1) Hallar el exponente al que hay que elevar 7 para obtener $\sqrt[3]{2401}$.

Solución: Piden hallar x para que $7^x = \sqrt[3]{2401} \Leftrightarrow 7^x = \sqrt[3]{7^4} \Leftrightarrow 7^x = 7^{\frac{4}{3}} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$.

2) Calcular el logaritmo en base 9 de los siguientes números:

a) 3; b) 9; c) 243; d) $\frac{1}{81}$; e) $\frac{1}{9}$.

Solución:

a) $\log_9 3 = x \Leftrightarrow 9^x = 3 \Leftrightarrow \left(3^2\right)^x = 3 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

b) $\log_9 9 = x \Leftrightarrow 9^x = 9 \Rightarrow x = 1$.

c) $\log_9 243 = x \Leftrightarrow 9^x = 243 \Leftrightarrow \left(3^2\right)^x = 3^5 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

d) $\log_9 \frac{1}{81} = x \Leftrightarrow 9^x = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \left(3^2\right)^x = \frac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{-4} \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2$.

e) $\log_9 \frac{1}{9} = x \Leftrightarrow 9^x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(3^2\right)^x = \frac{1}{3^2} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{-2} \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$.

3) Hallar x en:

a) $\log_x 25 = 2$; b) $\log_x 256 = 8$; c) $\log_x 81 = \frac{1}{2}$.

Solución:

a) $\log_x 25 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} \Rightarrow x = \pm 5$. Pero la base x de un logaritmo, por definición, debe ser positiva, es decir, $x > 0$. Luego x=5.

b) $\log_x 256 = 8 \Leftrightarrow x^8 = 256 \overset{*}{\Rightarrow} x = \pm\sqrt[8]{256} = \pm\sqrt[8]{2^8} \Longrightarrow x = \pm 2$. Pero la base x de un logaritmo, por definición, debe ser positiva, es decir, $x > 0$. Luego x=2.

*Nota *:* Ya sabemos que (véase los problemas de radicales):

$$x^n = a \Rightarrow x = \begin{cases} \pm\sqrt[n]{a} & \text{si n es par y a} > 0 \text{ (a es positivo)} \\ \text{no existe} & \text{si n es par y a} < 0 \text{ (a es negativo)} \\ \sqrt[n]{a} & \text{si n es impar (a da igual que sea positivo, negativo o cero)} \end{cases}$$

c) $\log_x 81 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{1/2} = 81 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 81 \Rightarrow x = 81^2 = 6561$.

4) Calcular $\log_{20}\sqrt{8}$.

Solución: El logaritmo $\log_{20}\sqrt{8}$ no es exacto, pues

$\log_{20}\sqrt{8} = x \Leftrightarrow 20^x = \sqrt{8} \Rightarrow \left(2^2 \cdot 5\right)^x = 2^{\frac{3}{2}}$ y esta ecuación exponencial $\left(2^2 \cdot 5\right)^x = 2^{\frac{3}{2}}$ no se puede resolver algebraicamente, pues las bases $2^2 \cdot 5$ y 2, no son la misma. Así, para calcularlos aplicamos la fórmula del cambio de base del logaritmo a, por ejemplo, base el número *e* (logaritmo neperiano):

$$\log_{20}\sqrt{8} = \frac{\log_e \sqrt{8}}{\log_e 20} = \frac{\ln\sqrt{8}}{\ln 20} = \frac{1{,}0397207708399179641258481821873}{2{,}9957322735539909934352235761425} = 0{,}347067$$

5) El logaritmo de 0,3 en una cierta base es $\frac{1}{3}$. Se pide:

a) Hallar dicha base.
b) Calcular el logaritmo de 0,09 en dicha base.

Solución: a) Piden hallar x para que $\log_x 0{,}3 = \frac{1}{3}$. Pues vamos, con ánimo y alegría a hallar esa base x que nos piden, "¡VINGA!":

$$\log_x 0{,}3 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^{1/3} = 0{,}3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 0{,}3 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = (0{,}3)^3 \Rightarrow x = (0{,}3)^3 = 0{,}027.$$

b) $\log_{0{,}027} 0{,}09 = x \Leftrightarrow (0{,}027)^x = 0{,}09$. Como los decimales, al ilustre profesor que escribe, no le gustan mucho, ya que prefiere operar, y por tanto enseñar, con fracciones o radicales, pues resulta que:

$$\log_{0{,}027} 0{,}09 = x \Leftrightarrow \left(\frac{27}{1000}\right)^x = \frac{9}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{3^3}{10^3}\right)^x = \frac{3^2}{10^2} \Rightarrow \left[\left(\frac{3}{10}\right)^3\right]^x = \left(\frac{3}{10}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{10}\right)^{3x} = \left(\frac{3}{10}\right)^2$$

Como ya tenemos una ecuación $\left(\frac{3}{10}\right)^{3x} = \left(\frac{3}{10}\right)^2$ (ecuación viene del latín "equal", es decir, igualdad) con la misma base, a saber por el lector miope $\frac{3}{10}$, igualamos los exponentes. Luego $3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

Observación: Los siguientes ejercicios puede, según el libro de referencia que utilice el alumno/a, que las ecuaciones exponenciales y logarítmicas se estudien al ver las funciones logarítmicas y exponenciales, allá, en la mayoría de los centros educativos, por el segundo trimestre.

6) Resolver la ecuación: $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = 32$.

Solución: Este es el uno de los dos tipos clásicos (de los que han caído en los exámenes durante toda la vida) para resolver ecuaciones exponenciales. Consiste, como has visto en el ejercicio 1 y en el anterior en ingeniárselas (un poco de ingenio por parte del lector, por favor) para que en los dos miembros de la "equal" (igualdad) tengan la misma base. *"Pos vamos allá":*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = 32 \Rightarrow \left[2^{-1}\right]^{2x-1} = 2^5 \Rightarrow 2^{-1\cdot(2x-1)} = 2^5 \Rightarrow 2^{-2x+1} = 2^5.$$

Y ahora, "pos" igualamos los exponentes y "san sacabó":

$$2^{-2x+1} = 2^5 \Rightarrow -2x+1 = 5 \Rightarrow -2x = 5-1 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{-2} \Rightarrow x = -2.$$

7) Resolver la ecuación: $3^x + 3^{2x} = 2$.

Solución: Este es el otro de los dos tipos clásicos (de los que han caído en los exámenes durante toda la vida) para resolver ecuaciones exponenciales. Consiste en hacer un cambio de variable.

La ecuación anterior es $\left(3^x\right)^2+3^x-2=0$. Realizando el cambio $y=3^x$, la ecuación exponencial $\left(3^x\right)^2+3^x-2=0$ queda como la siguiente ecuación de segundo grado en y: $y^2+y-2=0$; cuya soluciones son y=1, y=-2. Deshaciendo el cambio, se tiene que

$y=3^x=1 \Leftrightarrow 3^x=3^0 \Rightarrow x=0$.

$y=3^x=-2$. Esta solución es imposible pues las funciones exponenciales son siempre positivas.

8) Resolver la ecuación: $2^{3x}-7\cdot 2^{2x}+14\cdot 2^x-8=0$.

Solución: Otro ejemplito del segundo tipo de ecuación exponencial clásico (del que te pondrá tu ilustrísimo profesor en el próximo examen) para resolver ecuaciones exponenciales. Consiste, recuerda, en hacer un cambio de variable.

La ecuación anterior es $\left(2^x\right)^3-7\cdot\left(2^x\right)^2+14\cdot 2^x-8=0$. Realizando el cambio $y=2^x$, la ecuación exponencial $\left(2^x\right)^3-7\cdot\left(2^x\right)^2+14\cdot 2^x-8=0$ queda como la siguiente ecuación de tercer grado en y: $y^3-7y^2+14y-8=0$:

Aplicamos el método de Rufinni para factorizar (poner como producto de factores) el primer miembro $y^3-7y^2+14y-8$. Ya sabemos que debemos que las posibles raíces que sean números enteros se encuentran entre los divisores de –8, a saber: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.

Probando con x=2 queda:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -7 & 14 & -8 \\ 2 & & 2 & -10 & 8 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}$$

Luego: $y^3-7y^2+14y-8=(y-2)\left(y^2-5y+4\right)$. Sigamos descomponiendo el polinomio y^2-5y+4:

$$y=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{5+3}{2}=\dfrac{8}{2}=4\\[2mm] \dfrac{5-3}{2}=\dfrac{2}{2}=1\end{cases}$$

Por tanto, la ecuación de tercer grado en y queda así:

$y^3-7y^2+14y-8=0 \Leftrightarrow (y-2)(y-1)\cdot(y-4)=0$

Así, si tenemos varios productos igualados a 0, al menos uno de ellos es 0. Luego:

$$y^3-7y^2+14y-8=0 \Leftrightarrow (y-2)(y-1)\cdot(y-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} y-2=0 \Rightarrow y=2 \\ y-1=0 \Rightarrow y=1 \\ y-4=0 \Rightarrow y=4 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación $y^3-7y^2+14y-8=0$ son y=1, y=2, y=4. Deshaciendo el cambio, se tiene que

$y=2^x=1 \Leftrightarrow 2^x=2^0 \Rightarrow x=0$.

$y=2^x=2 \Rightarrow x=1$.

$y=2^x=4 \Leftrightarrow 2^x=2^2 \Rightarrow x=2$.

9) Resolver la ecuación: $\dfrac{4}{2^{x-1}}=4\cdot 2^{x+1}-63$.

Solución: Este es otro ejemplo del segundo tipo de ecuación exponencial clásico (del que te pondrá tu ilustrísimo profesor en el próximo examen) para resolver ecuaciones exponenciales, lo que pasa es que éste ejemplo está un poco escondido. Vamos a encontrarlo.
Recuerda que consiste en hacer un cambio de variable.

$\frac{4}{2^{x-1}} = 4\cdot 2^{x+1} - 63$. Ya sabemos que las soluciones de una "equal" no cambian si multiplicamos ambos miembros por una cantidad no nula (no nula quiere decir distinta de cero). Multipliquemos ambos miembros por el denominador 2^{x-1}:

$$\frac{4}{2^{x-1}} = 4\cdot 2^{x+1} - 63 \Rightarrow \frac{4}{2^{x-1}}\cdot 2^{x-1} = \left(4\cdot 2^{x+1} - 63\right)\cdot 2^{x-1} \Rightarrow \frac{4\cdot 2^{x-1}}{2^{x-1}} = 4\cdot 2^{x+1}\cdot 2^{x-1} - 63\cdot 2^{x-1} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{1} = 4\cdot 2^{x+1+x-1} - 63\cdot 2^{x}\cdot 2^{-1} \Rightarrow 4 = 4\cdot 2^{2x} - 63\cdot 2^{x}\cdot\frac{1}{2}$$

Como hay denominadores, multiplicamos ambos miembros por el denominador 2:

$$4 = 4\cdot 2^{2x} - 63\cdot 2^{x}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow 4\cdot 2 = \left(4\cdot 2^{2x} - 63\cdot 2^{x}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot 2 \Rightarrow 8 = 4\cdot 2\cdot 2^{2x} - 63\cdot 2^{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 \Rightarrow$$

$$8 = 8\cdot 2^{2x} - 63\cdot 2^{x}\cdot\frac{2}{2} \Rightarrow 8 = 8\cdot 2^{2x} - 63\cdot 2^{x}\cdot 1 \Rightarrow 8 = 8\cdot 2^{2x} - 63\cdot 2^{x} \Rightarrow 0 = 8\cdot\left(2^{x}\right)^{2} - 63\cdot 2^{x} - 8$$

$$\Rightarrow 8\cdot\left(2^{x}\right)^{2} - 63\cdot 2^{x} - 8 = 0$$

Realizando el cambio $y = 2^{x}$, la ecuación exponencial $8\cdot\left(2^{x}\right)^{2} - 63\cdot 2^{x} - 8 = 0$ queda como la siguiente ecuación de segundo grado en y: $8y^{2} - 63y - 8 = 0$
Luego

$$y = \frac{-(-63)\pm\sqrt{(-63)^{2} - 4\cdot 8\cdot(-8)}}{2\cdot 8} = \frac{63\pm\sqrt{3969+256}}{16} = \frac{63\pm\sqrt{4225}}{16} = \frac{63\pm 65}{16} =$$

$$= \begin{cases} \frac{63+65}{16} = \frac{128}{16} = 8 \\ \frac{63-65}{16} = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio, se tiene que
$y = 2^{x} = 8 \Leftrightarrow 2^{x} = 2^{3} \Rightarrow x = 3$.

$y = 2^{x} = \frac{-1}{8}$. Esta solución es imposible pues las funciones exponenciales son siempre positivas.

10) Resolver el sistema: $\begin{cases} 3^{x} = 3^{y}\cdot 81 \\ x + y = 3 \end{cases}$.

Solución: La primera ecuación $3^{x} = 3^{y}\cdot 81$ es una ecuación exponencial del primer tipo, es decir, para resolverla necesito en ambos miembros la misma base, para después igualar los exponentes. La segunda ecuación es una ecuación con dos incógnitas x e y "de toda la vida". Así:

$$\begin{cases} 3^x = 3^y \cdot 81 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x = 3^y \cdot 3^4 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x = 3^{y+4} \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y+4 \\ x+y=3 \Rightarrow y+4+y=3 \Rightarrow 2y = 3-4 \Rightarrow y = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

Si $y = \frac{-1}{2}$, entonces $x = \frac{-1}{2} + 4 = \frac{-1+8}{2} = \frac{7}{2}$.

Luego la solución al sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es x=$\frac{7}{2}$, y=$\frac{-1}{2}$.

11) Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log(x-2) = 2$

b) $2\log x - \log 4 = 0$

c) $\log\sqrt[5]{x} - \log x^2 = 9$

d) $\log_5 x^2 + \log_5 10 = \log_5 x + \log_5 100 - \log_5 2$

e) $\log_3 \sqrt{x} + \log_3 (9x) - 5 = \log_3\left(\frac{x}{3}\right)$

<u>Solución:</u> Todas estas ecuaciones son ecuaciones logarítmicas, pues como el lector puede comprobar, interviene la palabra "log" de logaritmo. Este tipo de ecuaciones se resuelven muy fácilmente, "¡están tiradas!", ya que basta poner los dos miembros con logaritmos en la misma base para luego igualar las expresiones de dentro.

Resolvámoslas:

a) El primer miembro ya lo tengo todo como logaritmo en una base (10), sin embargo el segundo miembro 2 no lo tengo como logaritmo en base 10. Pues pongámoslo:

$2 = \log 10^2$ ya que $\log 10^2 = 2 \cdot \log 10 = 2 \cdot 1 = 2$. Luego:

$\log(x-2) = 2 \Rightarrow \log(x-2) = \log 10^2$

Y ahora que tenemos los dos miembros con logaritmos en la misma base, igualamos las expresiones algebraicas de dentro:

$\log(x-2) = \log 10^2 \Rightarrow x-2 = 10^2 \Rightarrow x-2 = 100 \Rightarrow x = 100+2 \Rightarrow x = 102$.

b)

$$2\log x - \log 4 = 0 \Rightarrow \log x^2 - \log 4 = 0 \Rightarrow \log\frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow \log\frac{x^2}{4} = \log 10^0 \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 10^0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} \cdot 4 = 1 \cdot 4 \Rightarrow \frac{4x^2}{4} = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{1} = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$$

Sin embargo la solución x=2 si es válida pues $2\log 2 - \log 4$ tiene sentido pues son logaritmos de números positivos, pero la solución x=-2 no es válida pues $2\log(-2) - \log 4$ no tiene sentido ya que $\log(-2)$ no existe. (Ya sabe el lector que la función logaritmo en cualquier base sólo existe para valores positivos, es decir, el dominio de la función logaritmo es $(0,+\infty)$).

c)

$$\log\sqrt[5]{x}-\log x^2=9\Rightarrow\log\frac{\sqrt[5]{x}}{x^2}=9\Rightarrow\log\frac{\sqrt[5]{x}}{x^2}=\log 10^9\Rightarrow\frac{\sqrt[5]{x}}{x^2}=10^9\Rightarrow\frac{x^{1/5}}{x^2}=10^9\Rightarrow$$

$$x^{\frac{1}{5}-2}=10^9\Rightarrow x^{\frac{1-10}{5}}=10^9\Rightarrow x^{\frac{-9}{5}}=10^9\Rightarrow\left(x^{\frac{-9}{5}}\right)^{\frac{-5}{9}}=\left(10^9\right)^{\frac{-5}{9}}\Rightarrow x^{\frac{-9}{5}\cdot\frac{-5}{9}}=10^{9\cdot\frac{-5}{9}}\Rightarrow$$

$$x^1=10^{-5}\Rightarrow x=\frac{1}{10^5}=\frac{1}{100000}\Rightarrow x=0{,}00001$$

d)

$$\log_5 x^2+\log_5 10=\log_5 x+\log_5 100-\log_5 2\Rightarrow\log_5 10\cdot x^2=\log_5 100\cdot x-\log_5 2\Rightarrow$$

$$\log_5 10x^2=\log_5\frac{100x}{2}\Rightarrow\log_5 10x^2=\log_5 50x\Rightarrow 10x^2=50x\Rightarrow\frac{10x^2}{10}=\frac{50x}{10}\Rightarrow x^2=5x\Rightarrow$$

$$x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x-5=0\Rightarrow x=5\end{cases}$$

Ahora observamos las dos soluciones que hemos obtenido x=0 y x=5, y las substituimos en la ecuación inicial $\log_5 x^2+\log_5 10=\log_5 x+\log_5 100-\log_5 2$, obteniendo:

- $\log_5 0^2+\log_5 10=\log_5 0+\log_5 100-\log_5 2$, que no tiene sentido pues el logaritmo de 0 en cualquier base no existe (el dominio de la función logaritmo es $(0,+\infty)$).
- $\log_5 5^2+\log_5 10=\log_5 5+\log_5 100-\log_5 2$, en el que todo tiene sentido pues son logaritmos de números positivos.

Conclusión: La solución a la ecuación logarítmica es x=5.

e)

$$\log_3\sqrt{x}+\log_3(9x)-5=\log_3\left(\frac{x}{3}\right)\Rightarrow\log_3\sqrt{x}+\log_3(9x)-\log_3 3^5=\log_3\left(\frac{x}{3}\right)\Rightarrow$$

$$\log_3 9x\sqrt{x}-\log_3 3^5=\log_3\left(\frac{x}{3}\right)\Rightarrow\log_3\frac{9x\sqrt{x}}{243}=\log_3\left(\frac{x}{3}\right)\Rightarrow\frac{9x\sqrt{x}}{243}=\frac{x}{3}\Rightarrow\frac{x\sqrt{x}}{27}=\frac{x}{3}\Rightarrow$$

$$\frac{x\sqrt{x}}{27}=\frac{9x}{27}\Rightarrow 27\cdot\frac{x\sqrt{x}}{27}=\frac{9x}{27}\cdot 27\Rightarrow x\sqrt{x}=9x\Rightarrow x\sqrt{x}-9x=0\Rightarrow x\left(\sqrt{x}-9\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\\sqrt{x}-9=0\Rightarrow\sqrt{x}=9\Rightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2=9^2\Rightarrow x=9^2=81\end{cases}$$

Ahora observamos las dos soluciones que hemos obtenido x=0 y x=81 y las substituimos en la ecuación inicial $\log_3\sqrt{x}+\log_3(9x)-5=\log_3\left(\frac{x}{3}\right)$, obteniendo:

- $\log_3\sqrt{0}+\log_3(9\cdot 0)-5=\log_3\left(\frac{0}{3}\right)\Rightarrow\log_3 0+\log_3 0-5=\log_3 0$, que no tiene sentido pues el logaritmo de 0 en cualquier base no existe (el dominio de la función logaritmo es $(0,+\infty)$).

- $\log_3\sqrt{81}+\log_3(9\cdot 81)-5=\log_3\left(\frac{81}{3}\right)\Rightarrow \log_3 9+\log_3 247-5=\log_3 27$, en el que todo tiene sentido pues son logaritmos de números positivos.

Conclusión: La solución a la ecuación logarítmica es x=81.

12) Resolver los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l}\log_2 x+\log_2 y=5\\ 2\log_2 x-\log_2 y=1\end{array}\right\}$; b) $\left.\begin{array}{l}\log x+\log y=1\\ x-y=\frac{999}{10}\end{array}\right\}$; c) $\left.\begin{array}{c}14^x=14^y\cdot 14^5\\ \log(x-y)+\log x=\log 35\end{array}\right\}$

<u>Solución:</u>

a)

$$\left.\begin{array}{l}\log_2 x+\log_2 y=5\\ 2\log_2 x-\log_2 y=1\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\log_2 xy=\log_2 2^5\\ \log_2 x^2-\log_2 y=\log_2 2^1\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\log_2 xy=\log_2 32\\ \log_2\frac{x^2}{y}=\log_2 2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}xy=32\\ \frac{x^2}{y}=2\end{array}\right\}$$

Por tanto, resolver el sistema de dos ecuaciones logarítmicas se ha reducido a resolver el sistema no lineal $\left.\begin{array}{l}xy=32\\ \frac{x^2}{y}=2\end{array}\right\}$. Ya sabemos que para resolver un sistema de ecuaciones no lineal, lo normal es aplicar los métodos de sustitución o de reducción. Terminemos de resolver el problema:

$$\left.\begin{array}{l}xy=32\\ \frac{x^2}{y}=2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}xy=32\\ \frac{x^2}{y}=\frac{2y}{y}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}xy=32\\ x^2=2y\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}xy=32\\ \frac{x^2}{2}=y\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}xy=32\Rightarrow x\frac{x^2}{2}=32\Rightarrow \frac{x^3}{2}=\frac{64}{2}\Rightarrow x=\sqrt[3]{2^6}=2^{\frac{6}{3}}=2^2\Rightarrow x=4\\ \frac{x^2}{2}=y\end{array}\right.$$

Si x=4, entonces $y=\frac{4^2}{2}=\frac{16}{2}=8$. Luego la solución es x=4,y=8, las cuales tienen sentido, ya que al sustituirlas en el sistema inicial $\left.\begin{array}{l}\log_2 4+\log_2 8=5\\ 2\log_2 4-\log_2 8=1\end{array}\right\}$ todos los logaritmos son de números positivos.

b) $\left.\begin{array}{l}\log x+\log y=1\\ x-y=\frac{999}{10}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\log xy=\log 10^1\\ x-y=\frac{999}{10}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}xy=10\\ x-y=\frac{999}{10}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l}xy=10\Rightarrow \left(\frac{999}{10}+y\right)y=10\Rightarrow \frac{999}{10}y+y^2=10\Rightarrow \frac{999y+10y^2}{10}=\frac{100}{10}\Rightarrow 999y+10y^2=100\\ x=\frac{999}{10}+y\end{array}\right.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado en y $10y^2+999y-100=0$, se tiene que

$$y=\frac{-999\pm\sqrt{999^2-4\cdot 10\cdot(-100)}}{2\cdot 10}=\frac{-999\pm\sqrt{1002001}}{20}=\frac{-999\pm 1001}{20}=\begin{cases}\frac{2}{20}=\frac{1}{10}\\ \frac{-2000}{20}=-100\end{cases}$$

Si $y=\frac{1}{10}$, entonces $x=\frac{999}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1000}{10}=100$.

Si y=-100, entonces $x=\frac{999}{10}+(-100)=\frac{999}{10}-100=\frac{999}{10}-\frac{1000}{10}=\frac{-1}{10}$.

Pero la solución $x=\frac{-1}{10}$, y=-100 no tiene sentido al sustituirla en el sistema, pues en la primera ecuación da logaritmos de números negativos que no existen. Por tanto la solución es x=100, $y=\frac{1}{10}$.

c)

$$\left.\begin{array}{c}14^x=14^y\cdot 14^5\\ \log(x-y)+\log x=\log 35\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}14^x=14^{y+5}\\ \log(x-y)x=\log 35\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=y+5\\ (x-y)x=35\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=y+5\\ (y+5-y)(y+5)=35\Rightarrow 5(y+5)=35\Rightarrow 5y+25=35\Rightarrow y=2\end{cases}$$

Si y=2, entonces x=2+5=7. La solución es x=7, y=2, pues al sustituirla en el sistema $\left.\begin{array}{c}14^7=14^2\cdot 14^5\\ \log 5+\log 7=\log 35\end{array}\right\}$ todo tiene sentido al salir logaritmo de números positivos.

13) Resolver la ecuación: $\sqrt{4^{2x-2}}=16$.

Solución:

$$\sqrt{4^{2x-2}}=16\Rightarrow\left(\sqrt{4^{2x-2}}\right)^2=16^2\Rightarrow 4^{2x-2}=16^2\Rightarrow 4^{2x-2}=\left(4^2\right)^2\Rightarrow 4^{2x-2}=4^4$$

$$\Rightarrow 2x-2=4\Rightarrow x=3$$

14) Resolver la ecuación: $3^{x^2-5x}=\frac{1}{729}$.

Solución:

$$3^{x^2-5x}=\frac{1}{729}\Rightarrow 3^{x^2-5x}=\frac{1}{3^6}\Rightarrow 3^{x^2-5x}=3^{-6}\Rightarrow x^2-5x=-6\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ x=3\end{cases}$$

15) Resolver la ecuación: $4^{2x+1}-3\cdot 4^x=10$.

Solución: $4^{2x+1}-3\cdot 4^x=10\Rightarrow 4^1\cdot 4^{2x}-3\cdot 4^x-10=0\Rightarrow 4\cdot\left(4^x\right)^2-3\cdot 4^x-10=0$.

Realizando el cambio $y=4^x$, la ecuación exponencial $4\cdot\left(4^x\right)^2-3\cdot 4^x-10=0$ queda como la siguiente ecuación de segundo grado en y: $4y^2-3y-10=0$, cuyas soluciones son y=2, $y=\frac{-5}{4}$.

Deshaciendo el cambio, se tiene que

$$y=4^x=2\Leftrightarrow 4^x=4^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

$y = 4^x = \frac{-5}{4}$. Esta solución es imposible pues las funciones exponenciales son siempre positivas.

16) Resolver los sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 5\cdot 2^x - 2\cdot 3^y = -34 \\ 2\cdot 2^x + 3^y = 35 \end{array}\right\}$; b) $\left.\begin{array}{l} 4^x + 5^y = 126 \\ 25\cdot 4^x = 5^{y-1} \end{array}\right\}$

<u>Solución:</u> Éste es el último de los problemas clásicos (insisto, de los que caen en el examen). Consiste en realizar un cambio y convertir el sistema de ecuaciones exponenciales en un sistema de ecuaciones lineal que ya sabemos resolver desde 2º de E.S.O. Después, no olvidarse de deshacer el cambio. Resolvamos los sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 5\cdot 2^x - 2\cdot 3^y = -34 \\ 2\cdot 2^x + 3^y = 35 \end{array}\right\}$

Realizando el cambio $a = 2^x$, $b = 3^y$ el sistema anterior queda $\left.\begin{array}{l} 5a - 2b = -34 \\ 2a + b = 35 \end{array}\right\}$, cuyas soluciones son $a = 4, b = 27$. Deshaciendo el cambio, se tiene que

$$\begin{array}{l} a = 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2 \\ b = 3^y = 27 \Leftrightarrow 3^y = 3^3 \Rightarrow y = 3 \end{array}.$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} 4^x + 5^y = 126 \\ 25\cdot 4^x = 5^{y-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4^x + 5^y = 126 \\ 25\cdot 4^x = 5^y\cdot 5^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4^x + 5^y = 126 \\ 25\cdot 4^x = 5^y\cdot\frac{1}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4^x + 5^y = 126 \\ \frac{125\cdot 4^x}{5} = \frac{5^y}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4^x + 5^y = 126 \\ 125\cdot 4^x - 5^y = 0 \end{array}\right\}$$

Realizando el cambio $a = 4^x$, $b = 5^y$ el sistema anterior queda $\left.\begin{array}{l} a + b = 126 \\ 125a - b = 0 \end{array}\right\}$, cuyas soluciones son $a = 1, b = 125$. Deshaciendo el cambio, se tiene que

$$\begin{array}{l} a = 4^x = 1 \Leftrightarrow 4^x = 4^0 \Rightarrow x = 0 \\ b = 5^y = 125 \Leftrightarrow 5^y = 5^3 \Rightarrow y = 3 \end{array}.$$