Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Abril 2012

Problema 1 Se supone que el tiempo medio diario dedicado a ver TV en una cierta zona se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 5 minutos. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 espectadores de TV en dicha zona, obteniéndose que el tiempo medio diario dedicado a ver TV es de 3 horas.

a) Determínese un intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error en la estimación de μ sea menor o igual que 3 minutos, con un nivel de confianza del 90 %?

(Madrid Junio 2011)

Solución:

a) $N(\mu, 15)$, $n = 400$, $\overline{X} = 180$ minutos y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (178,53; 181,47)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 67,65$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 68$

Problema 2 Se supone que el precio (en euros) de un refresco se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0,09. Se toma una muestra aleatoria simple del precio del refresco en 10 establecimientos y resulta:

$$1,50;\quad 1,60;\quad 1,10;\quad 0,90;\quad 1,00;\quad 1,60;\quad 1,40;\quad 0,90;\quad 1,30;\quad 1,20$$

a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Calcúlese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra elegida para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestral y la μ sea menor o igual que 0,10 euros con probabilidad mayor o igual que 0,99.

(Madrid Junio 2011)

Solución:

a) $N(\mu, 0{,}09)$, $n = 10$, $\overline{X} = 1{,}25$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1{,}194; 1{,}306)$$

b) $z_{\alpha/2} = 2{,}575$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E}\right)^2 = 5{,}37$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 6$

Problema 3 La edad a la que obtienen el permiso de conducir los habitantes de una determinada población es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 24 años y desviación típica 4 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 habitantes de dicha población. Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de obtención del permiso de conducir.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$?

b) Halle un intervalo de confianza al 90 % para $\overline{X}$.

(Aragón Junio 2011) **Solución:**

a) $X \equiv N(24, 4) \Longrightarrow \overline{X} \equiv N\left(24, \frac{4}{\sqrt{100}}\right) = N(24; 0{,}4)$

b) $z_{\alpha/2} = 1{,}645$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (23{,}34; 24{,}66)$$

Problema 4 El número de vehículos que pasan por un determinado semáforo de Móstoles entre las 09:00 y las 09:15 siguen una distribución normal de media 30 y una desviación típica de 5 coches. Se pide calcular:

a) La probabilidad de que pasen menos de 28 coches un día elegido al azar en el intervalo horario de 09:00 a 09:15.

b) La probabilidad de que pasen más de 34 coches un día elegido al azar en el intervalo horario de 09:00 a 09:15.

c) La probabilidad de que pasen entre 22 y 31 coches un día elegido al azar en el intervalo horario de 09:00 a 09:15.

Solución:

a) $P(X \leq 28) = P\left(Z \leq \dfrac{28-30}{5}\right) = P\left(Z \leq -0,4\right) = 1 - P\left(Z \leq 0,4\right) = 1 - 0,6554 = 0,3446$

b) $P(X \geq 34) = P\left(Z \geq \dfrac{34-30}{5}\right) = P\left(Z \geq 0,8\right) = 1 - P\left(Z \leq 0,8\right) = 1 - 0,7881 = 0,2119$

c) $P(22 \leq X \leq 31) = P\left(\dfrac{22-30}{5} \leq Z \leq \dfrac{31-30}{5}\right) = P(-1,6 \leq Z \leq 0,2) = P(Z \leq 0,2) - P(Z \leq -1,6) = P(Z \leq 0,2) - (1 - P(Z \leq 1,6)) = 0,5793 - (1 - 0,9452) = 0,5245$

Problema 5 Seguimos con el problema anterior: Años más tarde queremos contrastar si la cantidad de coches que pasan por el semáforo se siguen comportando como la normal $N(30,5)$. Para ello hacemos 10 medidas durante varios días en el mismo intervalo horario y hemos obtenido los siguientes resultados:

25, 27 31 22 20 33 32 28 30 27

Se pide:

a) Calcular la distribución de la media muestral.

b) Con esta nueva media, calcular la probabilidad de que ésta sea mayor de 33.

c) Calcular el intervalo de confianza para esta media con un nivel de confianza del 95 %

d) Decidir si la media ha variado lo suficiente como para considerar que la antigua media es obsoleta.

Solución:

a) $\overline{X} \approx N\left(27,5; \dfrac{5}{\sqrt{10}}\right) = N(27,5; 1,58)$

b) $P(\overline{X} \geq 33) = P\left(Z \geq \dfrac{33-27,5}{1,58}\right) = P\left(Z \geq 3,48\right) = 1 - P\left(Z \leq 3,48\right) = 1 - 0,9998 = 0,0002$

c) $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (24,403; 30,597)$$

d) Como el intervalo de confianza contiene a 30 podemos considerar que la antigua media es todavía válida.