1º)

Dado el punto $A(1,2,-1)$ , la recta $r \equiv \frac{x-2}{3} = y-1 = -z$ y el plano $\pi \equiv x+y-z+2=0$

Calcular:

a) La distancia del punto $A$ al plano $\pi$

**Solución:**

$$d_{(A,\pi)} = \frac{1+2+1+2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ unidades de longitud}$$

b) La distancia del punto $A$ a la recta $r$

**Solución:**

$$d_{(A,r)} = \frac{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right|}{|[3,1,-1]|} = \frac{|[0,-4,-4]|}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{22}}{11} \text{ unidades de longitud}$$

c) La longitud del segmento $\overline{AB}$ , siendo $B$ el punto de intersección de la recta $r$ con el plano $\pi$

**Solución:**

La recta y el plano se cortan en el punto:

$$B: \quad 2+3\lambda+1+\lambda+\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow (-1,0,1), \text{ luego}$$

$$d_{(A,B)} = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{3} \text{ unidades de longitud}$$

d) Los puntos $C$ y $D$ en la recta $r$ que distan $\sqrt{3}$ unidades del punto A.

**Solución:**

Los puntos buscados son los que cumplen la ecuación:

$$(2+3\lambda-1)^2+(1+\lambda-2)^2+(-\lambda+1)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 11\lambda^2+2\lambda=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -\frac{2}{11} \end{cases}$$

es decir los puntos: $(2,1,0)$ y $\left(\frac{16}{11}, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$

e) El volumen del tetraedro que tiene tres de sus vértices en los puntos $A, B$ y $C$ y otro en el origen de coordenadas.

**Solución:**

Si consideramos como $C$ el punto $(2,1,0)$, el volumen buscado es :

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ unidades de volumen}$$

Si consideramos que el punto $C$ es $\left(\frac{16}{11}, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{16}{11} & \frac{9}{11} & \frac{2}{11} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6} \times \frac{36}{11} = \frac{6}{11} \text{ unidades de volumen}$$

---

2º) Calcula el lugar geométrico de todos los puntos que pertenecen a una mediatriz del segmento de extremos $A(2,4,3)$ y $B(0,0,1)$

**Solución:**

Las mediatrices del segmento $\overline{AB}$ generan un plano perpendicular al segmento en su punto medio; es decir, un plano que contiene el vector normal $[2,4,2] \Leftrightarrow [1,2,1]$ y qque pasa por el punto $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \Leftrightarrow (1,2,2)$

$$x + 2y + z + d = 0 \Rightarrow 1 + 4 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = -7$$

Así el lugar geométrico buscado es el plano: $x + 2y + z - 7 = 0$