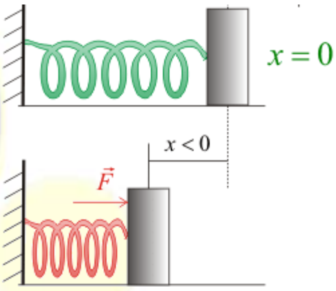
Nombre:		2º Bachillerato B

Instrucciones:	a) Duración: 1 hora y 30 minutos. b) No pueden utilizar calculadora programable, ni gráfica ni con capacidad para almacenar o transmitir datos c) Los problemas (1) y (2) se calificará con hasta 4 puntos, mientras que el (3) con hasta 2 puntos. d) Para obtener la máxima puntuación debe realizar un esquema del problema y explicar los pasos que se dan.

(1) *Un cuerpo de 10 kg se lanza con una velocidad de 30 m·s^{-1} por una superficie horizontal lisa hacia el extremo libre de un resorte horizontal de masa despreciable y de constante elástica 200 N/m, fijo por el otro extremo, después del impacto el cuerpo queda "enganchado" al resorte realizando un MAS.*

a) Analice las variaciones de energía que tienen lugar a partir de un instante anterior al impacto con el resorte y calcule la máxima compresión del resorte. (Ayúdate de dibujos).
b) Escriba la ecuación del movimiento, siendo el origen de tiempos el momento del impacto y calcule su frecuencia y periodo.
c) Discuta en términos energéticos las modificaciones relativas al apartado a) si la superficie horizontal tuviera rozamiento.

a) Justo antes del choque con el muelle, el cuerpo se acerca con una velocidad de 30 m/s, y por tanto con una energía cinética $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 30^2 = 4500\ J$, una vez realizado el choque con el muelle, como la masa de éste es despreciable, debido al principio de conservación del momento lineal, $\vec{P}_{antes} = \vec{P}_{Después} \quad \Rightarrow \quad m \cdot v = (m + m') \cdot v' \quad \Rightarrow \quad v = v'$ la velocidad antes del choque es la misma que la velocidad después y por tanto la energía cinética también lo es y el muelle empieza a comprimirse, y por tanto la energía cinética inicial del cuerpo empieza a transformarse en energía potencial elástica, hasta el punto de compresión máxima del muelle en el que la energía potencial es máxima y la cinética es nula.



Como la energía cinética se convierte en potencial elástica, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \\ E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \end{array}\right\} \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad m \cdot v^2 = k \cdot x^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot v = \pm\sqrt{\frac{10}{200}} \cdot 30 = \pm 6{,}7 m$$

Donde x es la máxima compresión-estiramiento que sufre el muelle.

Después, cuando el muelle empieza a estirarse, la energía potencial elástica se transforma en cinética y cuando pasa por el punto de equilibrio (origen) toda la potencial elástica se habrá convertido en cinética, y por tanto en ese punto la cinética es máxima y la potencial nula. A partir de este punto, el muelle sigue estirándose y la cinética empieza a convertirse otra vez en potencial elástica hasta el punto de estiramiento máximo, en el que ocurre que la cinética es nula y la potencial elástica máxima. Después de esto, el muelle vuelve a comprimirse y la potencial elástica se transforma en cinética hasta que pasamos por el punto de equilibrio en el que otra vez la cinética es máxima y la potencial nula, así sucesivamente.

b) La ecuación de este movimiento es la de un movimiento armónico simple y atiende a: $x = A \cdot Sen(\omega t + \varphi_o)$, donde A es la compresión máxima del muelle calculada con anterioridad A=6,7m, y la pulsación la calculamos mediante: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{10}} = 2\sqrt{5}\ rad \cdot s^{-1}$, con todo esto la ecuación queda: $x = 6{,}7 \cdot Sen(2\sqrt{5}t + \varphi_o)$ y solo nos faltaría calcular el desfase inicial, para el que utilizamos que en el instante inicial la posición es x=0, por tanto si en t=0 $0 = 6{,}7 \cdot Sen(\varphi_o) \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 0$.

Así que con todo esto, la ecuación del movimiento es:

$$x = 6,7 \cdot Sen\left(2\sqrt{5}t\right) \text{ m}$$

Para calcular el periodo, conocida la pulsación, $\omega = 2\sqrt{5}\ rad \cdot s^{-1}$ lo despejamos de $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y obtenemos:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\sqrt{5}} = \frac{\pi\sqrt{5}}{5} = 1,4s$$

Y como la frecuencia es la inversa del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = 0,71\ Hz$$

c) Si la superficie tiene rozamiento, la energía cinética irá disminuyendo con el tiempo puesto que la velocidad irá disminuyendo a razón $v = 30 - \mu \cdot g \cdot t$, debido a una aceleración $a = -\mu \cdot g$.

Por tanto, antes del choque con el muelle la energía cinética será menor que en el caso que no haya rozamiento, y debido a esto el muelle se comprimirá menos, el cuerpo tendría un movimiento de vaivén en el que cada vez pierde más energía hasta que acaba parándose.

***(2)** De cierta onda se sabe que tiene una amplitud máxima de 8 m, que se desplaza de izquierda a derecha con una velocidad de 3 m/s, y que la mínima distancia entre dos puntos que vibran en fase es de 10 m.*

a) Escribe su ecuación.

b) Escribe la ecuación de otra onda idéntica pero desplazándose en sentido contrario.

c) Escribe la ecuación de la onda resultante de la interferencia que se produce entre las dos ondas anteriores e indica sus características.

d) Calcula las posiciones de los nodos y los vientres de esta onda resultante.

Haced un dibujo en donde se vean los resultados obtenidos.

a) La ecuación de este movimiento atiende a: $y = A \cdot sen(\omega t - kx)$, puesto que se desplaza de izquierda a derecha. Si la amplitud máxima es 8m, tenemos que A=8, si su velocidad de propagación es de 3 m·s^{-1}, como $v = \frac{\lambda}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\lambda}{v}$, necesitamos λ, como nos dicen que la mínima distancia entre dos puntos en fase es 10 metros, en realidad nos están dando la longitud de onda, así que $\lambda = 10m$, $T = \frac{\lambda}{v} = \frac{10m}{3m \cdot s^{-1}} = \frac{10}{3}s$. Conocido el periodo como $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{10}{3}} = \frac{6\pi}{10} = \frac{3\pi}{5} rad \cdot s^{-1}$. Y el número de ondas lo calculamos mediante: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{5} m^{-1}$, así que con todo esto, la ecuación de la onda queda de la forma:

$$y = 8 \cdot sen\left(\frac{3\pi}{5}t - \frac{\pi}{5}x\right) \text{m.}$$

b) La ecuación de otra onda que se desplaza en sentido contrario es igual que la anterior, pero cambiando el signo de –kx por el de + kx, así que esta onda será:

$$y = 8 \cdot sen\left(\frac{3\pi}{5}t + \frac{\pi}{5}x\right)$$

c) Si sumamos estas dos ondas, obtenemos una interferencia, y nos da lugar a una onda estacionaria.

Una **onda estacionaria** se forma por la interferencia de dos ondas de la misma naturaleza con igual amplitud, longitud de onda (o frecuencia) que avanzan en sentido opuesto a través de un medio.

Las ondas estacionarias permanecen confinadas en un espacio (cuerda, tubo con aire, membrana, etc.). La amplitud de la oscilación para cada punto depende de su posición, la frecuencia es la misma para todos y coincide con la de las ondas que interfieren. Hay puntos que no vibran (nodos), que permanecen inmóviles, estacionarios, mientras que otros (vientres o antinodos) lo hacen con una amplitud de vibración máxima, igual al doble de la de las ondas que interfieren, y con una energía máxima. El nombre de onda estacionaria proviene de la aparente inmovilidad de los nodos. La distancia que separa dos nodos o dos antinodos consecutivos es media longitud de onda.

Una onda estacionaria se puede formar por la suma de una onda y su onda reflejada sobre un mismo eje.

En un punto cualquiera, la onda resultante es la suma de ambas ondas

$$y_1 = 8 \cdot sen\left(\frac{3\pi}{5}t - \frac{\pi}{5}x\right) \quad y_2 = 8 \cdot sen\left(\frac{3\pi}{5}t + \frac{\pi}{5}x\right)$$

La perturbación resultante en dicho punto será:

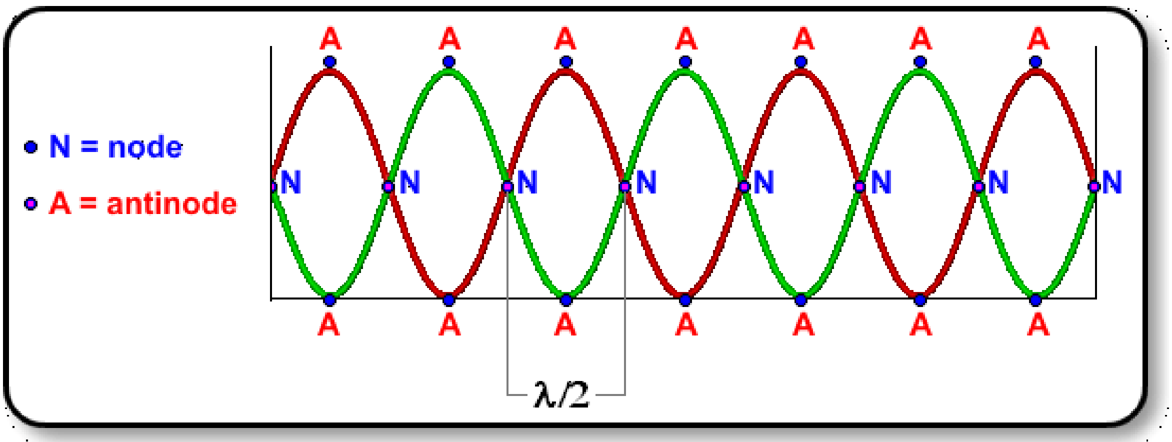
$$Y = y_1 + y_2 = 8\left[sen\left(\frac{3\pi}{5}t - \frac{\pi}{5}x\right) + sen\left(\frac{3\pi}{5}t + \frac{\pi}{5}x\right)\right] = 16\cos\left(\frac{\pi}{5}x\right) \cdot sen\left(\frac{3\pi}{5}t\right)$$

d) La posición de los nodos, puntos de amplitud nula, se encuentran donde la amplitud de esta onda $A_r = 16\cos\left(\frac{\pi}{5}x\right)$ es nula, por tanto: $0 = \cos\left(\frac{\pi}{5}x\right) \Rightarrow \frac{\pi}{5}x = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, despejando x, obtenemos:

$$\text{Los nodos se encuentran en } x = (2n-1)\frac{5}{2} = \begin{cases} n = 1 \Rightarrow x = 2,5 \\ n = 2 \Rightarrow x = 7,5 \\ n = 3 \Rightarrow x = 12,5 \\ \dots\dots\dots\dots \\ n = n \Rightarrow x = (2n-1) \cdot 2,5 \end{cases} \text{ metros, donde n=1,2,3,4....}$$

La posición de los vientres o antinodos, puntos de amplitud máxima, se encuentran donde la amplitud de esta onda $A_r = 16\cos\left(\frac{\pi}{5}x\right)$ es máxima, por tanto: $1 = \cos\left(\frac{\pi}{5}x\right) \Rightarrow \frac{\pi}{5}x = k\pi$, despejando x, obtenemos:

$$\text{Los Vientres se encuentran en } x = 5k = \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = 0 \\ k = 1 \Rightarrow x = 5 \\ k = 2 \Rightarrow x = 10 \\ k = 3 \Rightarrow x = 15 \\ \dots\dots\dots\dots \\ k = k \Rightarrow x = 5k \end{cases} \text{ metros, donde k=0,1,2,3,4....}$$

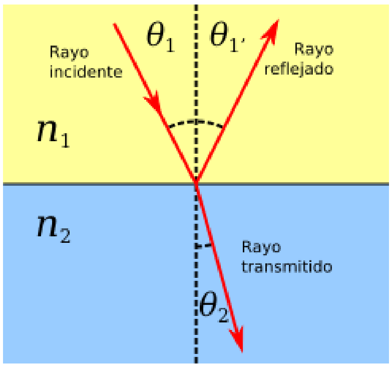


(3) *Un rayo luminoso que se propaga en el aire incide sobre el agua de un estanque formando un ángulo de 20º con la normal que separa ambos medios.*

a) ¿Qué ángulo formarán entre sí los rayos reflejado y refractado?

b) Variando el ángulo de incidencia, ¿podría producirse el fenómeno de reflexión total? Razone la respuesta.

Datos: $n_{aire} = 1$; $n_{agua} = 1{,}33$



a) Sabemos que cuando un rayo cambia de un medio a otro, una parte del rayo se refracta pasando al segundo medio y otra parte se refleja quedándose en el mismo medio y formando un ángulo con la normal igual que el ángulo de incidencia.

Para calcular el ángulo de refracción, se aplica la Ley de Snell, que dice que el producto del índice de refracción por el seno del ángulo de incidencia es constante para cualquier rayo de luz incidiendo sobre la superficie que separa de dos medios.

$$n_{aire} sen\theta_1 = n_{agua} sen\theta_2$$

Como el ángulo incidente es de 20 °, calculamos el ángulo de refracción despejando de la ecuación anterior:

$$sen\theta_2 = \frac{n_{aire} sen\theta_1}{n_{agua}} = \frac{1 \cdot sen20}{1{,}33} = 0{,}257$$

De donde el ángulo de refracción es:

$$\theta_2 = Arcsen(0{,}257) = 14{,}9°$$

Por tanto el ángulo entre ambos rayos será: 180+20-14,9=185,1° o también 174,9°. Como el ángulo es el menor de ambos, el ángulo que forman es 174,9°.

b) **Reflexión total** es el fenómeno que se produce cuando un rayo de luz, atravesando un medio de índice de refracción n_2 menor que el índice de refracción n_1 en el que éste se encuentra, se refracta de tal modo que no es capaz de atravesar la superficie entre ambos medios reflejándose completamente.

Este fenómeno solo se produce para ángulos de incidencia superiores a un cierto valor límite, θ_L (ángulo límite). Para ángulos mayores de éste ángulo límite, la luz deja de atravesar la superficie que separa ambos medios y es reflejada totalmente. La reflexión total solamente ocurre en rayos que viajando en un medio de alto índice refractivo van hacia medios de menor índice de refracción.

Para que se produzca el fenómeno de reflexión total, tiene que ocurrir que el ángulo de refracción ha de ser como mínimo 90°,

$$n_{aire} sen\theta_1 = n_{agua} sen90 = n_{agua}$$

$$1 \cdot sen\theta_L = 1{,}33 \quad \Rightarrow \quad sen\theta_L = 1{,}33$$

Cosa que es imposible, puesto que sabemos que el seno de un ángulo está comprendido entre -1 y 1.

No se produce reflexión total porque el índice de refracción del primer medio es menor que el del segundo, justo lo contrario que debe ocurrir para que se produzca reflexión total.