}{9}\right)=10\,;\; 3^{3x}=\frac{10\cdot 9}{10}\,;\; 3x=2\,;\; \boxed{x=\frac{2}{3}}$$

$e)\quad 4^{-x-1}-4^{-x-2}+4^{-x-1}=112$

$$4^{-x}\left(4^{-1}-4^{-2}+4^{-1}\right)=112\,;\; 4^{-x}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right)=112$$

$$4^{-x}\left(\frac{8-1}{16}\right)=112\,;\; 4^{-x}=\frac{112\cdot 16}{7}\,;\; 4^{-x}=256\,;\; 4^{-x}=4^{4}\,;\; \boxed{x=-4}$$

Ejercicio 5

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$a)\quad 5^{2x}-6\cdot 5^{x}+5=0$

$5^{x^{2}}-6\cdot 5^{x}+5=0$; Cambio: $\boxed{5^{x}=t}$;

$t^{2}-6\cdot t+5=0\,;\; \boxed{t_1=1;\; t_2=5}$

Se deshace el cambio: para $t_1=1\Rightarrow 5^{x}=1\Rightarrow \boxed{x=0}$

Se deshace el cambio: para $t_2=5\Rightarrow 5^{x}=5\Rightarrow \boxed{x=1}$

(Sigue $\rightarrow$)

(Continuación)

$b)$ $4^{2x}-6\cdot 2^{2x}+8=0$; $\left(2^2\right)^{2x}-6\cdot 2^{2x}+8=0$; $\left(2^{2x}\right)^2-6\cdot 2^{2x}+8=0$;

Cambio: $\boxed{2^{2x}=t}$; $t^2-6\cdot t+8=0$; $\boxed{t_1=2;\ t_2=4}$

Se deshace el cambio: para $t_1=2\Rightarrow 2^{2x}=2\Rightarrow 2x=1\Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$

Se deshace el cambio: para $t_2=4\Rightarrow 2^{2x}=4=2^2\Rightarrow 2x=2\Rightarrow \boxed{x=1}$

$c)$ $7^{12x}-8\cdot 7^{6x}+7=0$ $7^{(6x)^2}-8\cdot 7^{6x}+7=0$; Cambio: $\boxed{7^{6x}=t}$;

$t^2-8\cdot t+7=0$; $\boxed{t_1=1;\ t_2=7}$

Se deshace el cambio: para $t_1=1\Rightarrow 7^{6x}=1=7^0\Rightarrow 6x=0\Rightarrow \boxed{x=0}$

Se deshace el cambio: para $t_2=7\Rightarrow 7^{6x}=7\Rightarrow 6x=1\Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{6}}$

$d)$ $6^{4x+1}-7\cdot 6^{2x}+1=0$ $6\cdot 6^{(2x)^2}-7\cdot 6^{2x}+1=0$; Cambio: $\boxed{6^{2x}=t}$;

$6t^2-7\cdot t+1=0$; $\boxed{t_1=\frac{1}{6};\ t_2=1}$

Se deshace el cambio: para $t_1=\frac{1}{6}\Rightarrow 6^{2x}=6^{-1}\Rightarrow 2x=-1\Rightarrow \boxed{x=\frac{-1}{2}}$

Se deshace el cambio: para $t_2=1\Rightarrow 6^{2x}=1=6^0\Rightarrow \boxed{x=0}$

Ejercicio 6

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$a)$ $5^x=10$ *(Ecuación 5)* $\log_5 5^x=\log_5 10$; $x\cdot\log_5 5=\log_5 10$

$x=\log_5 10$; $\boxed{x=1'4307}$

$b)$ $2^{5x+3}=1000$ $\log_2 2^{5x+3}=\log_2 10^3$;

$(5x+3)\log_2 2=3\log_2 10$; $5x+3=3\log_2 10$

$x=\frac{3\log_2 10-3}{5}$; $\boxed{x=1'3932}$

Ejercicio 7

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales (ahora no están incluidas en ningún apartado); deberás deducir cuál es el método de resolución que mejor se adecua a cada ecuación:

$a)$ $5^{-3x+1}+5^{-3x}=6$

Sacamos factor común: $5^{-3x}\left(5+1\right)=6$;

$5^{-3x}=1$; $5^{-3x}=5^{0}$; $-3x=0$; $\boxed{x=0}$

$b)$ $10^{\frac{3x-1}{2x+1}}=100$

Igualamos las bases: $10^{\frac{3x-1}{2x+1}}=10^{2}$; $\dfrac{3x-1}{2x+1}=2$

$3x-1=2\left(2x+1\right)$; $3x-1=4x+2$; $\boxed{x=-3}$

$c)$ $3^{2(x+1)}-18\cdot3^{x}+9=0$

Se opera en el lado izquierdo:

$3^{2x}\cdot3^{2}-18\cdot3^{x}+9=0$; $9\left(3^{x}\right)^{2}-18\cdot3^{x}+9=0$;

Cambio : $\boxed{3^{x}=t}$; $9t^{2}-18t+9=0$;

dividimos por 9: $t^{2}-2t+1=0$; $\boxed{t=1}$

Se deshace el cambio: para $t=1\Rightarrow 3^{x}=1=3^{0}\Rightarrow$ $\boxed{x=0}$

$d)$ $5^{x^{2}-3x}=800$

$\log_{5}5^{x^{2}-3x}=\log_{5}800$; $\left(x^{2}-3x\right)\log_{5}5=\log_{5}800$

$x^{2}-3x=\log_{5}800$; $x^{2}-3x-\log_{5}800=0$;

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+4\cdot\log_{5}800}}{2}=\begin{cases}\boxed{x_{1}=4'0305}\\ \boxed{x_{2}=-1'0305}\end{cases}$$

$e)$ $2^{-8x+2}-3\cdot2^{-4x}-1=0$

$4\cdot2^{(-4x)^{2}}-3\cdot2^{-4x}-1=0$; Cambio : $\boxed{2^{-4x}=t}$;

$4t^{2}-3t-1=0$; $\boxed{t_{1}=\dfrac{-1}{4};\ t_{2}=1}$

Se deshace el cambio: para $t_{1}=\dfrac{-1}{4}\Rightarrow 2^{-4x}=\dfrac{-1}{4}\Rightarrow$

No hay solución: el resultado de una potencia de base positiva no puede ser negativo

Se deshace el cambio: para $t_{2}=1\Rightarrow 2^{-4x}=1=2^{0}\Rightarrow$ $\boxed{x=0}$

(Sigue $\rightarrow$)

(Continuación)

$f)$ $0'4^{x-1} = 6'25^{6x-5}$

Igualamos las bases: $\left(\frac{4}{10}\right)^{x-1} = \left(\frac{625}{100}\right)^{6x-5}$;

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{5^4}{2^2 \cdot 5^2}\right)^{6x-5} ; \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2(6x-5)}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{-x+1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2(6x-5)} ; -x+1 = 12x-10 ; \boxed{x = \frac{11}{13}}$$

$g)$ $2^{2x+1} - 2^{2x+2} = -4$

Sacamos factor común: $2^{2x}\left(2-2^2\right) = -4$;

$$2^{2x}(-2) = -4 ; 2^{2x} = 2^1 ; 2x = 1 ; \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Ejercicio 8

Resuelve los siguientes sistemas:

$a)$

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y=64 \\ \log x - \log y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} 3x+2y=64 \\ x/y = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 3x+2y=64 \\ \rightarrow \quad x = 10y \end{array} \Big\} e_2 \text{ en } e_1$$

$$3(10y)+2y = 64 ; 32y = 64 ; \boxed{x = 20; y = 2}$$

$b)$

$$\left.\begin{array}{r} x-y=9 \\ \log x + \log y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x-y=9 \\ \rightarrow \quad xy=10 \end{array} \Big\} \begin{array}{l} \rightarrow \quad x = 9+y \\ \rightarrow xy = 10 \end{array} \Big\} e_1 \text{ en } e_2 : (9+y)y = 10$$

$$9y + y^2 = 10 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{y_1 = 1; \quad x_1 = 10} \\ \boxed{y_2 = -10; \quad x_2 = -1} \end{array}\right.$$

Se descarta la segunda solución por no existir logaritmos de números negativos; por tanto: $\boxed{x = 10; \quad y = 1}$

$c)$

$$\left.\begin{array}{r} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{array}\right\} \log x = 2 \rightarrow x = 100$$

$$2\log x \qquad = 4$$

$$2 + \log y = 3 ; \log y = 1 ; \boxed{x = 100; \quad y = 10}$$

(Sigue →)

(Continuación)

$d)$ $\left.\begin{array}{r} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{c}\text{Cambio de variable} \\ \log x = u; \quad \log y = v\end{array}\Bigg\}$ $\left.\begin{array}{r} 2u - 3v = 7 \\ u + v = 1 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} 2u - 3v = 7 \\ -2u - 2v = -2 \end{array}\right\} \quad v = -1; \quad u = 2$$
$$\overline{\quad -5v = 5 \quad}$$

Se deshace el cambio: $\begin{array}{l} \log x = u = 2; \\ \log y = v = -1; \end{array}$ $\boxed{x = 100; \quad y = 10^{-1}}$

$e)$ $\left.\begin{array}{r} \log x + 5\log y = 7 \\ \log \dfrac{x}{y} = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} \log x + 5\log y = 7 \\ \log x - \log y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \xrightarrow{(-1)} \end{array} \left.\begin{array}{r} \log x + 5\log y = 7 \\ -\log x + \log y = -1 \end{array}\right\}$

$$6\log y = 6$$

Si $\log y = 1 \Rightarrow \boxed{y = 10}$; sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación:

$\log x + 5\log 10 = 7; \quad \log x + 5\cdot 1 = 7; \quad \log x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 100}$

La comprobación es inmediata.

$f)$ $\left.\begin{array}{r} 2\log x + \log y = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 2\log x + \log y = 5 \\ \log x + \log y = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \xrightarrow{(-1)} \end{array} \left.\begin{array}{r} 2\log x + \log y = 5 \\ -\log x - \log y = -4 \end{array}\right\}$

$$\log x \qquad = 1$$

Si $\log x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 10}$; sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación:

$2\log 10 + \log y = 5; \quad 2\cdot 1 + \log y = 5; \quad \log y = 3 \Rightarrow \boxed{y = 1000}$

La comprobación es inmediata.

$g)$ $\left.\begin{array}{r} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 2^x + 5^y = 9 \\ 4\cdot 2^x + 5\cdot 5^y = 41 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{c}\text{Cambio de variable} \\ 2^x = u; \quad 5^y = v\end{array}\Bigg\}$

$$\left.\begin{array}{r} u + v = 9 \\ 4u + 5v = 41 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{x(-5)} \\ \longrightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} -5u - 5v = -45 \\ 4u + 5v = 41 \end{array}\right\} \quad u = 4; \quad v = 5$$
$$-u \qquad = -4$$

(Sigue →)

Se deshace el cambio: $\left.\begin{array}{l} 2^x = u = 4 = 2^2 \\ 5^y = v = 5 = 5^1 \end{array}\right\} \boxed{x = 2; \quad y = 1}$

Comprobación: $\left.\begin{array}{l} 2^4 + 5^2 = 41 \\ 2^2 + 5^1 = 9 \end{array}\right\}$

$h)$ $\left.\begin{array}{r} 2^x - 3^{y-1} = 5 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 712 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \to 2^x - 3^{-1} \cdot 3^y = 5 \\ \to 2^1 \cdot 2^x + 8 \cdot 3^y = 712 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{c} \text{Cambio de variable} \\ 2^x = u; \quad 3^y = v \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} u - \frac{v}{3} = 5 \\ 2u + 8v = 712 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to u - \frac{v}{3} = 5 \\ \to u = \frac{712 - 8v}{2} = 356 - 4v \end{array}\Bigg\}$$

$$356 - 4v - \frac{v}{3} = 5; \quad 351 = \frac{13v}{3}; \quad \boxed{v = 81; \quad u = 32}$$

Se deshace el cambio: $\begin{array}{l} 2^x = u = 32 = 2^5; \\ 3^y = v = 81 = 3^4; \end{array} \boxed{x = 5; \quad y = 4}$

$i)$ $\left.\begin{array}{r} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = -9 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 2^x + 5^y = 9 \\ 4 \cdot 2^x - 5 \cdot 5^y = -9 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{c} \text{Cambio de variable} \\ 2^x = u; \quad 5^y = v \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} u + v = 9 \\ 4u - 5v = -9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{x5} 5u + 5v = 45 \\ \longrightarrow \underline{4u - 5v = -9} \end{array}\Bigg\} \to u = 4; \quad v = 5$$

$$9u \qquad = 36$$

Se deshace el cambio: $\begin{array}{l} 2^x = u = 4; \\ 5^y = v = 5; \end{array} \boxed{x = 2; \quad y = 1}$