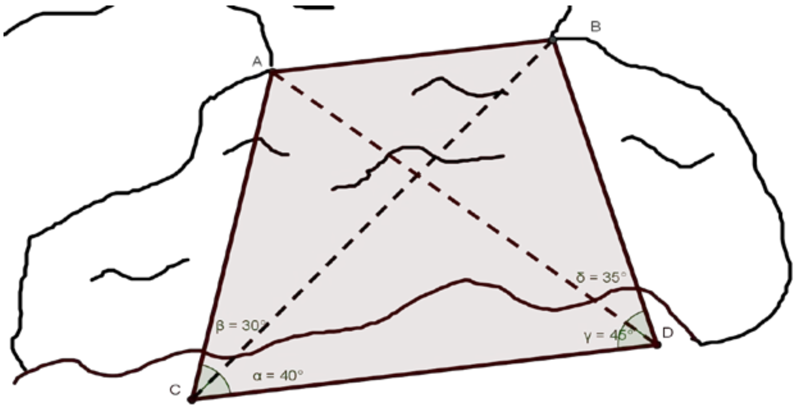
Examen Trigonometría y Números complejos

Nombre:____Fecha:

1.- (2 puntos) Resuelve:

a) $\begin{cases} 3-2x \leq 5 \\ -x^2+7x+8 \geq 0 \end{cases}$ b) $x^3+2x^2-x-2 \leq 0$

2.-**(1,5 puntos)** Calcula la distancia entre dos puntos A y B que están en la orilla del mar. Desde los puntos C y D, situados en una explanada cercana, se han tomado los siguientes datos:



$\overline{CD} = 200m$, $\widehat{ACB} = 30º$, $\widehat{BCD} = 40º$, $\widehat{ADC} = 45º$, $\widehat{BDA} = 35º$

3.- (**1,5 puntos)** Los lados de un paralelogramo miden 18 cm y 32 cm y forman un ángulo de 52º. Halla la longitud de la diagonal.

4.- a) **(1 punto)** Resuelve la ecuación trigonométrica: $sen2x + 3sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2$

b) **(1 punto)** Demuestra la identidad: $\frac{sen(a+b)+sen(a-b)}{\cos(a-b)-\cos(a+b)} = \frac{1}{tg\ b}$

5.- Dados los números complejos:

$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ i$; $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$; $z_3 = 16_{240º}$,

a) (0,75 puntos)Expresa $z_1\ y\ z_2$ en forma polar y z_3 en forma binómica.

b) (1 punto) Realiza: $z_1 \cdot z_2$; $z_2 + z_3$; $\frac{z_2}{z_3}$; $(z_1)^6$

c) (0,5 puntos) Calcula $\sqrt[4]{z_3}$

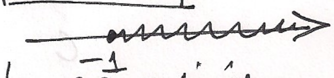
6.- (0,75 puntos) Calcula *a* y *b* para que se verifique la igualdad:

$$\frac{3a-9i}{3a+bi} = 5+4i$$

① a) $\begin{cases} 3-2x \leq 5 \\ -x^2+7x+8 \geq 0 \end{cases}$

Resolvemos cada inecuación por separado.

- $3-2x \leq 5$; $-2x \leq 2$; $2x \geq -2$; $\boxed{x \geq -1}$

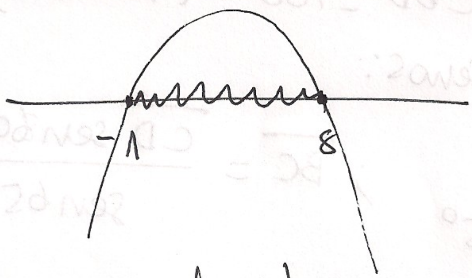


- $-x^2+7x+8 \geq 0$. Resolvemos la ecuación asociada.

$-x^2+7x+8=0$; $x^2-7x-8=0$.

$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+32}}{2}$; $x = \dfrac{7 \pm 9}{2}$; $\begin{cases} \boxed{x=8} \\ \boxed{x=-1} \end{cases}$

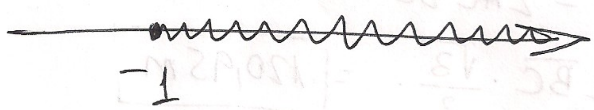
Resolvemos ahora la inecuación, dibujando la parábola.

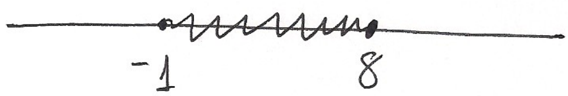


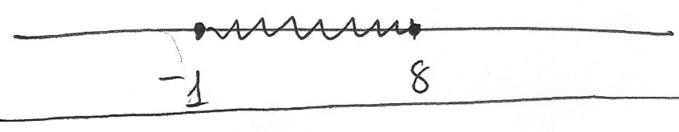
es en forma de $\cap$ porque el coeficiente de x^2 es negativo.

$[-1,8]$: Solución 2a inec.

Resolvemos el sistema viendo dónde coinciden las soluciones.

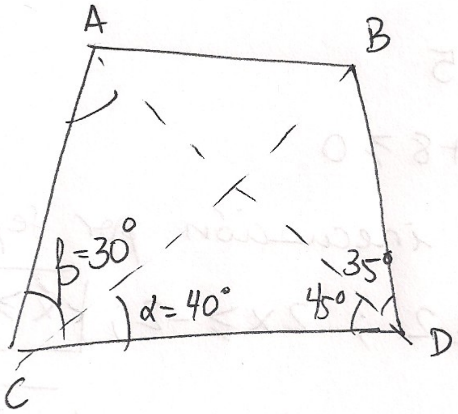






$[-1,8]$

(2)



$\widehat{ACB}=30^\circ$
$\widehat{BCD}=40^\circ$
$\widehat{ADC}=45^\circ$
$\widehat{BDA}=35^\circ$
$\overline{CD}=200\,m$.

$\triangle ACD$ $\quad \widehat{CAD}=180-(70+45)=180-115=65^\circ$

Teorema de los senos.

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen }45^\circ}=\frac{\overline{CD}}{\text{sen }65^\circ}\;;\quad \overline{AC}=\frac{\overline{CD}\,\text{sen }45^\circ}{\text{sen }65^\circ}=\boxed{156{,}04\,m}$$

$\triangle BCD$ $\quad \cancel{\widehat{CBD}}$ $\quad \widehat{CBD}=180-(40+80)=60^\circ$.

Teorema de los senos:

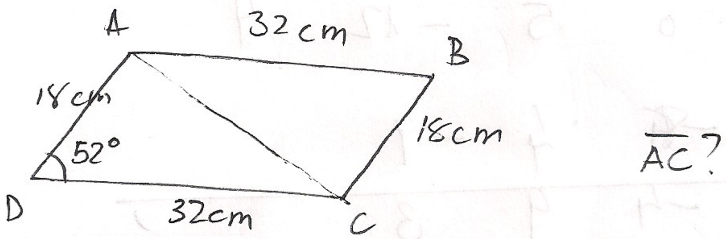
$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen }80^\circ}=\frac{\overline{CD}}{\text{sen }65^\circ}\;;\quad \overline{BC}=\frac{\overline{CD}\,\text{sen }80^\circ}{\text{sen }65^\circ}=\boxed{217{,}32\,m}$$

$\triangle ABC$. Teorema del coseno:

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\,\overline{AC}\,\overline{BC}\cos 30^\circ=$$

$$=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\,\overline{BC}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.=\boxed{120{,}95\,m}$$

③



$\overline{AC}$?

$\triangle ACD$ Teorema del coseno:

$\overline{AC}^2 = 18^2 + 32^2 - 2 \cdot 18 \cdot 32 \cos 52$

$\boxed{\overline{AC} = 25{,}27 \text{ cm}}$

④ a) $\operatorname{sen} 2x + 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2$;

$2 \operatorname{sen}x \cos x + 3 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \cos(-x) + \cancel{\cos\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}(-x)} \to 0 = 2$;

$2 \operatorname{sen}x \cos x + 3 \cos x = 2$.

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$; $\operatorname{sen}x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$

$2\sqrt{1-\cos^2 x} \cdot \cos x + 3\cos x = 2$;

$\left(2\sqrt{1-\cos^2 x} \cdot \cos x\right)^2 = (2 - 3\cos x)^2$;

$4(1-\cos^2 x) \cdot \cos^2 x = 4 + 9\cos^2 x - 12\cos x$;

$(4 - 4\cos^2 x)\cos^2 x = 4 + 9\cos^2 x - 12\cos x$;

$-4\cos^4 x + 4\cos^2 x = 4 + 9\cos^2 x - 12\cos x$;

$4\cos^4 x + 9\cos^2 x - 4\cos^2 x - 12\cos x + 4 = 0$;

$4\cos^4 x + 5\cos^2 x - 12\cos x + 4 = 0$;

$\cos x = z$; $4z^4 + 5z^2 - 12z + 4 = 0$.

$\operatorname{sen} 2x + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2;$

$\operatorname{sen} 2x + 3\cos x = 2;$

$2\operatorname{sen} x \cos x + 3\cos x = 2;$

$\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$

$2\sqrt{1-\cos^2 x}\,\cos x + 3\cos x = 2;$

$\left(2\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\cos x\right)^2 = (2-3\cos x)^2;$

$4(1-\cos^2 x)\cdot\cos^2 x = 4 - 12\cos x + 9\cos^2 x;$

$4\cos^2 x - 4\cos^4 x = 4 - 12\cos x + 9\cos^2 x;$

$4\cos^4 x + 5\cos^2 x - 12\cos x + 4 = 0;$ (lo mismo habría salido con $\operatorname{sen} x = -\sqrt{1-\cos^2 x}$).

Cambio de variable: $\cos x = z;$

$4z^4 + 5z^2 - 12z + 4 = 0;$

Por Ruffini:

$$\begin{array}{|ccccc} 4 & 0 & 5 & -12 & 4 \\ & & & & \\ \hline \end{array}$$

No sale con $z = \pm 1 \pm 2 \pm 4$

No sabemos calcular sus raíces.

(Hasta aquí sería la puntuación máxima).

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a-b)-\cos(a+b)} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} b}$. Varias formas,

pero lo hacemos desarrollando los senos y cosenos.

$$\frac{\operatorname{sen}a\cos b+\cos a\operatorname{sen}b+\operatorname{sen}a\cos(-b)+\cos a\operatorname{sen}(-b)}{\cos a\cos(-b)-\operatorname{sen}a\operatorname{sen}(-b)-(\cos a\cos b-\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b)}=\frac{1}{\operatorname{tg}b}?$$

$$\frac{\operatorname{sen}a\cos b+\cancel{\cos a\operatorname{sen}b}+\operatorname{sen}a\cos b-\cancel{\operatorname{sen}b\cos a}}{\cancel{\cos a\cos b}+\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b-\cancel{\cos a\cos b}+\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}=\frac{1}{\operatorname{tg}b}?$$

$$\frac{\cancel{2}\cancel{\operatorname{sen}a}\cos b}{\cancel{2}\cancel{\operatorname{sen}a}\operatorname{sen}b}=\frac{1}{\operatorname{tg}b}?$$

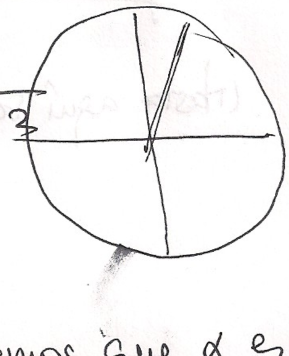
$$\cos b\operatorname{tg}b=\operatorname{sen}b?$$

$$\cancel{\cos b}\frac{\operatorname{sen}b}{\cancel{\cos b}}=\operatorname{sen}b? \;\checkmark$$

5 a) $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2=2\sqrt{3}+2i$; $z_3=16_{240°}$.

$$\boxed{|z_1|}=\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\boxed{1.}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}=-\sqrt{3}$$



2 posibilidads para $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$

$\alpha=180-60$; $\alpha=120°$

$\alpha=360-60$; $\alpha=300°$

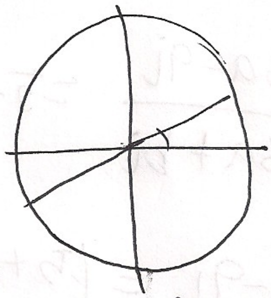
Por las coordenadas, sabemos que α es del 2º cuadrante, luego: $\boxed{\alpha=120°}$

Entonces, $\boxed{z_1 = 1_{120°}}$

~~b)~~ $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$;

$|z_2| = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$.

$tg\,\beta = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Hay dos posibilidades:

$\begin{cases} \beta = 30° \\ \beta = 150° \end{cases}$ Sabemos que β está en el 1er cuadrante (por la forma binómica) así que $\beta = 30°$.

$z_2 = \boxed{4_{30°}}$

$z_3 = a+bi = r\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha = 16\cdot\frac{-1}{2} + i\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2} = \boxed{-8-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

b) · $z_1 \cdot z_2 = 1_{120} \cdot 4_{30°} = \boxed{4_{150°}}$

· $z_2 + z_3$: la suma hay que hacerla en binómica.

$(2\sqrt{3}+2i)+\left(-8-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{2\sqrt{3}-8+\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i}$

· $\frac{z_2}{z_3} = \frac{4_{30°}}{16_{240°}} = \left(\frac{1}{4}\right)_{30-240} = \left(\frac{1}{4}\right)_{-210} = \boxed{\left(\frac{1}{4}\right)_{150°}}$

$\cdot (z_1)^6 = (1_{120})^6 = 1_{720^\circ} = 1_{0^\circ}$

c) $\sqrt[4]{z_3} = \sqrt[4]{16_{240^\circ}} = 2_{\frac{240}{4}} = \begin{cases} 2_{60^\circ} \\ 2_{150^\circ} \\ 2_{240^\circ} \\ 2_{300^\circ} \end{cases}$

6 $\dfrac{3a-9i}{3a+bi} = 5+4i$

$3a-9i = (5+4i)(3a+bi);$

$3a-9i = 15a+5bi+12ai-4b;$

$15a-3a-4b=0 \; ; \; 12a-4b=0 \quad \boxed{b=3a}$

$5b+12a+9=0 \; ; \; 15a+12a+9=0;$

$27a=-9 \; ; \; a=\dfrac{-9}{27} \; ; \; \boxed{a=\dfrac{-1}{3}}$