1º.- Dados los vectores $\vec{a} = 3i + 2j - k$ y $\vec{b} = i - j$, calcular:

a) $|\vec{a} - \vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a} \times \vec{b}| =$

b) El ángulo que forman $2\vec{a} + \vec{b}$ con $\vec{a} + 2\vec{b}$

c) El vector proyección de $\vec{a} + \vec{b}$ sobre $\vec{a}$

Solución:

a)

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |2, 3, -1| = \sqrt{14} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right| = 3\sqrt{3}$$

luego $|\vec{a} - \vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{14} + 1 + 3\sqrt{3}$

b)

$$\cos(\alpha) = \frac{[7, 3, -2] \cdot [5, 0, -1]}{|[7, 3, -2]| \cdot |[5, 0, -1]|} = \frac{37}{\sqrt{62} \cdot \sqrt{26}}$$

c)

$$\vec{a} + \vec{b} = [4, 1, -1] = \vec{c}$$

$$P_{\vec{c} \text{ sobre } \vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{14}} = \frac{15}{\sqrt{14}}$$

Luego:

$$\overrightarrow{P_{\vec{c} \text{ sobre } \vec{a}}} = \frac{15}{\sqrt{14}} \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{15}{\sqrt{14}} \cdot \frac{[3, 2, -1]}{\sqrt{14}} = \left[\frac{45}{14}, \frac{15}{7}, \frac{-15}{14} \right]$$

……………………………………………………………………………………………

2º.- Demostrar que los vectores $\vec{u} = i + 3j - 5k$; $\vec{v} = i - j + k$ y $\vec{w} = -j + k$ forman una base en V^3 y encontrar las coordenadas del vector j en la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{los vectores son linealmente independientes} \Rightarrow \text{pueden ser} \\ \text{una base en } V^3 \end{cases}$$

Sean $[x, y, z]$ las coordenadas del vector j en $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, entonces:

$$(0,1,0) = x(1,3,-5) + y(1,-1,1) + z(0,-1,1)$$

que resolviendo nos da: $[x, y, z] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -3]$

3º.- Demostrar que los vectores $\vec{a} = 3i + 2j + k$ y $\vec{b} = 2i - j - 4k$ podrían ser los catetos de un triángulo rectángulo; en ese caso:

a) ¿cuánto mediría la hipotenusa
b) ¿cuál sería su área?
c) ¿cuánto mediría la altura sobre la hipotenusa?

Solución:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{a} \text{ y } \vec{b}$$ son perpendiculares, luego podrían ser los catetos de un triángulo rectángulo

a) En el caso de tener un triángulo rectángulo con esos catetos, la hipotenusa mediría:

$$\text{hipotenusa} = \sqrt{|[3,2,1]|^2 + |[2,-1,-4]|^2} = \sqrt{35} \text{ unidades de longitud}$$

b)

Su área será:

$$S = \frac{1}{2} |[3,2,1]| \cdot |[2,-1,-4]| = \frac{1}{2}\sqrt{14 \cdot 21} = \frac{7}{2}\sqrt{6} \text{ unidades de área}$$

c) El área de un triángulo rectángulo se puede calcular dividiendo por dos el producto de los catetos o dividiendo por dos el producto de la hipotenusa por la altura sobre ella; luego:

$$h_{\text{sobre la hipotenusa}} = \frac{2 \cdot S}{hipotenusa} = \frac{2 \cdot \frac{7}{2}\sqrt{6}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{210}}{5} \text{ unidades de longitud}$$