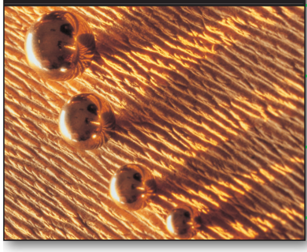
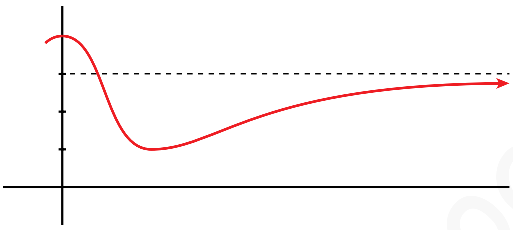
UNIDAD 5 LÍMITES Y CONTINUIDAD



Páginas 130 y 131

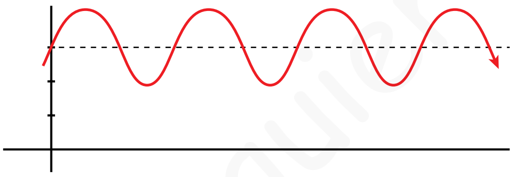
■ **Describe las siguientes ramas:**

a)



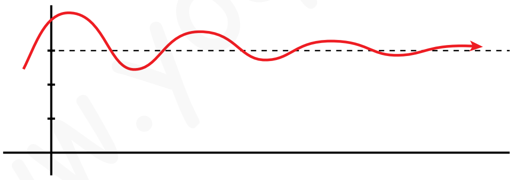
$$\underset{x \to +\infty}{\text{lím}}\ f(x) = 3$$

b)



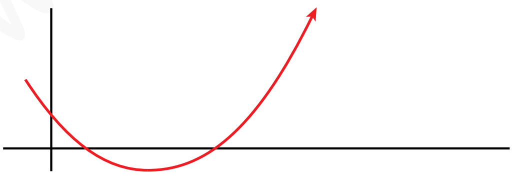
$$\underset{x \to +\infty}{\text{lím}}\ f(x) \ \text{ no existe}$$

c)



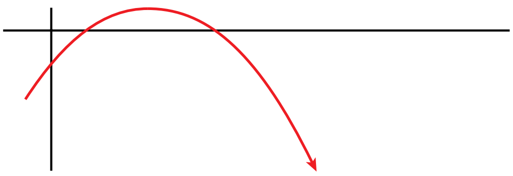
$$\underset{x \to +\infty}{\text{lím}}\ f(x) = 3$$

d)



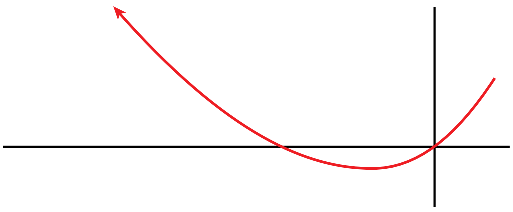
$$\underset{x \to +\infty}{\text{lím}}\ f(x) = +\infty$$

e)



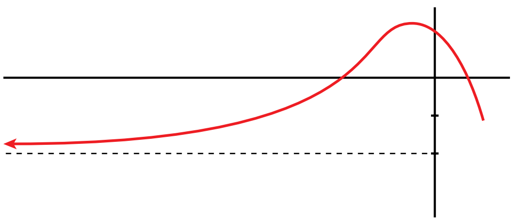
$$\underset{x \to +\infty}{\text{lím}}\ f(x) = -\infty$$

f)



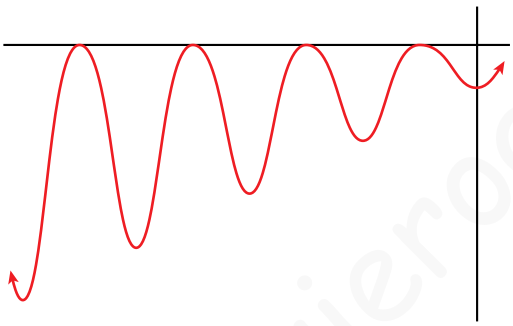
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

g)



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$$

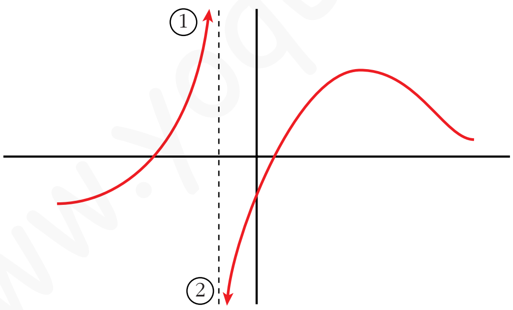
h)



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \text{ no existe;}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

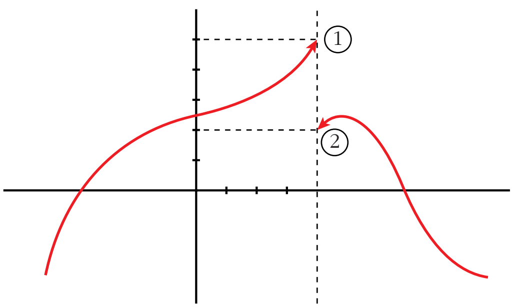
i)



1 $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

2 $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

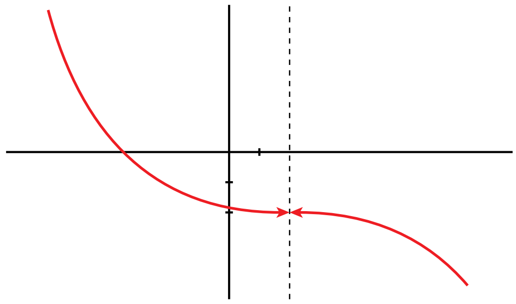
j)



1 $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 5$

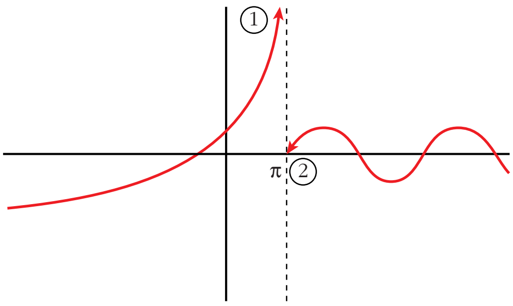
2 $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 2$

k)



$$\lim_{x \to 2} f(x) = -2$$

l)



① $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty$

② $\lim_{x \to \pi^+} f(x) = 0$

Página 133

1. Si $u(x) \to 2$ y $v(x) \to -3$ cuando $x \to +\infty$, calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de:

a) $u(x) + v(x)$ **b)** $v(x)/u(x)$ **c)** $5^{u(x)}$

d) $\sqrt{v(x)}$ **e)** $u(x) \cdot v(x)$ **f)** $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim_{x \to +\infty} [u(x) + v(x)] = 2 + (-3) = -1$

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{-3}{2}$

c) $\lim_{x \to +\infty} 5^{u(x)} = 5^2 = 25$

d) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{v(x)}$ no existe

e) $\lim_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = 2 \cdot (-3) = -6$

f) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{2}$

2. Si $u(x) \to -1$ y $v(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$, calcula el límite cuando $x \to +\infty$ de:

a) $u(x) - v(x)$ **b)** $v(x) - u(x)$ **c)** $v(x)/u(x)$

d) $\log_2 v(x)$ **e)** $u(x) \cdot v(x)$ **f)** $\sqrt[3]{u(x)}$

a) $\lim_{x \to +\infty} [u(x) - v(x)] = -1 - 0 = -1$

b) $\lim_{x \to +\infty} [v(x) - u(x)] = 0 - (-1) = 1$

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{v(x)}{u(x)} = \dfrac{0}{-1} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} log_2 v(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } v(x) \to 0^+ \\ \text{no existe si } v(x) \to 0^- \end{cases}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [u(x) \cdot v(x)] = -1 \cdot 0 = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{u(x)} = \sqrt[3]{-1} = -1$

Página 134

3. Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos $(\pm\infty)$ cuando $x \to +\infty$:

a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$ **b)** $0{,}5^x$ **c)** $-1{,}5^x$

d) $log_2 x$ **e)** $1/(x^3 + 1)$ **f)** $\sqrt{x}$

g) 4^x **h)** 4^{-x} **i)** -4^x

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^5 - \sqrt{x} + 1) = +\infty \;\to\;$ Sí

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}5^x = 0 \;\to\;$ No

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-1{,}5^x) = -\infty \;\to\;$ Sí

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} log_2 x = +\infty \;\to\;$ Sí

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3 + 1} = 0 \;\to\;$ No

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \;\to\;$ Sí

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^x = +\infty \;\to\;$ Sí

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} 4^{-x} = 0 \;\to\;$ No

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} -4^x = -\infty \;\to\;$ Sí

4. a) Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:

$$log_2 x \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad 3x^5 \quad 1{,}5^x \quad 4^x$$

b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log_2 x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x}$$

a) $4^x \quad 1{,}5^x \quad 3x^5 \quad x^2 \quad \sqrt{x} \quad log_2 x$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^5}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1{,}5^x} = 0$

Página 135

5. Sabiendo que, cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \to +\infty$ a las expresiones siguientes:

a) $f(x) - h(x)$	**b)** $f(x)^{f(x)}$	**c)** $f(x) + h(x)$
d) $f(x)^x$	**e)** $f(x) \cdot h(x)$	**f)** $u(x)^{u(x)}$
g) $f(x)/h(x)$	**h)** $[-h(x)]^{h(x)}$	**i)** $g(x)^{h(x)}$
j) $u(x)/h(x)$	**k)** $f(x)/u(x)$	**l)** $h(x)/u(x)$
m) $g(x)/u(x)$	**n)** $x + f(x)$	**ñ)** $f(x)^{h(x)}$
o) $x + h(x)$	**p)** $h(x)^{h(x)}$	**q)** x^{-x}

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - h(x)\big) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = +\infty + (-\infty)$ $\to$ Indeterminado

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^x = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) \cdot h(x)\big) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{u(x)} = 0^0$ $\to$ Indeterminado

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty}$ $\to$ Indeterminado

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [-h(x)]^{h(x)} = [+\infty]^{-\infty} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{h(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{h(x)} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{u(x)} = \dfrac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{u(x)} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{u(x)} = \dfrac{4}{(0)} = \pm\infty$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + f(x)\big) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

ñ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x + h(x)\big) = +\infty + (-\infty) \;\to\;$ Indeterminado

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)^{h(x)} = (-\infty)^{-\infty} \;\to\;$ No existe

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

Página 136

6. Las funciones *f*, *g*, *h* y *u* son las del ejercicio propuesto 7 (página anterior). Di cuáles de las siguientes funciones son indeterminaciones. En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo, y, si no lo es, di cuál es el límite:

a) $f(x) + h(x)$ **b)** $f(x)/h(x)$ **c)** $f(x)^{-h(x)}$ **d)** $f(x)^{h(x)}$

e) $f(x) \cdot u(x)$ **f)** $u(x)^{h(x)}$ **g)** $[g(x)/4]^{f(x)}$ **h)** $g(x)^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + h(x)\big) = +\infty + (-\infty)$. Indeterminado.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty}$. Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{-h(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \cdot u(x) = (+\infty) \cdot (0)$. Indeterminado.

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{h(x)} = 0^{-\infty} = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{g(x)}{4}\right]^{f(x)} = 1^{+\infty}$. Indeterminado.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{f(x)} = 4^{+\infty} = +\infty$

Página 137

1. **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{5x^3 + 3x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{-5x^3 + 3x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 3x}{x^3 + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{5x^3 + 3x^2} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x + 1}{-5x^3 + 3x^2} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 - 3x}{x^3 + 1} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1} = \dfrac{5}{3}$

2. **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2(x - 1)x}{x^3 - (x + 3)^3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2 x}{x^3 - 10x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 - 5x + 3}{x^2 - 2x}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x}}{3x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2(x - 1)x}{x^3 - (x + 3)^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x}{x^3 - (x^3 + 9x^2 + 27x + 27)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x}{-9x^2 - 27x - 27} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x + 1)^2 x}{x^3 - 10x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^3 + 6x^2 + x}{x^3 - 10x} = 9$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^3 - 5x + 3}{x^2 - 2x}} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x}}{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3}}{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$

Página 138

3. **Sin operar, di el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:**

a) $(x^2 - \sqrt[3]{2x + 1})$

b) $(x^2 - 2^x)$

c) $\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}$

d) $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$

f) $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt[3]{2x + 1}) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}\right) = +\infty$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \log_5 x^4\right) = +\infty$

4. **Calcula el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$ **b)** $\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}$ **c)** $\dfrac{3x + 5}{2} - \dfrac{x^2 - 2}{x}$

d) $(x + 5)^{x^2 - 5x + 1}$ **e)** $\left(\dfrac{3x + 5}{2x + 1}\right)^x$ **f)** $\left(\dfrac{x - 2}{2x - 3}\right)^{x^2 + x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(3x^3 + 5)(x - 2) - (4x^3 - x)(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 6x^3 + 5x - 10 - 4x^4 - 8x^3 + x^2 + 2x}{x^2 - 4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 - 14x^3 + x^2 + 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2 + 1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - x(2x^2 + 1)}{2(2x^2 + 1)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 2x^3 - x}{4x^2 + 2} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x}{4x^2 + 2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 5}{2} - \dfrac{x^2 - 2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 5x - 2x^2 + 4}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{2x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 5)^{x^2 - 5x + 1} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 5}{2x + 1}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x - 2}{2x - 3}\right)^{x^2 + x} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$

Página 139

1. **Halla el $\lim\limits_{x \to -\infty}$ de las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{x^3 - 5x + 3}}{x^2 - 2x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 + 6x + 2}{3x^4 - x - 1} = \dfrac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 - 5x + 3}}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{-x^3 + 5x + 3}}{x^2 + 2x}$

No existe, pues el radicando toma valores negativos cuando $x \to -\infty$.

2. **Halla el $\lim\limits_{x \to -\infty}$ de las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 3}}{3x - 2}$ **b)** $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$ **c)** 3^x

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 3}}{3x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 5x + 3}}{-3x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{-3x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{-3x} = -\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-3x^3 + 5}{-x + 2} - \dfrac{-4x^3 - x}{-x - 2}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 5x + 6x^3 - 10 - 4x^4 + x^2 + 8x^3 - 2x}{x^2 - 4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 14x^3 + x^2 - 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x = \lim\limits_{x \to +\infty} 3^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{3^x} = 0$

Página 141

1. **Si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$, di el valor del límite cuando x tiende a 1 de las siguientes funciones:**

a) $f(x) + g(x)$ **b)** $f(x) \cdot g(x)$ **c)** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

d) $f(x)^{g(x)}$ **e)** $\sqrt{g(x)}$ **f)** $4f(x) - 5g(x)$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \big(f(x) + g(x)\big) = 3 + 2 = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = 3 \cdot 2 = 6$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)^{g(x)} = 3^2 = 9$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{g(x)} = \sqrt{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \big(4f(x) - 5g(x)\big) = 12 - 10 = 2$

2. **Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, entonces $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$.**

Enuncia las restantes propiedades de los límites de las operaciones con funciones empleando la notación adecuada.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, entonces:

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = l - m$

3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$

4) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ (Si $m \neq 0$).

5) Si $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x)^{g(x)}\right] = l^m$

6) Si n es impar, o si n es par y $f(x) \geq 0$ $\to$ $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

7) Si $\alpha > 0$ y $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x \to a} [\log_\alpha f(x)] = \log_\alpha l$

3. **Si $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} q(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0$, di, en los casos que sea posible, el valor del $\lim\limits_{x \to 2}$ de las siguientes funciones:**

(Recuerda que las expresiones $(+\infty)/(+\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(0) \cdot (+\infty)$, $(1)^{(+\infty)}$, $(0)/(0)$ son indeterminaciones).

a) $2p(x) + q(x)$ **b)** $p(x) - 3q(x)$ **c)** $\dfrac{r(x)}{p(x)}$ **d)** $\dfrac{p(x)}{p(x)}$

e) $\dfrac{s(x)}{q(x)}$ **f)** $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ **g)** $s(x) \cdot p(x)$ **h)** $s(x)^{r(x)}$

i) $p(x)^{r(x)}$ **j)** $r(x)^{s(x)}$ **k)** $\dfrac{3 - r(x)}{s(x)}$ **l)** $\left[\dfrac{r(x)}{3}\right]^{s(x)}$

m) $r(x)^{p(x)}$ **n)** $r(x)^{-q(x)}$ **ñ)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)}$ **o)** $\left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} [2p(x) + q(x)] = +\infty + (+\infty) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 3q(x)] = +\infty - (+\infty)$. Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{r(x)}{p(x)} = \dfrac{3}{+\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{p(x)} = \lim\limits_{x \to 2} 1 = 1$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{q(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Indeterminado.

g) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot p(x)] = 0 \cdot (+\infty)$. Indeterminado.

h) $S(x)^{r(x)} = 0^3 = 0$

i) $\lim\limits_{x \to 2} p(x)^{r(x)} = +\infty^3 = +\infty$

j) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{s(x)} = 3^0 = 1$

k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - r(x)}{s(x)} = \dfrac{3 - 3}{(0)} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminado.

l) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{s(x)} = 1^0 = 1$

m) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{p(x)} = 3^{+\infty} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x \to 2} r(x)^{-q(x)} = 3^{-\infty} = 0$

ñ) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{p(x)} = 1^{+\infty}$. Indeterminado.

o) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{r(x)}{3}\right)^{-p(x)} = 1^{-\infty}$. Indeterminado.

Página 142

4. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x + 1)(x^2 - 3x + 5)}{(x + 1)(x - 7)} =$

$= \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 7} = \dfrac{9}{-8} = \dfrac{-9}{8}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{28}$

5. **Calcula:** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x(x + 2)} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x^2 + 1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 5x + 2) - (x + 2)(x^3 + 2x + 1)}{x(x + 2)(x^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x^2 - 5x + 2 - x^4 - 2x^2 - x - 2x^3 - 4x - 2}{x(x + 2)(x^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^3 + x^2 - 10x}{x(x + 2)(x^2 + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(-7x^2 + x - 10)}{x(x + 2)(x^2 + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^2 + x - 10}{(x + 2)(x^2 + 1)} = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$$

Página 149

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Sabemos que** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ **y** $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 3$.

¿En cuáles de los siguientes casos hay indeterminación para $x \to +\infty$**?**

En los casos en que no la haya, di cuál es el límite:

a) $f(x) + g(x)$ **b)** $g(x) + h(x)$ **c)** $\dfrac{f(x)}{h(x)}$

d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **e)** $[h(x)]^{g(x)}$ **f)** $[3 - h(x)] \cdot f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x)\big) + \lim\limits_{x \to +\infty} \big(g(x)\big) = +\infty + (-\infty) =$

$= +\infty - (+\infty) \rightarrow$ Indeterminación.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(g(x) + h(x)\big) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) + \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty + 3 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{+\infty}{3} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \rightarrow$ Indeterminación.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [h(x)]^{g(x)} = 3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{+\infty}} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} [3 - h(x)] \cdot f(x) = 0 \cdot (+\infty) \rightarrow$ Indeterminación.

2 **Calcula los límites cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{2x+5}{2-x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{10x-5}{x^2+1}$

c) $h(x) = \dfrac{3x^2-4}{2x+3}$ **d)** $i(x) = \dfrac{x^3+2x}{7+5x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+5}{2-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x+5}{2+x} = -2$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{10x-5}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-10x-5}{x^2+1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2-4}{2x+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2-4}{-2x+3} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+2x}{7+5x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3-2x}{7-5x^3} = \dfrac{1}{5}$

3 **Calcula los siguientes límites comparando los exponentes del numerador y denominador:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+6x}}{2x+1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{5x^2-7}{x+1}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{2x-3}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^3+2}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+6x}}{2x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3}\,x}{2x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{5x^2-7}{x+1}} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\sqrt{x}}{2x-3} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^3+2}} = 0$

4 **Calcula estos límites observando cuál es el infinito de orden superior:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+7})$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{e^x} = 0$

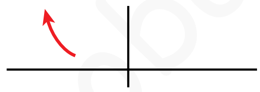
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0$

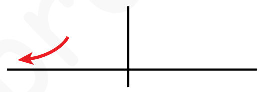
5 **Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}5^x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} (0{,}5^{-x} + 1) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x+1} = 0$



6 **Si** $\lim\limits_{x \to 2} p(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 2} q(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} r(x) = 3$ $\lim\limits_{x \to 2} s(x) = 0$

di, en los casos que sea posible, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)]$

c) $\lim\limits_{x \to 2} [r(x)]^{q(x)}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)]$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x) \cdot q(x)] = 0 \cdot (-\infty)$ $\rightarrow$ Indeterminado.

c) $\lim\limits_{x \to 2} [r(x)]^{q(x)} = 3^{-\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to 2} [p(x) - 2q(x)] = +\infty - 2(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

7 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 3}{x^3} - \dfrac{1}{x}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)}\right]$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 + 3}{x^3} - \dfrac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3 - x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x^3} = \dfrac{3}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3}{x^3} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3}{x^3} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right] = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - (x-1)}{x(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x - x + 1}{x(x-1)^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1}{x(x-1)^2} = \dfrac{2}{(0)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x + 1}{x(x-1)^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x + 1}{x(x-1)^2} = +\infty$.

8 **Calcula los límites de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$:**

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x + 1}{\log x}$

c) $h(x) = \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}}$ **d)** $i(x) = \dfrac{3^x}{2^x + 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \dfrac{5}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{\log x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\,\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x}{2^x + 1} = +\infty$

9 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{3x}{2} \right)$ **b)** $g(x) = \left(\dfrac{2x + 1}{x - 3} \right)^{1 - x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x + 1} \right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 4}{2x + 5} \right)^{x - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x + 1} - \dfrac{3x}{2} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 - 10x - 3x(x + 1)}{2(x + 1)} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 - 13x}{2x + 2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + 1}{x - 3} \right)^{1 - x} = 2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^{+\infty}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x + 1} \right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x + 4}{2x + 5} \right)^{x - 1} = \left(\dfrac{3}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$

Página 150

10 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)^2}{x - 5}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)^2}{x - 5} = \dfrac{0}{-4} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 6)(x - 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x - 6) = -5$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x + 2)(x - 1)}{2x(x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 2}{2x} = \dfrac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2(x - 3)}{x(x - 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x - 3)}{x - 1} = \dfrac{0}{-1} = 0$

11 **Averigua si estas funciones son continuas en $x = 2$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 2 \\ 6 - x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (6 - x) = 4 \\ f(2) = 6 - 2 = 4 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 2$, puesto que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x + 1) = 5 \end{array}\right\}$ $f(x)$ *no* es continua en $x = 2$, puesto que no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

12 **Estudia la continuidad de las dos funciones siguientes:**

a) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- Si $x \neq 2 \Rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2^x = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 4 = 4 \\ f(2) = 4 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) El dominio de la función es $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1 \rightarrow$ La función es continua.
- En $x = 0$: Es discontinua, puesto que $f(x)$ no está definida para $x = 0$. Además, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Hay una asíntota vertical en $x = 0$.
- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1 \\ f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } x = 1, \\ \text{pues } \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1). \end{array}$$

PARA RESOLVER

13 **a) Calcula el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$:**

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$$

b) Representa gráficamente los resultados.

a) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{x - 3}{(x - 3)(x - 2)}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

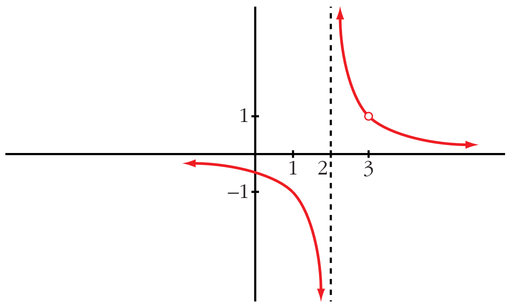
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{(0)}.$$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x-2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

b)



14 **a) Calcula el límite de la función $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ en los puntos en los que no está definida.**

b) Halla su límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$.

c) Representa la función con la información que obtengas.

d) ¿Cuáles son los puntos de discontinuidad de esta función?

a) El dominio de la función es: $D = \mathbb{R} - \{0, 3\}$, pues el denominador se anula en:

$$x^2 - 3x = 0 \quad \to \quad x(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)}$$

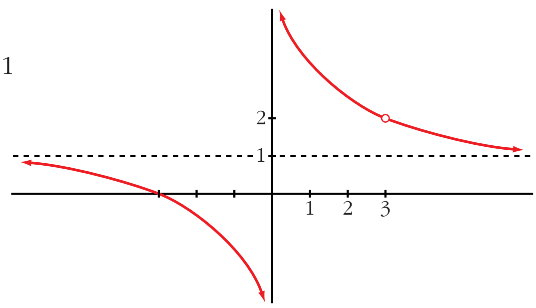
$$\lim_{x \to 0} \frac{x+3}{x} = \frac{3}{(0)}.$$

Hallamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x+3}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x+3}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{6}{3} = 2$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{x} = 1$

c)



d) La función es discontinua en $x = 0$ (tiene una asíntota vertical) y en $x = 3$ (no está definida; tiene una discontinuidad evitable).

15 **Sea la función $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x}$.**

a) Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) ¿Cuál es la función que coincide con $f(x)$ excepto en $x = 0$ y en $x = 1$?

c) ¿En qué puntos no es continua $f(x)$?

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x} = \frac{x^2(x-2)(x-1)}{x(x-1)}$$

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} [x(x-2)] = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} [x(x-2)] = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $g(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$

c) En $x = 0$ y en $x = 1$. La función no está definida en estos valores (hay discontinuidades evitables).

16 **Calcula el límite de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2x^2 - 8}$ cuando $x \to 0$, $x \to 2$ y $x \to -2$.**

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{0}{-8} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{2}{(0)}$. Hallamos los límites laterales:

  $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \dfrac{6}{(0)}$. Hallamos los límites laterales:

  $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

17 **Calcula el límite de la función $f(x) = 2 + \frac{x}{x+1}$ cuando $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ y $x \to -1$.**

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 + 1 = 3$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 + 1 = 3$

- $\lim_{x \to -1} f(x) = 2 + \frac{-1}{(0)}$. Hallamos los límites laterales:

  $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

18 **Calcula el valor que debe tener k para que las siguientes funciones sean continuas:**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 2 \\ k - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • Si $x \ne 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x + 1) = 3 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (k - x) = k - 2 \\ f(2) = 2 + 1 = 3 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser: $k - 2 = 3 \;\to\; k = 5$

b) • Si $x \ne 0$, la función es continua.

• En x = 0:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + k) = k \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 - 1) = -1 \\ f(0) = 0 + k = k \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser: $k = -1$

19 **Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \ne 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ k & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) • Si $x \ne 1$, la función es continua.

• Si $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

$f(1) = k$

Para que sea continua, ha de ser $k = 4$.

b) Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Para $x \neq 1$, $f(x)$ es continua (pues está formada por funciones continuas).

Hallamos k para que $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} k = k \\ f(1) = k \end{array}\right\}$$

Ha de ser $k = 2$.

20 **S** **Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro a:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • En $x \neq 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (a - x^2) = a - 4 \\ f(2) = 4 + 2a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 4 + 2a = a - 4 \;\;\to\;\; a = -8 \end{array}$$

Por tanto, la función es continua si $a = -8$, y es discontinua (en $x = 2$) si $a \neq -8$.

b) • En $x \neq 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{ax} = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 2a) = 2a \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 1 = 2a \;\;\to\;\; a = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Por tanto, la función es continua si $a = \frac{1}{2}$, y es discontinua (en $x = 0$) si $a \neq \frac{1}{2}$.

Página 151

21 **Se considera la función $f(x)$ definida del modo siguiente:**

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Se desea saber si es continua en todos los puntos o deja de serlo en alguno.

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 1$ $\rightarrow$ la función es continua.

- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} |x+2| = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{La función es continua en } x = -1.$$

- Si $x = 1$ $\rightarrow$ No es continua, pues no está definida en $x = 1$; no existe $f(1)$.
Además:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x+1) = 3 \end{array}\right\} \text{La discontinuidad es de salto (finito).}$$

22 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones, represéntalas gráficamente y di cuáles son sus límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.**

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \le x \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \le x \end{cases}$

- **Continuidad:**

— Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

— En $x = 0$ $\rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x+1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \\ \text{No existe } f(0). \end{array}\right.$

Hay una discontinuidad evitable en $x = 0$.

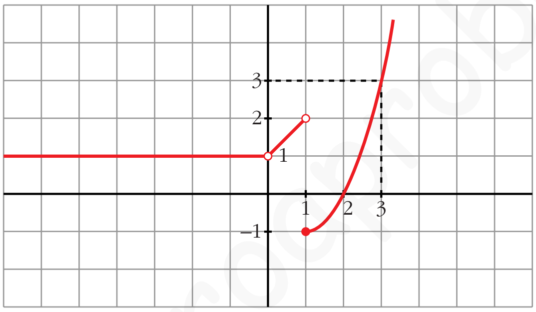
— En $x = 1 \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 2x) = -1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

Discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 = 1$

- **Gráfica:**



b) $f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$

- **Continuidad:**

— Si $x \ne 3$ y $x \ne 6 \rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

— En $x = 3 \rightarrow \left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (3x - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x - 3) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases}\right\} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

$f(x)$ es continua en $x = 3$.

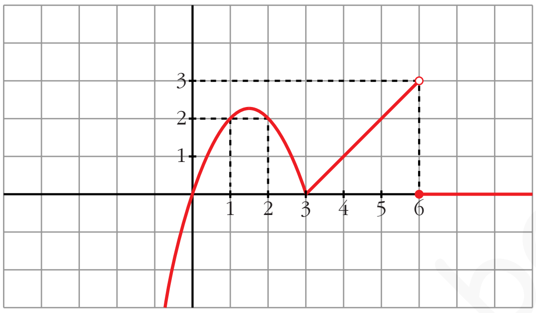
— En $x = 6 \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 6^-} (x - 3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 6^+} 0 = 0 \\ f(6) = 0 \end{cases}$

Discontinuidad de salto finito en $x = 6$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x - x^2) = -\infty$

- **Gráfica:**



23 S **Representa gráficamente la función $f(x)$ y estudia su continuidad:**

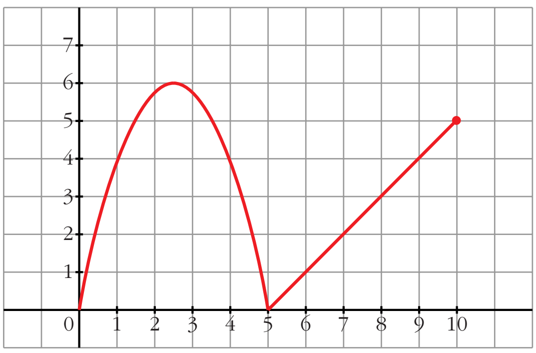
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } \ 0 \le x \le 5 \\ x - 5 & \text{si } \ 5 \le x \le 10 \end{cases}$$

$$f(x) = \left.\begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } \ 0 \le x \le 5 \\ x - 5 & \text{si } \ 5 \le x \le 10 \end{cases}\right\} \ \text{Dominio} = [0,\ 10]$$

- **Continuidad:** Si $x \in [0,\ 5) \cup (5,\ 10]$, es continua, pues está formada por funciones continuas.

En $x = 5$ $\rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} (-x^2 + 5x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} (x - 5) = 0 \\ f(5) = 0 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = f(5)$. Es continua

- **Gráfica:**



24 **S** **Dada la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}}$$

calcula el valor de b para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$. ¿Es continua en $x = 1$?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

- Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$, ha de tenerse que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(\frac{1}{x^2} + b\right) = 1 + b \\ \displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (3x^2 + 4) = 7 \\ f(-1) = 1 + b \end{array} \right\} \text{ Ha de ser } 1 + b = 7; \text{ es decir, } b = 6.$$

- Veamos que la función también es continua en $x = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x^2 + 4) = 7 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x^3 + 8) = 7 \\ f(1) = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \\ f(x) \text{ es continua en } x = 1 \end{array}$$

25 **S** **Representa, estudia la continuidad y halla los límites para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$ de la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- **Continuidad:**

— Si $x \ne 1$ y $x \ne 2$ $\to$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

— En $x = 1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2^x = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2 = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1). \\ f(x) \text{ es continua en } x = 1. \end{array}$

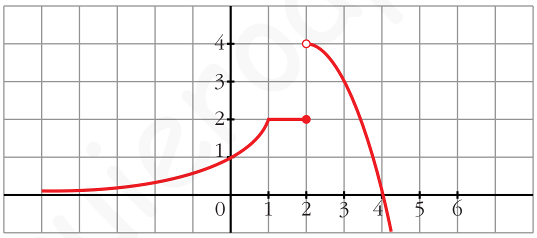
— En $x = 2 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x^2 + 4x) = 4 \\ f(2) = 2 \end{array}\right.$

Discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 4x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = 0$

• **Gráfica:**



26 **S** **Sea** $\boldsymbol{f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{array}\right.}$

Estudia su continuidad y represéntala gráficamente.

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{array}\right.$$

• **Continuidad:**

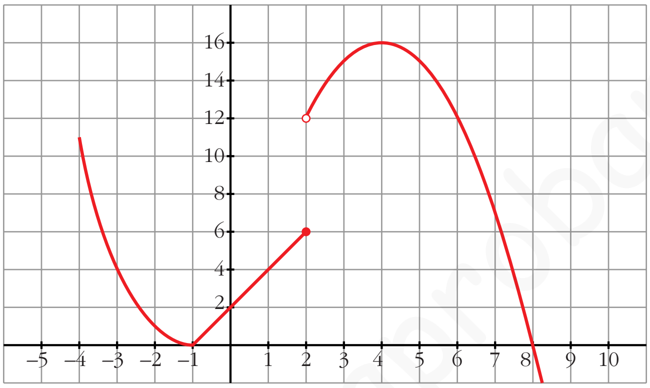
— Si $x \ne -1$ y $x \ne 2 \rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

— En $x = -1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (2x + 2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) \\ f(x) \text{ es continua} \\ \text{en } x = -1. \end{array}$

— En $x = 2$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2x + 2) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x^2 + 8x) = 12 \\ f(2) = 6 \end{cases}$

Discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

• **Gráfica:**



27 **S** **Dada** $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

Estudia su continuidad y represéntala gráficamente.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

• **Continuidad:**

— Si $x \ne 0$ y $x \ne 3$ $\rightarrow$ Es continua (está formada por funciones continuas).

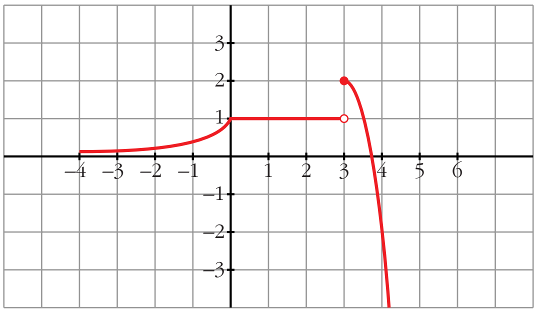
— En $x = 0$ $\rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\}$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$f(x)$ es continua en $x = 0$.

— En $x = 3$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{cases}$

Discontinuidad de salto finito en $x = 3$.

• **Gráfica:**



28 **S** **El número de individuos, en millones, de una población, viene dado por la función:**

$$P(t) = \frac{15 + t^2}{(t+1)^2}, \text{ donde } t \text{ se mide en años transcurridos desde } t = 0.$$

Calcula:

a) La población inicial.

b) El tamaño de la población a largo plazo.

a) $P(0) = 15$ millones de individuos.

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{15 + t^2}{(t+1)^2} = 1$ millón de individuos.

29 **S** **Una empresa ha establecido para sus empleados un incentivo (en cientos de euros) en relación con el valor x (en cientos de euros) de lo vendido por cada uno. Dicho incentivo sigue la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}01\,x & \text{si } 0 \le x \le 100 \\ \dfrac{30x}{2x + 2\,300} & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$. Indicar si el incentivo recibido por un empleado es sensiblemente distinto si el valor de las ventas es ligeramente superior o inferior a 10 000 €.

b) ¿Cuál es la cantidad máxima que un empleado podría recibir como incentivo si sus ventas fueran muy grandes? Justifica tu respuesta.

a) Dominio = $[0, +\infty)$

— Si $x \neq 100$ $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por funciones continuas en los intervalos definidos.

— En $x = 100$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 100^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 100^-} 0{,}01x = 1 \quad (100\text{ €}) \\ \lim\limits_{x \to 100^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 100^+} \dfrac{30x}{2x + 2\,300} = 1{,}2 \quad (120\text{ €}) \\ f(100) = 1 \quad (100\text{ €}) \end{cases}$

Hay una discontinuidad de salto finito en $x = 100$.

Como $\lim\limits_{x \to 100^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 100^+} f(x)$, el incentivo recibido por un empleado sí es sensiblemente distinto si el valor de sus ventas es ligeramente superior o inferior a 10 000 € $(x = 100)$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{30x}{2x + 2\,300} = 15 \;\rightarrow\; 1\,500$ €

30 S **Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función**

$f(t) = \dfrac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2}$, siendo t el número de años transcurridos. Se pide:

a) Tamaño actual de la población.

b) ¿Cómo evoluciona el tamaño de la población entre los años 4 y 9?

c) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Justifica la respuesta.

a) $f(0) = 5\,000$ individuos.

b) T.V.M. $[4, 9] = \dfrac{f(9) - f(4)}{9 - 4} = \dfrac{7\,250 - 7\,000}{5} = \dfrac{250}{5} = 50$

Aumenta en 250 individuos, lo que supone un aumento medio de 50 por año.

c) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2} = 7\,500$

Se estabilizaría en 7 500 individuos.

Página 152

31 S **Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que:**

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x + 30}, & 0 \leq x \leq 30 \\[2mm] \dfrac{1\,125}{(x - 5)(x - 15)} + 2, & x > 30 \end{cases}$$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.

b) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿Y en menos de 2?

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x+30}, & 0 \le x \le 30 \\ \dfrac{1\,125}{(x-5)(x-15)} + 2, & x > 30 \end{cases}$$

a) • La función $y = \dfrac{300}{x+30}$ es continua, salvo en $x = -30$; pero, como solo la consideramos en $0 \le x \le 30$, será continua en el intervalo $(0, 30)$.

• La función $y = \dfrac{1\,125}{(x-5)(x-15)} + 2$ es continua, salvo en $x = 5$ y en $x = 15$; pero como la estamos considerando para $x > 30$, es continua en el intervalo $(30, +\infty)$.

• Por tanto, si $x \ne 30$ $\big(x \in [0, 30) \cup (30, +\infty)\big)$, la función $T(x)$ es continua.

• Si $x = 30$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 30^-} T(x) = \lim\limits_{x \to 30^-} \dfrac{300}{x+30} = 5 \\ \lim\limits_{x \to 30^+} T(x) = \lim\limits_{x \to 30^+} \left(\dfrac{1\,125}{(x-5)(x-15)} + 2\right) = 5 \\ T(30) = 5 \end{array}\right\} \; T(x) \text{ es continua en } x = 30.$$

• Por tanto, $T(x)$ es continua en su dominio.

b) $T(0) = 10$ minutos; y, a mayor tiempo de entrenamiento, menos tardan en realizar la prueba. Además:

$$\lim\limits_{x \to +\infty} T(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1\,125}{(x-5)(x-15)} + 2\right) = 2$$

Por tanto, ningún deportista sería capaz de realizar la prueba en menos de 1 minuto ni en menos de 2 minutos.

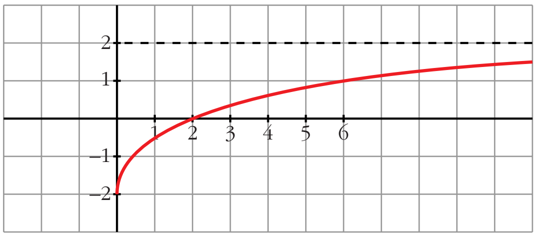
32 **Se ha comprobado que las pérdidas o ganancias de una empresa se ajustan a la función $y = \dfrac{2x-4}{x+2}$, siendo x los años de vida de la empresa $(x \ge 0)$ e y en cientos de miles de €.**

a) Representa la función.

b) ¿En qué año deja de tener pérdidas?

c) ¿Están limitados sus beneficios? Si lo están, ¿cuál es su límite?

a)



b) $\dfrac{2x-4}{x+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ (y la función es creciente).

Deja de tener pérdidas en el 2º año ($x = 2$).

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-4}{x+2} = 2 \quad \to \quad 200\,000$ €

El beneficio está limitado a 200 000 €.

33 **Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:**

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran “muchísimas” unidades?

☛ ***El precio de una unidad es $C(x)/x$.***

a) $\lim\limits_{x \to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^-} (5x) = 50$

$\lim\limits_{x \to 10^+} C(x) = \lim\limits_{x \to 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$

$C(10) = 50$

Para que sea continua, ha de ser:

$\sqrt{100a + 500} = 50 \quad \to \quad 100a + 500 = 2\,500 \quad \to \quad 100a = 2\,000 \quad \to \quad a = 20$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{C(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{ax^2 + 500}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$ €

CUESTIONES TEÓRICAS

34 **Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.**

El segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando $x = 2$. ¿Cómo elegir el valor de $f(2)$ para que la función f sea continua en ese punto?

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

Para que f sea continua en $x = 2$, debemos elegir $f(2) = 4$.

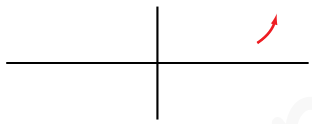
35 **Expresa simbólicamente cada una de estas frases y haz una representación gráfica de cada caso:**

a) Podemos conseguir que $f(x)$ sea mayor que cualquier número K, por grande que sea, dando a x valores tan grandes como sea necesario.

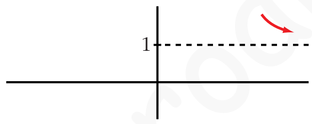
b) Si pretendemos que los valores de $g(x)$ estén tan próximos a 1 como queramos, tendremos que dar a x valores suficientemente grandes.

c) Podemos conseguir que $h(x)$ sea mayor que un número K, por grande que sea, dando a x valores suficientemente próximos a 2.

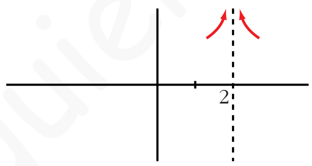
a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



b) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$



c) $\lim_{x \to 2} h(x) = +\infty$



36 **De una función g se sabe que es continua en el intervalo cerrado [0, 1] y que para $0 < x \le 1$ es:**

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

¿Cuánto vale $g(0)$?

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1.$$

Por tanto, $g(0) = 1$.

37 **Escribe una definición para cada una de estas expresiones y haz una representación de f:**

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

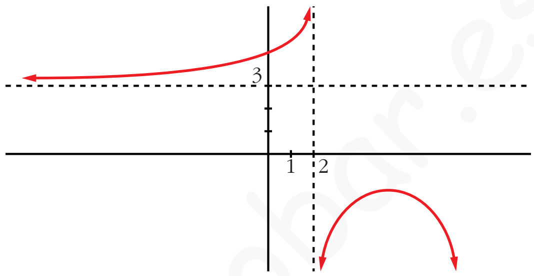
d) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

a) Podemos conseguir que $f(x)$ esté tan próximo a 3 como queramos sin más que darle a x valores suficientemente "grandes y negativos".

b) Podemos conseguir que $f(x)$ sea "tan negativo" como queramos sin más que tomar x tan grande como sea necesario.

c) Podemos conseguir que $f(x)$ tome valores tan grandes como queramos sin más que darle a x valores tan próximos a 2 (pero menores que 2) como sea necesario.

d) Podemos conseguir que $f(x)$ tome valores tan "grandes y negativos" como queramos sin más que darle a x valores tan próximos a 2 (pero mayores que 2) como sea necesario.



38 **Si una función no está definida en $x = 3$, ¿puede ocurrir que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$? ¿Puede ser continua la función en $x = 3$?**

Sí, puede ser que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$, por ejemplo:

$f(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3}$ es tal que $\lim_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = 5$; y $f(x)$ no está definida en $x = 3$.

Sin embargo, $f(x)$ no puede ser continua en $x = 3$ (pues no existe $f(3)$).

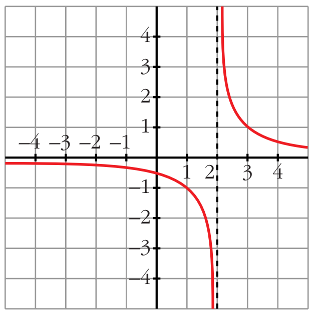
39 **De una función continua, f, sabemos que $f(x) < 0$ si $x < 2$ y $f(x) > 0$ si $x > 2$. ¿Podemos saber el valor de $\lim_{x \to 2} f(x)$?**

$\lim_{x \to 2} f(x) = 0$

Página 153

40 **Dibuja la gráfica de una función que sea negativa si $x < 2$, positiva si $x > 2$ y que no tenga límite cuando x tiende a 2.**

Por ejemplo $y = \dfrac{1}{x-2}$, cuya gráfica es:



41 **Sea P un polinomio: $P(x) = ax^2 + bx + c$**

Prueba que $\dfrac{P(x) - P(0)}{x}$ tiene límite en 0 y calcula su valor.

$$\lim_{x \to 0} \frac{P(x) - P(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx + c - c}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + bx}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(ax + b)}{x} = \lim_{x \to 0} (ax + b) = b$$

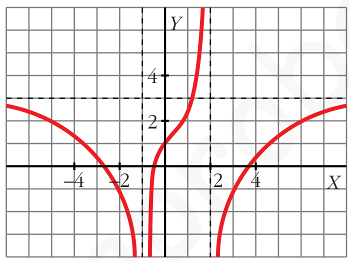
42 **Calcula sobre la gráfica de esta función:**

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

43 **Halla, observando la gráfica de esta función, los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

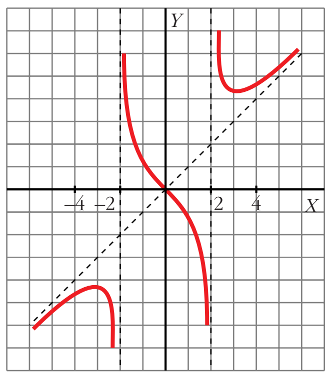
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

PARA PROFUNDIZAR

44 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones, definiéndolas previamente en intervalos, y represéntalas:**

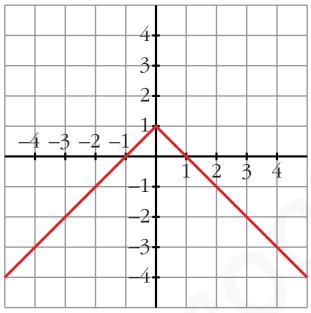
a) $y = 1 - |x|$ **b)** $y = |x - 3| - x$ **c)** $y = \dfrac{1}{|x - 1|}$

d) $y = x|x|$ **e)** $y = |x^2 - 1|$ **f)** $y = |x - 2| + |x|$

a) • Es continua en $\mathbb{R}$, pues es la diferencia de dos funciones continuas.

• $y = 1 - |x| = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

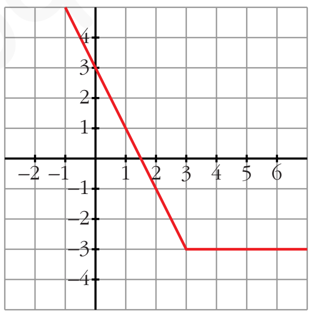
• **Gráfica:**



b) • Es continua en $\mathbb{R}$, pues es la diferencia de dos funciones continuas.

• $y = |x - 3| - x = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 3 \\ -3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

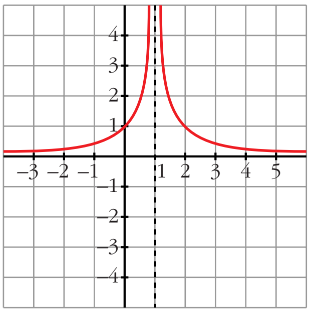
• **Gráfica:**



c) • Es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

• $y = \dfrac{1}{|x - 1|} = \begin{cases} \dfrac{1}{-x + 1} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

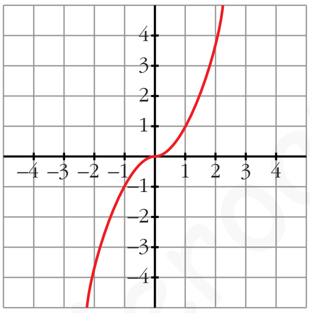
• **Gráfica:**



d) • Es continua en $\mathbb{R}$, pues es el producto de dos funciones continuas.

• $y = x|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

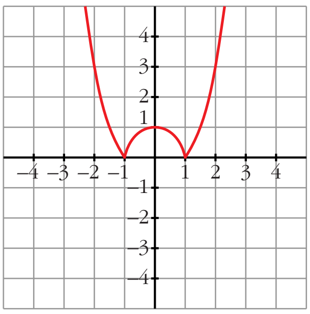
• **Gráfica:**



e) • Es continua en $\mathbb{R}$.

• $y = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

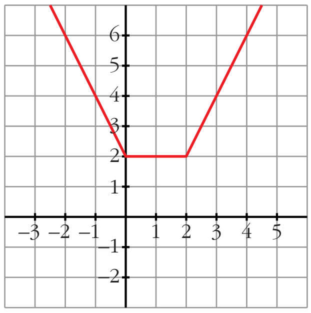
• **Gráfica:**



f) • Es continua en $\mathbb{R}$, pues es la suma de dos funciones continuas.

• $y = |x - 2| + |x| = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- **Gráfica:**



45 **Representa y estudia la continuidad de la función siguiente:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le -1 \\ |x^2 - x - 2| & \text{si } -1 < x \end{cases}}$$

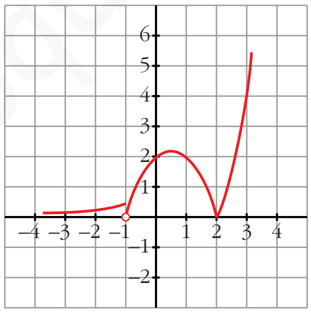
- **Continuidad:**

— Si $x \neq -1 \;\rightarrow\;$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

— En $x = -1 \;\rightarrow\; \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} e^x = e^{-1} = 1/e \\ \displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} |x^2 - x - 2| = 0 \\ f(-1) = 1/e \end{cases}$

Hay una discontinuidad de salto finito en $x = -1$.

- **Gráfica:**



46 **Estudia la continuidad de la función** $\boldsymbol{y = 2x + \dfrac{|x|}{x}}$ **en** $\boldsymbol{x = 0}$**. ¿Qué tipo de discontinuidad tiene?**

En $x = 0$, la función no está definida, luego es discontinua. Como:

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ entonces: } \lim_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1; \quad \lim_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto (finito) en $x = 0$.

47 **Dada $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$, justifica que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

48 **Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)$.**

☛ ***Multiplica y divide por $\sqrt{x^2+3x} + x$***

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)}{\sqrt{x^2+3x} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

49 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-4}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x} - x}$

a) $$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-4}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-4}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-4}\right)\left(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-4}\right)}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2-(x^2-4)}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-4}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2-x^2+4}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-4}} = 0$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x} - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x} + x}{\left(\sqrt{x^2+4x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+4x} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x} + x}{x^2+4x-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x} + x}{4x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2} + x}{4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+x}{4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{4x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

50 **Calcula:** $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \right]$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{3x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{3x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1+x-1+x}{3x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{3\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$$

51 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{3-x}}{x-2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2}$

a) $$\lim_{x \to 2} \frac{1 - \sqrt{3-x}}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\left(1 - \sqrt{3-x}\right)\left(1 + \sqrt{3-x}\right)}{(x-2)\left(1 + \sqrt{3-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1 - (3-x)}{(x-2)\left(1 + \sqrt{3-x}\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{1-3+x}{(x-2)\left(1 + \sqrt{3-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)\left(1 + \sqrt{3-x}\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{1 + \sqrt{3-x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+9} - 3\right)\left(\sqrt{x+9} + 3\right)}{x^2\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x+9-9}{x^2\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} = \frac{1}{(0)}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x\left(\sqrt{x+9} + 3\right)} = +\infty$$