PROPIEDADES DE MATRICES Y DETERMINANTES

(a) Suma de matrices y multiplicación de un escalar por una matriz:

1. $A+B=B+A$
2. $A+\left(B+C\right)=\left(A+B\right)+C$
3. $\alpha\left(A+B\right)=\alpha A+\alpha B$
4. $\left(\alpha+\beta\right)A=\alpha A+\beta A$
5. $\alpha\left(\beta A\right)=\left(\alpha\beta\right)A$
6. $A+0=A$
7. $A+\left(-A\right)=0$

$\left.\begin{matrix}6.\\7.\end{matrix}\right\}$ Donde "0" es la matriz nula

(b) Multiplicación de matrices:

1. $A\left(B+C\right)=AB+AC$
2. $\left(A+B\right)C=AC+BC$
3. $A\left(BC\right)=\left(AB\right)C$
4. $\alpha\left(AB\right)=\left(\alpha A\right)B=A\left(\alpha B\right)$
5. $A0_n=0_nA=0_n$
6. $BI_n=I_nB=B$
7. En general, $AB\neq BA$ (la multiplicación no es conmutativa)
8. $AB=0$ no implica necesariamente que $A=0$ ó $B=0$
9. $AB=AC$ no implica necesariamente que $B=C$

(c) Propiedades de la traza:

1. $tr\left(A+B\right)=tr\left(A\right)+tr\left(B\right)$
2. $tr\left(AB\right)=tr\left(BA\right)$
3. $tr\left(\alpha A\right)=\alpha\cdot tr\left(A\right)$
4. $tr\left(A^T\right)=tr\left(A\right)$

(d) Propiedades de matrices diagonales:

Si A y B son matrices diagonales:

1. $A+B=diag\left(a_{11}+b_{11},a_{22}+b_{22},\ldots,a_{nn}+b_{nn}\right)$
2. $AB=diag\left(a_{11}b_{11},a_{22}b_{22},\ldots,a_{nn}b_{nn}\right)$
3. $\alpha A=diag\left(\alpha a_{11},\alpha a_{22},\ldots,\alpha a_{nn}\right)$

(e) Propiedades de la inversa:

1. A^{-1} es única
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
3. $\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
4. $\left(\alpha A\right)^{-1}=\dfrac{1}{\alpha}A^{-1}\quad\forall\,\alpha\neq0$
5. $\left(A^n\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^n$
6. $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$
7. $A^{-1}=\dfrac{1}{\det\left(A\right)}\left(Adj\,A\right)$ donde $Adj\,A$ es la adjunta de A

(f) Propiedades de la transpuesta:

1. $\left(A^T\right)^T=A$
2. $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$
3. $\left(AB\right)^T=B^TA^T$
4. $\left(\alpha A\right)^T=\alpha A^T$

(g) Propiedades de matrices simétricas/antisimétricas:

Si A es una matriz cuadrada:

1. $A+A^T$ = matriz simétrica
2. $A-A^T$ = matriz antisimétrica

Si A y B son matrices simétricas/antisimétricas:

3. $A+B$ también es simétrica/antisimétrica
4. αA también es simétrica/antisimétrica
5. AB no necesariamente es simétrica/antisimétrica

(h) Matriz ortogonal:

1. $A^T = A^{-1}$
2. $AA^T = A^T A = I$

(i) Propiedades de la conjugada:

1. $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$
2. $\overline{(A+B)} = \overline{A}+\overline{B}$
3. $\overline{(AB)} = \overline{A}\cdot\overline{B}$ (en este orden)
4. $\overline{(\alpha A)} = \overline{\alpha}\cdot\overline{A}$

(j) Propiedades de la conjugada-transpuesta:

1. $\left(A^*\right)^* = A$
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$
3. $(AB)^* = B^* A^*$
4. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}\cdot A^*$

(k) Propiedades de los determinantes:

1. El valor de un determinante no varía si se intercambian sus filas por sus columnas; es decir: $\det(A) = \det\left(A^T\right)$

2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ donde n es el orden de A

3. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

4. $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$ suponiendo que A^{-1} existe

5. Si todos los elementos de una fila o columna de un determinante son nulos, el valor del determinante es nulo.
6. Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales, el valor del determinante es cero.
7. Si un determinante tiene dos filas o columnas proporcionales, el valor del determinante es cero.
8. Si todos los elementos de una fila o columna se multiplican por un mismo escalar, el valor del determinante queda multiplicado por dicho escalar.
9. Si en un determinante se intercambian dos de sus filas o columnas, el valor del determinante cambia de signo, pero mantiene su valor absoluto.
10. Si a una fila o columna de un determinante se le suma el múltiplo de cualquier otra (fila o columna), el valor del determinante no varía.
11. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.
12. Si $\det(A)=0$, A es una matriz singular.
13. Si $\det(A)\neq 0$, A es una matriz no singular.

(l) Propiedad de la adjunta:

1. $A(Adj\ A) = (Adj\ A)A = \det(A)\cdot I_n$
donde A es una matriz cuadrada de orden n