Modelo 2014. Pregunta 3B.- En una región del espacio hay un campo eléctrico $\vec{E} = 4\times10^3\ \vec{j}\ N\,C^{-1}$ y otro magnético $\vec{B} = -0{,}5\,\vec{i}\ T$. Si un protón penetra en esa región con una velocidad perpendicular al campo magnético:

a) ¿Cuál debe ser la velocidad del protón para que al atravesar esa región no se desvíe?

Si se cancela el campo eléctrico y se mantiene el campo magnético:

b) Con la velocidad calculada en el apartado a), ¿qué tipo de trayectoria describe?, ¿cuál es el radio de la trayectoria? Determine el trabajo realizado por la fuerza que soporta el protón y la energía cinética con la que el protón describe esa trayectoria.

Datos: Masa del protón = $1{,}67\times10^{-27}$ kg ; Valor absoluto de la carga del electrón, e = $1{,}60\times10^{-19}$ C

Solución.

a. Para que el protón no se desvíe, las fuerzas ejercidas por ambos campos deberán anularse.

$$\vec{F}_E + \vec{F}_B = 0\ ;\quad \vec{F}_E = -\vec{F}_B$$

Teniendo en cuenta que el protón entre en perpendicular al campo magnético, la velocidad podrá ser:

$$\vec{v} = v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F}_E = q\cdot\vec{E}\\ \vec{F}_B = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\end{array}\right\}: \vec{F}_E = -\vec{F}_B \Rightarrow q\cdot\vec{E} = -q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad \vec{E} = -\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$\vec{v}\times\vec{B} = \left(0, v_y, v_z\right)\times\left(-0{,}5, 0, 0\right) = \left(\begin{vmatrix} v_y & v_z\\ 0 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & v_z\\ -0{,}5 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & v_y\\ -0{,}5 & 0\end{vmatrix}\right) = \left(0, -0{,}5v_z, 0{,}5v_y\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E} = 4\times10^3\,\vec{j}\\ \vec{v}\times\vec{B} = -0{,}5v_z\,\vec{j} + 0{,}5v_y\,\vec{k}\end{array}\right\}: \vec{E} = -\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \Rightarrow 4\times10^3\,\vec{j} = -\left(-0{,}5v_z\,\vec{j} + 0{,}5v_y\,\vec{k}\right)$$

$$4\times10^3\,\vec{j} = 0{,}5v_z\,\vec{j} - 0{,}5v_y\,\vec{k}$$

Identificando por componentes:

$$\begin{cases}\vec{j}: 4\times10^3 = 0{,}5v_z \Rightarrow v_z = 8\times10^3\\ \vec{k}: 0 = -0{,}5v_y \Rightarrow v_y = 0\end{cases}$$

El protón penetra con una velocidad: $v = 8\times10^3\,\vec{k}$

b. El protón describe una trayectoria circular. El radio de curvatura se calcula teniendo en cuenta que la fuerza generada por el campo magnético es normal a la trayectoria del protón y por tanto es una fuerza centrípeta.

$$\vec{F}_B = \vec{F}_c \qquad\qquad q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\vec{u}_r = m\frac{v^2}{r}\,\vec{u}_r$$

En módulo:

$$q\cdot v\cdot B\cdot \text{sen}\,90 = m\frac{v^2}{r} \qquad\qquad r = \frac{m\cdot v}{q\cdot B} = \frac{1{,}67\times10^{-27}\cdot 8\times10^3}{1{,}6\times10^{-19}\times 0{,}5} = 1{,}67\times10^{-4}\,m$$

La fuerza magnética no realiza trabajo dado su carácter centrípeta, la fuerza y el desplazamiento forman un ángulo de 90º (cos 90 = 0)

Si sobre la partícula no se realiza trabajo, La energía cinética que lleva el protón a lo largo de la trayectoria circular será constante, no varía en el tiempo y su valor será:

$$E_c = \frac{1}{2}m\cdot v^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}67\times10^{-27}\cdot\left(8\times10^3\right)^2 = 5{,}34\times10^{-20}\,J$$

Septiembre 2013. Pregunta 5B.- Dos partículas idénticas A y B, de cargas $3{,}2\times10^{-19}$ C y masas $6{,}4\times10^{-27}$ kg, se mueven en una región donde existe un campo magnético uniforme de valor: $\vec{B}_o = \left(\vec{i} + \vec{j}\right)$ T. En un instante dado, la partícula A se mueve con velocidad $\vec{v}_A = \left(-10^3\,\vec{i} + 10^3\,\vec{j}\right)$ m s^{-1} y la partícula B con velocidad $\vec{v}_B = \left(-10^3\,\vec{i} - 10^3\,\vec{j}\right)$ m s^{-1}

a) Calcule, en ese instante, la fuerza que actúa sobre cada partícula.

b) Una de ellas realiza un movimiento circular; calcule el radio de la trayectoria que describe y la frecuencia angular del movimiento.

Solución.

a. La fuerza a la que se ve sometida una carga eléctrica que se desplaza en el seno de un campo magnético viene dada por la expresión:

$$\vec{F} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad \times \equiv \text{producto vectorial}$$

$$\vec{F}_A = q_A\cdot\left(\vec{v}_A\times\vec{B}\right) = 3{,}2\times10^{-19}\cdot\left[\left(-10^3\vec{i}+10^3\vec{j}\right)\times\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\right] = 3{,}2\times10^{-19}\cdot\left[10^3\cdot\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)\times\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\right] =$$

$$= 3{,}2\times10^{-19}\cdot10^3\cdot\left[(-1,1,0)\times(1,1,0)\right] = 3{,}2\times10^{-16}\cdot\left(\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right) = 3{,}2\times10^{-16}\cdot(0,0,-2)$$

$$\vec{F}_A = -6{,}4\times10^{-16}\vec{k}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_B = q_B\cdot\left(\vec{v}_B\times\vec{B}\right) = 3{,}2\times10^{-19}\cdot\left[\left(-10^3\vec{i}-10^3\vec{j}\right)\times\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\right] = 3{,}2\times10^{-19}\cdot\left[10^3\cdot\left(-\vec{i}-\vec{j}\right)\times\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\right] =$$

$$= 3{,}2\times10^{-19}\cdot10^3\cdot\left[(-1,-1,0)\times(1,1,0)\right] = 3{,}2\times10^{-16}\cdot\left(\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right) = 3{,}2\times10^{-16}\cdot(0,0,0)$$

$$\vec{F}_B = 0$$

b. La carga A realiza un movimiento circular uniforme, por lo tanto la suma de todas las fuerzas que actúan sobre ella debe ser igual a la fuerza centrípeta.

$$\sum\vec{F} = \vec{F}_c$$

Si se supone que la única fuerza que actúa sobre la carga es la magnética, y trabajando en módulo:

$$q_A\cdot v\cdot B\cdot \operatorname{sen}\alpha = m\frac{v^2}{R}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad y el campo forman 90º $\left(\vec{v}\circ\vec{B} = (-1,1,0)\circ(1,1,0) = 0\right)$

$$q_A\cdot B = m\frac{v}{R} \qquad R = \frac{m\cdot v}{q_A\cdot B}$$

Los módulos de la velocidad y el campo magnético son:

$$v = \sqrt{\left(-10^3\right)^2 + \left(10^3\right)^2 + 0^2} = 10^3\sqrt{2}\ \text{m s}^{-1} \qquad B = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}\ \text{T}$$

$$R = \frac{m\cdot v}{q_A\cdot B} = \frac{6{,}4\times10^{-27}\cdot10^3\sqrt{2}}{3{,}2\times10^{-19}\cdot\sqrt{2}} = 2\times10^{-5}\text{m}$$

Velocidad angular: $\left.\begin{array}{l} m\dfrac{v}{R} = q_A\cdot B \\ v = \omega\cdot R\end{array}\right\} : m\dfrac{\omega\cdot R}{R} = q_A\cdot B \qquad \omega\cdot m = q_A\cdot B$

$$\omega = \frac{q_A\cdot B}{m} = \frac{3{,}2\times10^{-19}\cdot\sqrt{2}}{6{,}4\times10^{-27}} = 7{,}07\times10^{7}\ \text{rad/s}$$

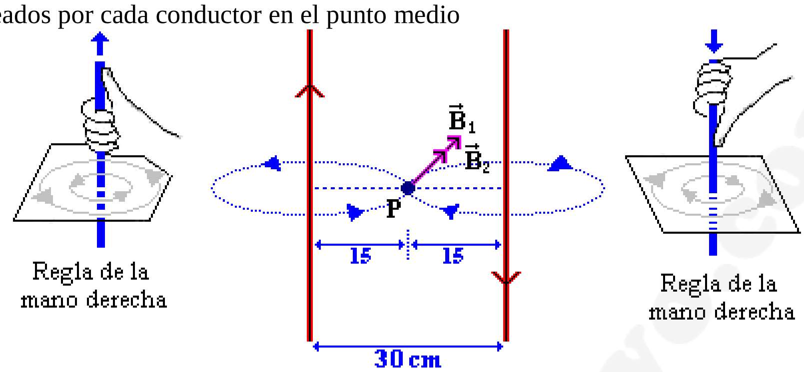
Septiembre 2011. Cuestión 3A.- Dos conductores rectilíneos, paralelos y de longitud infinita, separados una distancia d = 30 cm están recorridos por corrientes eléctricas de igual intensidad I = 2A.

- **a)** Determine la intensidad del campo magnético generado por los dos conductores en el punto medio de la línea que los une, en el caso de que las corrientes tengan sentidos contrarios.
- **b)** Determine el módulo de la fuerza por unidad de longitud que se ejercen entre si estos conductores.

Datos: Permeabilidad magnética en el vacío $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}$ N A^{-2}.

Solución.

a. Utilizando la regla de la mano derecha, se determina la dirección que tendrán los campo magnéticos creados por cada conductor en el punto medio



$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

En módulo: $$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi \, d/2} + \frac{\mu_o I_2}{2\pi \, d/2} = \{I_1 = I_2 = I\} = \frac{2\mu_o I}{\pi\, d}$$

$$B = \frac{2\cdot 4\pi\times10^{-7}}{\pi\cdot 15\times10^{-2}} = 5{,}33\times10^{-6}\,T$$

b. Por ser las corrientes de sentido contrario, las fuerzas entre los hilos serán de repulsión, por unidad de longitud su módulo es:

$$F/\ell = \frac{\mu_o}{2\pi\, d} I_1 I_2 = \frac{4\pi\times10^{-7}}{2\pi\cdot 30\times10^{-2}}\cdot 2\cdot 2 = 2{,}67\times10^{-6}\,Nm^{-1}$$

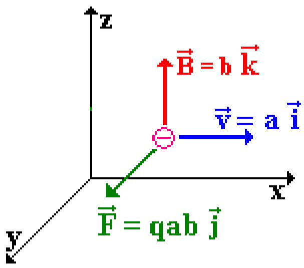
Junio 2011. Problema 2A.- Un electrón que se mueve con velocidad v = 5×10^3 m/s en el sentido positivo del eje X entra en una región del espacio donde hay un campo magnético uniforme B = 10^{-2} T dirigido en el sentido positivo del eje Z.

- **a)** Calcule la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre el electrón.
- **b)** Determine el radio de la órbita circular que describirá el electrón.
- **c)** ¿Cuál es la velocidad angular del electrón?
- **d)** Determine la energía del electrón antes y después de penetrar en la región del campo magnético.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón e = $1{,}60\times10^{-19}$C; masa del electrón = $9{,}11\times10^{-31}$ kg.

Solución.

a. Según la ley de Lorentz:

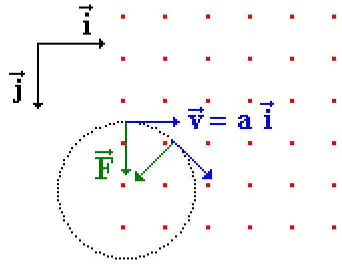


$$\vec{F} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$\vec{F} = q_e\cdot\left(v\,\vec{i}\times B\,\vec{k}\right) = q_e\cdot v\cdot B\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)$$

$$\vec{i}\times\vec{k} = (1{,}0{,}0)\times(0{,}0{,}1) = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{j}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = (0,-1,0) = -\vec{j}$$

$$\vec{F} = -1{,}6\times10^{19}\cdot 5\times10^{3}\cdot 10^{-2}\cdot\left(-\vec{j}\right) = 8\times10^{-18}\,\vec{j}\ N$$



b. Si el electrón describe una trayectoria circular se debe cumplir:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_c$$

La única fuerza que actúa sobre el electrón es la que genera el campo magnético (F_B), trabajando en módulo:

$$F_B = F_c \; ; \quad F_B = m\frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv^2}{F_B} = \frac{9{,}11\times10^{-31}\cdot\left(5\times10^3\right)^2}{8\times10^{-18}} = 2{,}85\times10^{-6}\,m$$

c. $$\omega = \frac{v}{R} = \frac{5\times10^3\,m/s}{2{,}85\times10^{-6}\,m/rad} = 1{,}75\times10^9\,rad/s$$

d. El trabajo realizado por el campo magnético sobre el electrón es nulo debido a que la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares y por tanto la energía que tiene el electrón es debida a su velocidad (energía cinética).

$$E = E_c = \frac{1}{2}m_e\cdot v^2 = \frac{1}{2}\cdot 9{,}11\times10^{-31}\cdot\left(5\times10^3\right)^2 = 1{,}4\times10^{-23}\,J$$

Modelo 2011. Cuestión 3A. Una carga puntual Q con velocidad $\vec{v} = v_z\vec{k}$ entra en una región donde existe un campo magnético uniforme de valor: $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$. Determine:

- **a)** La fuerza que experimenta la carga al entrar en el campo magnético.
- **b)** La expresión del campo eléctrico que debería existir en la región para que el vector velocidad de la carga Q permanezca constante.

Solución.

a. La expresión para la fuerza experimentada por una carga que se desplaza en un campo magnético es:

$$\vec{F} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$\vec{F} = q\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & v_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} = q\cdot\left(\begin{vmatrix}0 & v_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}\vec{i}, -\begin{vmatrix}0 & v_z\\ B_x & B_z\end{vmatrix}\vec{j}, \begin{vmatrix}0 & 0\\ B_x & B_y\end{vmatrix}\right) = q\cdot\left(-B_yv_z, B_xv_z, 0\right)$$

$$\vec{F} = -qB_yv_z\vec{i} + qB_xv_z\vec{j}$$

b. Si se pretende que la velocidad de la carga permanezca constante se necesita que la resultante de las fuerzas que actúan sobre la carga sea nula, de modo que no exista aceleración.

$$\vec{R} = \vec{F}_B + \vec{F}_E = 0$$

$$\vec{F}_E = -\vec{F}_B = -\left(-qB_yv_z\vec{i} + qB_xv_z\vec{j}\right) = qB_yv_z\vec{i} - qB_xv_z\vec{j}$$

Modelo 2011. Cuestión 2B.

- **a)** ¿Cuál es el módulo de la velocidad de un electrón que se mueve en presencia de un campo eléctrico de módulo 4×10^5 N/C y de un campo magnético de 2 T, ambos perpendiculares entre sí y, a su vez, perpendiculares a la velocidad del electrón, para que éste no se desvíe?
- **b)** ¿Cuál es el radio de la órbita descrita por el electrón cuando se suprime el campo eléctrico si el módulo de su velocidad es el calculado en el apartado anterior?

Solución.

a. Para que el electrón no se desvíe y mantenga su velocidad, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él debe se nula.

$$\vec{R} = \vec{F}_B + \vec{F}_E = 0 \;\Rightarrow\; \vec{F}_B = -\vec{F}_E$$

En módulo:

$$\left|\vec{F}_B\right| = \left|\vec{F}_E\right| \quad\Rightarrow\quad q\cdot v\cdot B\cdot \text{sen}\,\alpha = q\cdot E$$

$$v = \frac{E}{B \cdot \text{sen}\,\alpha} = \frac{4\times10^5}{2 \cdot \text{sen}\,90} = 2\times10^5\ ^{m}\!/_{s}$$

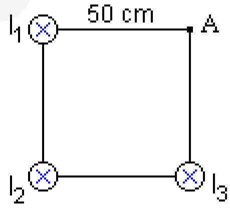
b. En el momento que se suprime el campo eléctrico, la única fuerza que actúa sobre el electrón es la debida al campo magnético, que es perpendicular a su trayectoria y le hace describir una trayectoria circular sometido a un movimiento circular uniforme, igualándose la fuerza debida al campo magnético con la fuerza centrípeta a la que se ve sometido el electrón.

$$\vec{F}_B = \vec{F}_c$$

En módulo:

$$q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\alpha = m\frac{v^2}{R} \qquad R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B \cdot \text{sen}\alpha} = \frac{9{,}1\times10^{-31} \cdot 4\times10^5}{1{,}6\times10^{-19} \cdot 2 \cdot \text{sen}90^\circ} = 1{,}14\times10^{-6}\,\text{m}$$

Septiembre 2010. F. M. Problema 2A.- Tres hilos conductores infinitos y paralelos pasan por los vértices de un cuadrado de 50 cm de lado como se indica en la figura. Las tres corrientes I_1, I_2 e I_3 circulan hacia dentro del papel.



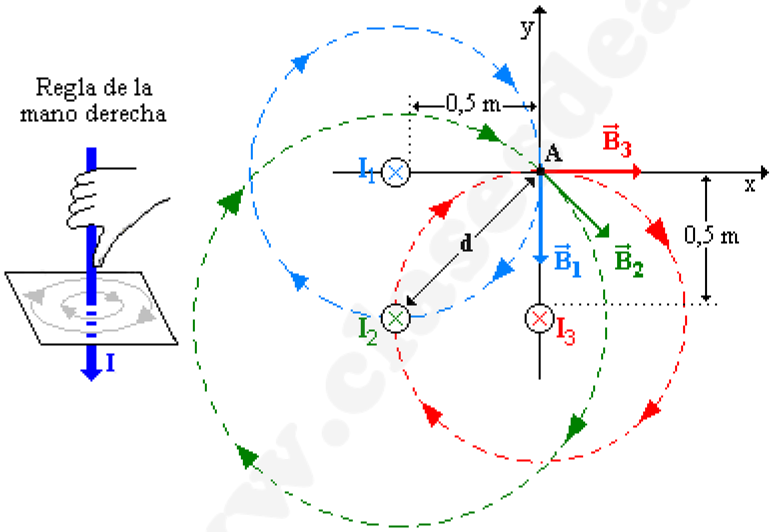
a) Si $I_1 = I_2 = I_3$ =10 mA, determine el campo magnético en el vértice A del cuadrado.

b) Si $I_1 = 0$, I_2 =5 mA e I_3 = 10 mA, determine la fuerza por unidad de longitud entre los hilos recorridos por las corrientes.

Dato: Permeabilidad magnética del vacío $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}$ N A^{-2}

Solución.

a. El campo magnético en el punto A es la suma vectorial de los campos magnéticos que crean cada uno de los hilos conductores en ese punto.



En el esquema se adjunta la regla de la mano derecha, las líneas de campo magnético siguen el sentido de giro de los dedos que rodean al hilo, conocido el sentido de giro, se puede determinar la dirección del campo magnético generado por cada conductor en el punto A.

El campo magnético en el punto A será la suma vectorial de los campos que generan cada uno de los hilos conductores.

$$\vec{B}_A = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

El módulo del campo magnético generado por un hilo conductor en un punto se obtiene mediante la Ley de Biot y Savart.

$$B_i = \frac{\mu_o I_i}{2\pi\, d_i}$$

Para poder establecer la dirección y sentido de los vectores campo magnético, se sitúan unos ejes de coordenadas sobre el punto A y se determina el sentido de giro de las líneas de campo magnético mediante la regla de la mano derecha

- Hilo 1: $\vec{B}_1 = -\frac{\mu_o I_1}{2\pi\, d_1}\vec{j} = -\frac{4\pi\times10^{-7} \cdot 10\times10^{-3}}{2\pi \cdot 0{,}5}\vec{j} = -4\times10^{-9}\,\vec{j}$

- Hilo 2: Teniendo en cuenta que el campo magnético creado por el hilo es perpendicular a la diagonal del cuadrado, el vector forma con el eje x un ángulo de –45º.

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_o I_2}{2\pi d_2}\cos(-45^o)\,\vec{i} + \frac{\mu_o I_2}{2\pi d_2}\operatorname{sen}(-45^o)\,\vec{j} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi d_2}\left(\cos(-45^o)\,\vec{i} + \operatorname{sen}(-45^o)\,\vec{j}\right)$$

$$d_2 = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{4\pi\times10^{-7}\cdot10\times10^{-3}}{2\pi\cdot\sqrt{2}/2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{j}\right) = 2\times10^{-9}\,\vec{i} - 2\times10^{-9}\,\vec{j}$$

- Hilo 3: $\vec{B}_3 = \frac{\mu_o I_3}{2\pi d_3}\,\vec{i} = \frac{4\pi\times10^{-7}\cdot10\times10^{-3}}{2\pi\cdot0{,}5}\,\vec{i} = 4\times10^{-9}\,\vec{i}$

Conocido el campo generado por cada hilo conductor, se calcula el campo total en el punto A.

$$\vec{B}_A = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = -4\times10^{-9}\,\vec{j} + 2\times10^{-9}\,\vec{i} - 2\times10^{-9}\,\vec{j} + 4\times10^{-9}\,\vec{i} = 6\times10^{-9}\,\vec{i} - 6\times10^{-9}\,\vec{j}$$

b. Las fuerzas por unidad de longitud entre los hilos conductores serán de igual dirección y módulo, y de sentidos opuestos porque las corrientes van en el mismo sentido, por lo tanto, bastará con calcular la fuerza por unidad de longitud en unos de los cables.

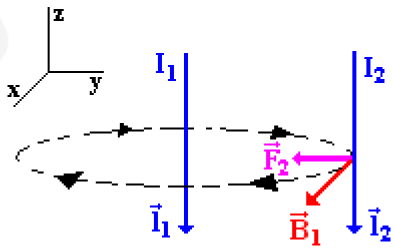
$$\vec{F} = I\cdot\left(\vec{l}\times\vec{B}\right)$$

$$\vec{F}_2 = I_2\cdot\left(\vec{l}_1\times\vec{B}_1\right) = I_2\cdot\left(l\left(-\vec{k}\right)\times B\,\vec{i}\right) = I_2 l\,B_1\cdot\left((0,0,-1)\times(1,0,0)\right) =$$

$$= I_2 l\,B_1\left(\begin{vmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{vmatrix}\right) = I_2 l\,B_1\,(0,-1,0) = -I_2 l\,B_1\,\vec{j}$$

$$\frac{\vec{F}_2}{l} = -I_2 B_1\,\vec{j} = -I_2\frac{\mu_o I_1}{2\pi d}\,\vec{j} = -\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi d}\,\vec{j} = -\frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi d}\,\vec{j}$$

$$\frac{\vec{F}_2}{l} = -\frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot5\times10^{-3}\cdot10\times10^{-3}}{2\pi\cdot50\times10^{-2}}\,\vec{j} = 2\times10^{-11}\ \mathrm{N/m}$$



Septiembre 2010. F. M. Problema 1B.- En un instante determinado un electrón que se mueve con una velocidad $\vec{v} = \left(4\times10^4\,\vec{i}\right)$m/s penetra en una región en la que existe un campo magnético de valor $\vec{B} = \left(-0{,}8\,\vec{j}\right)$T siendo $\vec{i}$ y $\vec{j}$ los vectores unitarios en los sentidos positivos de los ejes X e Y respectivamente. Determine:

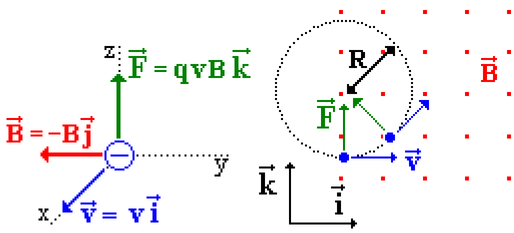
- **a)** El módulo, la dirección y el sentido de la aceleración adquirida por el electrón en ese instante, efectuando un esquema gráfico en la explicación.
- **b)** La energía cinética del electrón y el radio de la trayectoria que describiría el electrón al moverse en el campo, justificando la respuesta.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón e = $1{,}6\times10^{-19}$ C; Masa del electrón $m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg

Solución.

a. La fuerza que experimenta una carga eléctrica cuando se desplaza con una velocidad $\vec{v}$ dentro de una región donde existe un campo magnético $\vec{B}$ viene dada por la expresión:

$$\vec{F} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$



Aplicando a los datos del enunciado

$$\vec{F} = q_e\cdot\left(v\,\vec{i}\times B\left(-\vec{j}\right)\right) = q_e v\,B\cdot\left((1,0,0)\times(0,-1,0)\right) =$$

$$= q_e v\,B\,(0,0,-1) = -q_e v\,B\,\vec{k}$$

$$\vec{F} = -\left(-1{,}6\times10^{-19}\right)\cdot4\times10^4\cdot0{,}8\,\vec{k}\ \mathrm{N} = 5{,}12\times10^{-15}\,\vec{k}\ \mathrm{N}$$

Teniendo en cuenta el segundo principio de la dinámica:

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a}\ ;\quad \vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} = \frac{1}{9{,}1\times10^{-31}}\cdot5{,}12\times10^{-15}\,\vec{k}\ \mathrm{m/s} = 5{,}63\times10^{-15}\,\vec{k}\ \mathrm{m/s}$$

b. $E_c = \frac{1}{2} m\ v^2 = \frac{1}{2} 9{,}1\times10^{-31} \cdot \left(4\times10^4\right)^2 = 7{,}28\times10^{-22}\ J$

Al entrar en un campo magnético el electrón describe una trayectoria circular, tal como muestra la figura, por lo tanto la resultante de las fuerzas que actúan sobre la carga (electrón) será igual a la fuerza centrípeta.

$$F = F_c = m\frac{v^2}{R}\ :\ R = \frac{mv^2}{F} = \frac{2E_c}{F} = \frac{2 \cdot 7{,}28\times10^{-22}}{5{,}12\times10^{-15}} = 2{,}84\times10^{-7}\ m = 284\ nm$$

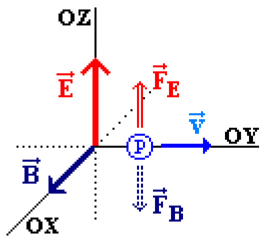
Septiembre 2010. F. G. Problema 1A.- En una región del espacio existe un campo eléctrico de $3\times10^5\ N\ C^{-1}$ en el sentido positivo del eje OZ y un campo magnético de 0,6 T en el sentido positivo del eje OX.

- **a)** Un protón se mueve en el sentido positivo del eje OY. Dibuje un esquema de las fuerzas que actúan sobre él y determine qué velocidad deberá tener para que no sea desviado de su trayectoria.
- **b)** Si en la misma región del espacio un electrón se moviera en el sentido positivo del eje OY con una velocidad de 10^3 m/s, ¿en qué sentido sería desviado?

Dato: Valor absoluto de la carga del electrón y del protón e = $1{,}6\times10^{-19}$ C

Solución.

a. Para que el protón se desplace en línea recta dentro de una región donde existen un campo eléctrico y un campo magnético, las fuerzas generadas por ambos sobre él deben anularse.



$$\vec{F}_E = \vec{F}_M$$

La fuerza que genera el campo eléctrico sobre el protón viene dado por:

$$\vec{F}_E = q_p \cdot \vec{E} = q_p E \cdot \vec{k}$$

Siendo E el módulo del campo eléctrico y q_p la carga del protón.

La fuerza que genera el campo magnético sobre el protón viene dado por:

$$\vec{F}_B = q_p \cdot \left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = q_p \cdot \left(v\ \vec{j}\times B\ \vec{i}\right) = q_p v B \cdot \left((0,1,0)\times(1,0,0)\right) = q_p v B\,(0,0,-1) = -q_p v B\ \vec{k}$$

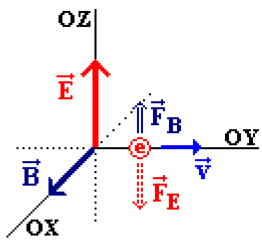
Siendo × producto vectorial, v el módulo de la velocidad y B el módulo del campo magnético.

Los vectores generados por los campos eléctrico y magnético tienen igual dirección y sentidos opuestos, para que el protón no varíe su dirección de desplazamiento, beberán tener igual módulo.

$$\left|\vec{F}_E\right| = \left|\vec{F}_B\right|$$

$$q_p E = q_p v B\ :\quad v = \frac{E}{B} = \frac{3\cdot10^5\ N\,C^{-1}}{0{,}6\ T} = 5\cdot10^5\ m/s$$

b. Si el electrón se desvía al entrar en la región del apartado anterior, será debido a que la resultante de las fuerzas que actúan sobre el no se anulan, siendo la dirección y sentido de la desviación la de la fuerza resultante.



$$\vec{R} = \vec{F}_E + \vec{F}_B$$

$$\vec{F}_E = q_e \cdot \vec{E} = -q\ E \cdot \vec{k}$$

$$\vec{F}_B = q_e \cdot \left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = -q \cdot \left(v\ \vec{j}\times B\ \vec{i}\right) = -q\ v\ B \cdot \left((0,1,0)\times(1,0,0)\right) = -q\ v\ B\,(0,0,-1) = q\ v\ B\ \vec{k}$$

Siendo q el valor absoluto de la carga del electrón.

$$\vec{R} = -q\ E\ \vec{k} + q\ v\ B\ \vec{k} = q \cdot (-E + v\ B)\vec{k} = 1{,}6\cdot10^{-19} \cdot \left(-3\cdot10^5 + 10^3 \cdot 0{,}6\right)\vec{k} = -4{,}8\cdot10^{-14}\ \vec{k}\ N$$

El electrón se desvía en el sentido negativo del eje OZ.

Septiembre 2010. F. G. Cuestión 2B.- Dos conductores rectilíneos e indefinidos, paralelos, por los que circulan corrientes de igual intensidad, I, están separados una distancia de 0,12 m y se repelen con una fuerza por unidad de longitud de 6×10^{-9} N m^{-1}.

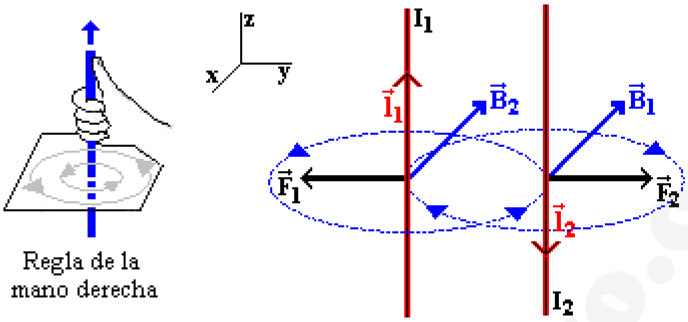
a) Efectúe un esquema gráfico en el que se dibuje el campo magnético, la fuerza que actúa sobre cada conductor y el sentido de la corriente en cada uno de ellos.

b) Determine el valor de la intensidad de corriente 1, que circula por cada conductor.

Dato: permeabilidad magnética en el vacío $\mu_o = 4\pi\ 10^7$ N A^2

Solución.

a.



Según la Ley de Lorentz:

$$\vec{F} = I\cdot\left(\vec{l}\times\vec{B}\right)$$

Aplicando a cada uno de los conductores:

$$\vec{F}_1 = I_1\cdot\left(\vec{l}_1\times\vec{B}_2\right) = I_1\cdot\left(l_1\,(0,0,1)\times B_2\,(-1,0,0)\right) = I_1 l_1 B_2\left((0,0,1)\times(-1,0,0)\right) = I_1 l_1 B_2 (0,-1,0) = -I_1 l_1 B_2\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = I_2\cdot\left(\vec{l}_2\times\vec{B}_1\right) = I_2\cdot\left(l_2\,(0,0,-1)\times B_1\,(-1,0,0)\right) = I_2 l_2 B_1\left((0,0,-1)\times(-1,0,0)\right) = I_2 l_2 B_1 (0,1,0) = I_1 l_1 B_2\,\vec{j}$$

b. Las fuerzas que actúan sobre los dos hilo son de igual módulo (por ambos hilos circula la misma intensidad de corriente), igual dirección y sentidos opuestos.

Si los vectores $\vec{l}$ y $\vec{B}$ forman 90º, el módulo de la fuerza es:

$$F = I\cdot l\cdot B$$

La fuerza sobre el conductor 1 depende de la intensidad de la corriente que los recorre (I_1) y del campo magnético creado por el conductor 2 (B_2).

$$F_1 = I_1\cdot l\cdot B_2$$

El módulo del campo magnético creado por el conductor 2 se obtiene mediante la ley de Biot y Savart.

$$B_2 = \frac{\mu_o I_2}{2\pi\,d}$$

Sustituyendo en la expresión del módulo de F_1

$$F_1 = I_1\cdot l\,\frac{\mu_o I_2}{2\pi\,d}$$

La fuerza por unidad de longitud es

$$\frac{F_1}{l} = \frac{\mu_o I_1\cdot I_2}{2\pi\,d} : \{I_1 = I_2 = I\} : \frac{F_1}{l} = \frac{\mu_o I^2}{2\pi\,d}$$

$$I = \sqrt{\frac{2\pi\,d\left(F_1/l\right)}{\mu_o}} = \sqrt{\frac{2\pi\cdot 0{,}12\cdot 6\times10^{-9}}{4\pi\times10^{-7}}} = 6\times10^{-2}\ \text{A}$$

Septiembre 2010. F. G. Problema 2B.- Una partícula de masa m = 4×10^{-16} kg y carga q = $-2{,}85\times10^{-9}$ C, que se mueve según el sentido positivo del eje X con velocidad $2{,}25\times10^{6}$ m/s penetra en una región del espacio donde existe un campo magnético uniforme de valor B = 0,9 T orientado según el sentido positivo del eje Y. Determine:

a) La fuerza (módulo, dirección y sentido) que actúa sobre la carga.

b) El radio de la trayectoria seguida por la carga dentro del campo magnético.

Solución.

a. La fuerza que genera el campo magnético sobre una carga en movimiento viene dada por la expresión:

$$\vec{F} = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = q \cdot \left(v\,\vec{i} \times B\,\vec{j}\right) = q\,v\,B \cdot \left(\vec{i} \times \vec{j}\right) = q\,v\,B \cdot \left((1,0,0) \times (0,1,0)\right) =$$

$$= q\,v\,B \cdot \left(0,0,\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = q\,v\,B \cdot (0,0,1) = q\,v\,B\,\vec{k}$$

Teniendo en cuenta que la carga es negativa, la fuerza tendrá sentido opuesto

$$\vec{F} = -2{,}85 \times 10^{-9} \cdot 2{,}25 \times 10^{6} \cdot 0{,}9\,\vec{k} = -5{,}77 \times 10^{-3}\,\vec{k}$$

b. Si la partícula cargada describe una trayectoria circular, será debido a que la resultante de las fuerzas que concurren sobre ella es igual a la fuerza centrípeta. Teniendo en cuenta que sobre la partícula la única fuerza que actúa es la debida al campo magnético, y trabajando en módulo, se cumplirá:

$$F_B = F_c$$

$$q\,v\,B = m\frac{v^2}{R} \;:\; R = \frac{m\,v^2}{q\,v\,B} = \frac{m\,v}{q\,B}$$

$$R = \frac{m\,v}{q\,B} = \frac{4 \times 10^{-16} \cdot 2{,}25 \times 10^{6}}{2{,}85 \times 10^{-9} \cdot 0{,}9} = 0{,}35\,\text{m} = 35\,\text{cm}$$

Junio 2010. F.M. Cuestión 2A.- Un protón y un electrón se mueven en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ bajo la acción del mismo. Si la velocidad del electrón es 8 veces mayor que la del protón y ambas son perpendiculares a las líneas del campo magnético, deduzca la relación numérica existente entre:

a) Los radios de las órbitas que describen.

b) Los periodos orbitales de las mismas.

Dato: Se *considera que la masa del protón* es *1836 veces la masa del electrón.*

Solución.

a. Si ambas partículas describen una trayectoria circula será porque:

$$\vec{F}_B = \vec{F}_c$$

Trabajando en módulo:

$$q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{R} \;;\; q \cdot B = m \cdot \frac{v}{R} \;;\; R = \frac{m\,v}{q\,B}$$

Aplicando la ecuación a cada partícula y comparando:

$$\left.\begin{array}{l} R_{p^+} = \dfrac{m_{p^+}\,v_{p^+}}{q_{p^+}\,B} \\[2ex] R_{e^-} = \dfrac{m_{e^-}\,v_{e^-}}{q_{e^-}\,B} \end{array}\right\} : \frac{R_{p^+}}{R_{e^-}} = \frac{\dfrac{m_{p^+}\,v_{p^+}}{q_{p^-}\,B}}{\dfrac{m_{e^-}\,v_{e^-}}{q_{e^-}\,B}} = \left\{\left|q_{p^-}\right| = \left|q_{e^-}\right|\right\} = \frac{m_{p^+}\,v_{p^+}}{m_{e^-}\,v_{e^-}} = \left\{\begin{array}{l} m_{p^+} = 1836\,m_{e^-} \\ v_{e^-} = 8v_{p^+} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1836\,m_{e^-}\,v_{p^+}}{m_{e^-}\,8v_{p^+}} = \left\{\begin{array}{l} m_{p^+} = 1836\,m_{e^-} \\ v_{e^-} = 8v_{p^+} \end{array}\right\} = \frac{1836}{8} = \frac{459}{2}$$

$$\frac{R_{p^+}}{R_{e^-}} = \frac{459}{2}$$

b. Partiendo de la misma igualdad que en el apartado a:

$$q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{R} :\; \{v = \omega \cdot R\} :\; q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{(\omega \cdot R)^2}{R} :\; q \cdot v \cdot B = m \cdot \omega^2 \cdot R : \left\{\omega = \frac{2\pi}{T}\right\} :$$

$$q \cdot v \cdot B = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R :\; T^2 = \frac{4m\pi^2 R}{qvB}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_{p^+}^2 = \dfrac{4m_{p^+}\pi^2 R_{p^+}}{q_{p^+} v_{p^+} B} \\ T_{e^-}^2 = \dfrac{4m_{e^-}\pi^2 R_{e^-}}{q_{e^-} v_{e^-} B} \end{array}\right\} : \frac{T_{p^+}^2}{T_{e^-}^2} = \frac{\dfrac{4m_{p^+}\pi^2 R_{p^+}}{q_{p^+} v_{p^+} B}}{\dfrac{4m_{e^-}\pi^2 R_{e^-}}{q_{e^-} v_{e^-} B}} : \frac{T_{p^+}^2}{T_{e^-}^2} = \frac{m_{p^+} v_{e^-}}{m_{e^-} v_{p^+}} \cdot \frac{R_{p^+}}{R_{e^-}}$$

$$\frac{T_{p^+}^2}{T_{e^-}^2} = \frac{1836 m_{e^-} 8 v_{p^+}}{m_{e^-} v_{p^+}} \cdot \frac{R_{p^+}}{R_{e^-}} \ : \ \frac{T_{p^+}^2}{T_{e^-}^2} = 1836 \cdot 8 \cdot \frac{1836}{8} \ : \ \frac{T_{p^+}}{T_{e^-}} = 1836$$

Junio 2010. F.M. Problema 2B.- Por un hilo conductor rectilíneo y de gran longitud circula una corriente de l2 A. El hilo está situado en el eje Z de coordenadas y la corriente fluye en el sentido positivo. Un electrón se encuentra situado en el eje Y en el punto P de coordenadas (0, 20, 0) expresadas en centímetros. Determine el vector aceleración del electrón en los siguientes casos:

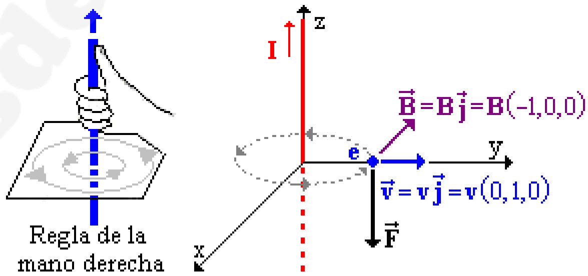
a) El electrón se encuentra en reposo en la posición indicada.
b) Su velocidad es de 1 m/s según la dirección positiva del eje Y.
c) Su velocidad es de 1 m/s según la dirección positiva del eje Z.
d) Su velocidad es de 1 m/s según la dirección negativa del eje X.

Datos: *Permeabilidad magnética del vacio* $\mu_o = 4\pi\times 10^{7}\ N\,A^{-2}$
Masa del electrón $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ *kg*
Valor absoluto de la carga del electrón $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ *C*

Solución.

a. Teniendo en cuenta la ley de Lorentz: $\left.\begin{array}{l}\vec{F} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) \\ v = 0\end{array}\right\} : F = 0 \Rightarrow \{F = m\cdot a\} : a = 0$

b. La intensidad o módulo del campo magnético a 20 cm del hilo conductor viene dada por la Ley de Biot y Savart, la dirección y sentido por la regla de la mano derecha tal y como se muestra en la figura.



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \Rightarrow B_o = \frac{4\pi\times 10^{-7}\cdot 12}{2\pi\cdot 20\times 10^{-2}} = 1{,}2\times 10^{-5}\,T$$

$$\vec{F} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = q\cdot\left(v(0,1,0)\times B(-1,0,0)\right) =$$

$$= qvB\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix} = qvB(0,0,1) = -1{,}6\times 10^{-19}\,C\cdot 1\,{}^{m}\!/\!_{s}\cdot 1{,}2\times 10^{-5}\,T\,\vec{k} = -1{,}92\times 10^{-24}\,\vec{k}\ N$$

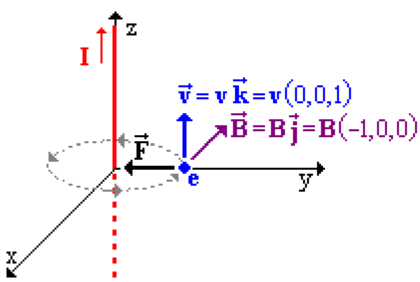
Conocida la fuerza que actúa sobre el electrón, se calcula la aceleración, que tendrá igual dirección y sentido que la fuerza.

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a}\ :\ \vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} = \frac{1}{9{,}1\times 10^{-31}\,Kg}\cdot\left(-1{,}92\times 10^{-24}\right)N\,\vec{k} = -2{,}1\times 10^{6}\ \vec{k}\ {}^{m}\!/\!_{s^2}$$

c. $\vec{F} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = q\cdot\left(v(0,0,1)\times B(-1,0,0)\right) =$

$$= qvB\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix} = qvB(0,-1,0) =$$

$$= -1{,}6\times 10^{-19}\,C\cdot 1\,{}^{m}\!/\!_{s}\cdot 1{,}2\times 10^{-5}\,T\left(-\vec{j}\right) = 1{,}92\times 10^{-24}\,\vec{j}\ N$$

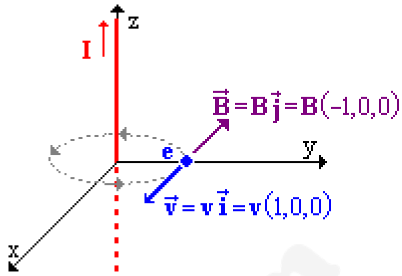


$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} = \frac{1}{9{,}1\times 10^{-31}\,Kg}\cdot\left(1{,}92\times 10^{-24}\right)N\,\vec{j} = 2{,}1\times 10^{6}\ {}^{m}\!/_{s}\ \vec{j}$$

d. $$\vec{F} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = q\cdot\left(v(1,0,0)\times B(-1,0,0)\right) =$$

$$= qvB\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$F = 0 \Rightarrow \{F = m\cdot a\} : a = 0$$



Junio 2010. F.G. Cuestión 3A.- Dos partículas de idéntica carga describen órbitas circulares en el seno de un campo magnético uniforme bajo la acción del mismo. Ambas partículas poseen la misma energía cinética y la masa de una es el doble que la de la otra. Calcule la relación entre:

a) Los radios de las órbitas.

b) Los periodos de las órbitas.

Solución.

a. Si una partícula con carga describe una órbita en el seno de un campo magnético, se cumple:

$$\vec{F}_B = \vec{F}_c$$

Trabajando en módulo:

$$q\cdot v\cdot B = m\cdot\frac{v^2}{r} \quad ; \quad q\cdot B = m\cdot\frac{v}{r}$$

Por ser ambas partícula de idéntica carga y estar inmersa en el mismo campo magnético:

- Partícula 1: $q\cdot B = m_1\cdot\frac{v_1}{r_1}$
- Partícula 2: $q\cdot B = m_2\cdot\frac{v_2}{r_2}$

Igualando:

$$m_1\cdot\frac{v_1}{r_1} = m_2\cdot\frac{v_2}{r_2}$$

Elevando los dos miembros de la igualdad al cuadrado:

$$m_1^2\,\frac{v_1^2}{r_1^2} = m_2^2\,\frac{v_2^2}{r_2^2}$$

Teniendo en cuenta que: $m^2v^2 = 2m\,E_c$

$$\frac{2m_1E_{c_1}}{r_1^2} = \frac{2m_2E_{c_2}}{r_2^2} \quad ; \quad \frac{m_1E_{c_1}}{r_1^2} = \frac{m_2E_{c_2}}{r_2^2}$$

Teniendo en cuenta el enunciado: $\begin{cases} E_{c_1} = E_{c_2} \\ m_2 = 2m_1 \end{cases}$

$$\frac{m_1}{r_1^2} = \frac{2m_1}{r_2^2} \quad ; \quad \frac{1}{r_1^2} = \frac{2}{r_2^2} \quad ; \quad r_2^2 = 2r_1^2 \quad ; \quad r_2 = \sqrt{2}\,r_1$$

b. Partiendo de la igualdad $m_1\cdot\frac{v_1}{r_1} = m_2\cdot\frac{v_2}{r_2}$, y teniendo en cuenta $v = \omega\,r$

$$m_1\cdot\frac{\omega_1\cdot r_1}{r_1} = m_2\cdot\frac{\omega_2\cdot r_2}{r_2} \quad ; \quad m_1\cdot\omega_1 = m_2\cdot\omega_2 \,:\, \omega = \frac{2\pi}{T} \,:\, m_1\frac{2\pi}{T_1} = m_2\frac{2\pi}{T_2} \quad ; \quad \frac{m_1}{T_1} = \frac{m_2}{T_2}$$

Volviendo a tener en cuenta el enunciado: $m_2 = 2m_1$

$$\frac{m_1}{T_1} = \frac{2m_1}{T_2} \quad ; \quad T_2 = 2\cdot T_1$$

Modelo 2010. Cuestión 3A.- Una carga puntual *Q* con velocidad $\vec{v} = v_x\,\vec{i}$ entra en una región donde existe un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_x\,\vec{i} + B_y\,\vec{j} + B_z\vec{k}$. Determine:

a) La fuerza que se ejerce sobre la carga en el campo magnético.

b) El campo eléctrico $\vec{E}$ que debería existir en la región para que la carga prosiguiese sin cambio del vector velocidad.

Solución.

a. La fuerza que actúa sobre una carga eléctrica en movimiento dentro de un campo magnético $\vec{B}$ viene dada por la expresión:

$$\vec{F} = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$\times \equiv$ Representa producto vectorial

$$\vec{F} = Q \cdot \left((v_x, 0, 0) \times (B_x, B_y, B_z)\right) = Q \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = Q \cdot \left(0, -v_x B_z, v_x B_y\right)$$

$$\vec{F} = -Qv_x B_z\,\vec{j} + Qv_x B_y\,\vec{k}$$

b. Para que la carga se desplace manteniendo constante su vector velocidad, la suma de las fuerzas que actúan sobre ella debe ser cero.

La fuerza a la que se ve sometida la carga cuando se desplaza por una región donde coexisten un campo magnético y uno eléctrico es:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Si la fuerza resultante debe ser nula:

$$q \cdot \vec{E} + q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = 0 \;\Rightarrow\; q \cdot \vec{E} = -q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \;\Rightarrow\; \vec{E} = -\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Teniendo en cuenta el apartado a:

$$\vec{v} \times \vec{B} = -v_x B_z\,\vec{j} + v_x B_y\,\vec{k}$$

$$\vec{E} = -\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = -\left(-v_x B_z\,\vec{j} + v_x B_y\,\vec{k}\right) = v_x B_z\,\vec{j} - v_x B_y\,\vec{k}$$

Modelo 2010. Cuestión 2B.-

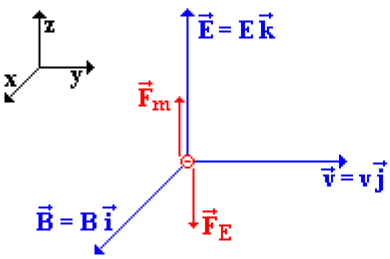
a) ¿Cuál es la velocidad de un electrón cuando se mueve en presencia de un campo eléctrico de módulo $3{,}5 \times 10^5$ N/C y de un campo magnético de 2 T, ambos mutuamente perpendiculares y, a su vez, perpendiculares a la velocidad del electrón, para que éste no se desvíe?

b) ¿Cuál es el radio de la órbita descrita por el electrón cuando se suprime el campo eléctrico?

Datos: Masa del electrón $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ *Kg. Valor absoluto de la carga del electrón* $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ *C*

Solución.

Para facilitar los cálculos, y teniendo en cuenta que los vectores de campo eléctrico, campo magnético y velocidad son perpendiculares entre si, los consideramos sobre los ejes coordenados tal y como muestra la figura (la elección de los ejes es arbitraria).



La fuerza que experimenta una partícula cargada que se desplaza a lo largo de un campo magnético $\vec{F}_m$ viene dada por la expresión $\vec{F}_m = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$, donde $\times$ representa producto vectorial y q la carga eléctrica de la partícula, aplicando al caso propuesto:

$$\vec{F}_m = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = q_e \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & v & 0 \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = q_e \cdot \left(-vB\,\vec{k}\right) = -q_e vB\,\vec{k}$$

La fuerza que experimenta una partícula cargada que se desplaza a lo largo de un campo eléctrico $\vec{F}_E$ viene dada por la expresión $\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$, aplicando a este caso:

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} = q_e \cdot E\,\vec{k}$$

Nota: *La dirección y sentido de los vectores* $\vec{F}_m$ *y* $\vec{F}_E$ *se corresponden con el dibujo teniéndose en cuenta el valor negativo de la carga del electrón.*

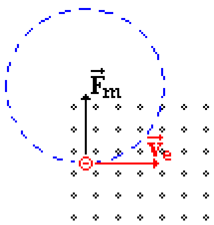
Las fuerzas que ejercen los campos eléctrico $(\vec{E})$ y magnético $(\vec{B})$ sobre el electrón son vectores de la misma dirección y sentido opuesto. Para que la velocidad del electrón mantenga constante su dirección, los módulos de ambas fuerzas deben ser iguales.

$$\left.\begin{array}{l}\left|\vec{F}_m\right| = q_e vB \\ \left|\vec{F}_E\right| = q_e E\end{array}\right\} : \left|\vec{F}_m\right| = \left|\vec{F}_E\right| \Rightarrow q_e vB = q_e E : v = \frac{E}{B}$$

Donde E es el módulo del campo eléctrico y B el del campo magnético.

$$v = \frac{E}{B} = \frac{3'5\times10^5\ N/C}{2\,T} = 1'75\times10^5\ m/s$$

b. Sí $\vec{E} = 0$ y $\vec{B} = 2\,\vec{i}\,T$ la fuerza que produce el campo magnético tiene carácter normal (centrípeta).



$$\left|\vec{F}_m\right| = \left|\vec{F}_c\right| \Rightarrow q_e vB = m\frac{v^2}{R} : R = \frac{mv}{q_e B}$$

$$R = \frac{mv}{q_e B} = \frac{9'1\times10^{-31} \cdot 1'75\times10^5}{1'6\times10^{-19} \cdot 2} \approx 4'98\times10^{-7}\ m$$

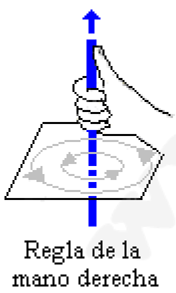
Septiembre 2009. Problema 2B.- Un hilo conductor rectilíneo de longitud infinita está situado en el eje Z y transporta una corriente de 20 A en el sentido positivo de dicho eje. Un segundo hilo conductor, también infinitamente largo y paralelo al anterior, corta al eje X en el punto de coordenada x = 10 cm. Determine:

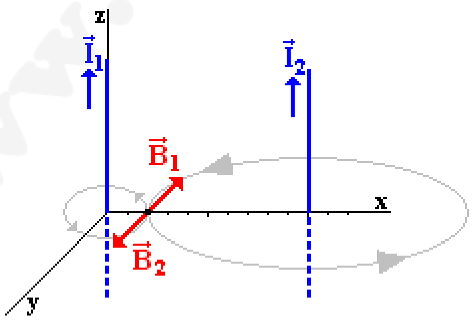
- **a)** La intensidad y el sentido de la corriente en el segundo hilo, sabiendo que el campo magnético resultante en el punto del eje X de coordenada x = 2 cm es nulo.
- **b)** La fuerza por unidad de longitud que actúa sobre cada conductor, explicando cuál es su dirección y sentido.

Dato *Permeabilidad magnética del vacío* $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}\ N\,A^{-2}$

Solución.

a. El sentido de la corriente del segundo hilo (I_2), se obtiene teniendo en cuenta que en el punto x = 2, el campo es nulo y por tanto, los campos magnéticos creados por los dos conductores deben ser igual módulo y sentidos opuestos.





Conociendo el sentido de la intensidad en el primer conductor (I_1), y aplicando la regla de la mano derecha se obtiene la dirección y sentido del campo creado por él, y por tanto el creado por el segundo conductor (opuesto).

La dirección y sentido del campo creado por el segundo conductor nos permite establecer el sentido de las líneas de campo y el sentido de la intensidad (I_2) aplicando de nuevo la regla de la mano derecha.

El valor de la intensidad del segundo conductor se obtiene a partir de la igualdad de los módulos de los vectores de campo creados por cada conductor en el punto x = 2.

$$\left|\vec{B}_1\right| = \left|\vec{B}_2\right|$$

Empleando la expresión del modulo del campo magnético:

$$\frac{\mu_o I_1}{2\pi\, a_1} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi\, a_2}$$

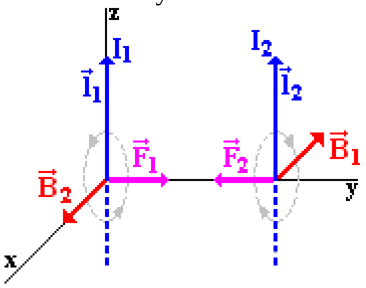
Simplificando las constantes y sustituyendo los datos, se calcula I_2.

$$\frac{20\ \text{A}}{2\times 10^{-2}\text{m}} = \frac{I_2}{8\times 10^{-2}} : \ I_2 = 80\ \text{A}$$

b. La fuerza que ejerce un campo magnético $(\vec{B})$ sobre un hilo conductor de longitud l por el que circula una corriente I viene dada por la expresión:

$$\vec{F} = I\cdot\left|\vec{l}\times\vec{B}\right|$$

donde l es la longitud del hilo que, se considera un vector de módulo la longitud del hilo, de dirección la del conductor y de sentido el de la corriente.



El módulo de la fuerza será:

$$F = I\cdot l\cdot B\cdot \text{sen}\ \alpha$$

la dirección, perpendicular al plano que determinan $\vec{l}$ y $\vec{B}$ y el sentido el de avance del tornillo que gira de l sobre B como muestra la figura.

La dirección y sentido de la fuerza, también se puede obtener mediante el producto vectorial de los vectores $\vec{l}$ y $\vec{B}$.

$$\vec{F}_1 = I_1\cdot\left|\vec{l}_1\times\vec{B}_2\right|$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{l}_1 = l_1(0,0,1)\\ \vec{B}_2 = B_2(1,0,0)\end{matrix}\right\} : \vec{F}_1 = I_1\cdot\left(l_1(0,0,1)\times B_2(1,0,0)\right) = I_1\cdot l_1\cdot B_1\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = I_1 l_1 B_1\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_2 = I_2\cdot\left|\vec{l}_2\times\vec{B}_1\right|$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{l}_2 = l_2(0,0,1)\\ \vec{B}_1 = B_1(-1,0,0)\end{matrix}\right\} : \vec{F}_2 = I_2\cdot\left(l_2(0,0,1)\times B_1(-1,0,0)\right) = I_1\cdot l_1\cdot B_1\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix} = -I_1 l_1 B_1\,\vec{i}$$

La fuerza por unidad de longitud será el cociente entre la fuerza y la longitud del hilo conductor.

$$\frac{F}{l} = I\cdot B\cdot \text{sen}\ \alpha$$

El módulo de la fuerza por unidad de longitud sobre el 2º conductor es:

$$\frac{F_2}{l_2} = I_2\cdot B_1\cdot \text{sen}\ 90 = I_2\cdot\frac{\mu_o I_1}{2\pi\cdot d} = 80\cdot\frac{4\pi\times 10^{-7}\cdot 20}{2\pi\cdot 0{,}1} = 3{,}2\times 10^{-3}\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

El módulo de la fuerza por unidad de longitud sobre el 1º conductor es:

$$\frac{F_1}{l_1} = I_1\cdot B_2\cdot \text{sen}\ 90 = I_1\cdot\frac{\mu_o I_2}{2\pi\cdot d} = 20\cdot\frac{4\pi\times 10^{-7}\cdot 80}{2\pi\cdot 0{,}1} = 3{,}2\times 10^{-3}\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

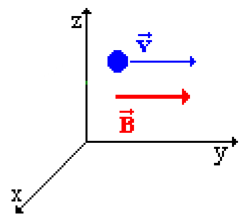
Junio 2009. Cuestión 4.- Analice si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme aumenta su velocidad cuando se desplaza en la misma dirección de las líneas del campo.

b) Una partícula cargada puede moverse en una región en la que existe un campo magnético y un campo eléctrico sin experimentar ninguna fuerza.

Solución.

a. **FALSO**. Cuando una partícula con carga eléctrica y en movimiento, se desplaza en una zona donde existe un campo magnético, se ve sometida a la acción de una fuerza denominada Fuerza de Lorentz, cuyo valor viene dado por la expresión:



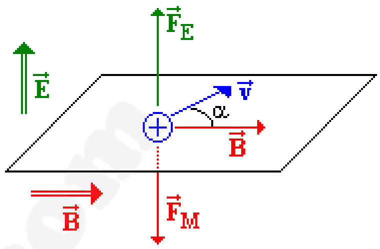
$$\vec{\mathbf{F}} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Como $\vec{v}$ es paralelo a $\vec{B}$, su producto vectorial es nulo.

$$\left.\begin{array}{r}\vec{v}\times\vec{B}=|\vec{v}|\cdot|\vec{B}|\cdot\text{sen}\,\alpha\\ \alpha=0\end{array}\right\}:\vec{v}\times\vec{B}=0$$

Por lo tanto al no estar sometida a fuerza, la partícula sigue una trayectoria rectilínea y uniforme (M.R.U).

b. **VERDADERO**. Si las fuerzas que experimenta la carga debido al campo eléctrico y al campo magnético son iguales y opuestas, la fuerza neta resultante será nula.



Para que la fuerza magnética (F_M) y la fuerza eléctrica (F_E) tengan la misma dirección bastará con que la dirección del campo eléctrico sea perpendicular al campo magnético y a la velocidad de la partícula. Para que tengan sentidos opuestos, $\text{Signo}\left(q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\right)\neq\text{Signo}\left(q\cdot\vec{E}\right)$, teniendo en cuenta el signo de la carga. La figura adjunta muestra el caso de una carga positiva.

Para que tengan igual módulo, la relación que deben tener las magnitudes será:

$$\left.\begin{array}{r}|\vec{F}_m|=q\,v\,B\,\text{sen}\,\alpha\\ |\vec{F}_E|=q\,E\end{array}\right\}:|\vec{F}_m|=|\vec{F}_E|\Rightarrow q\,v\,B\,\text{sen}\,\alpha=q\,E\;:\;E=v\,B\,\text{sen}\,\alpha$$

Septiembre 2007. Cuestión 4.-

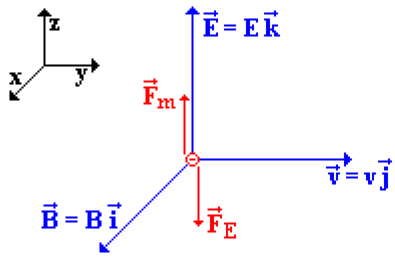
a) ¿Cuál es la velocidad de un electrón cuando se mueve en presencia de un campo eléctrico de módulo 3,5×105 N/C y de un campo magnético de 2 T, ambos mutuamente perpendiculares y, a su vez, perpendiculares a la velocidad del electrón, para que éste no se desvíe?

b) ¿Cuál es el radio de la órbita descrita por el electrón cuando se suprime el campo eléctrico?

Datos: Masa del electrón m_e $=9{,}1\times10^{-31}$ kg*; Valor absoluto de la carga del electrón* $e=1{,}6\times10^{-19}$ C

Solución.

Para facilitar los cálculos, y teniendo en cuenta que los vectores de campo eléctrico, campo magnético y velocidad son perpendiculares entre si, los consideramos sobre los ejes coordenados tal y como muestra la figura (la elección de los ejes es arbitraria).



La fuerza que experimenta una partícula cargada que se desplaza a lo largo de un campo magnético $\vec{F}_m$ viene dada por la expresión $\vec{F}_m=q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$, donde × representa producto vectorial y q la carga eléctrica de la partícula, aplicando al caso propuesto:

$$\vec{F}_m=q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)=q_e\cdot\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&v&0\\B&0&0\end{vmatrix}=q_e\cdot\left(-vB\,\vec{k}\right)=-q_e vB\,\vec{k}$$

La fuerza que experimenta una partícula cargada que se desplaza a lo largo de un campo eléctrico $\vec{F}_E$ viene dada por la expresión $\vec{F}_E=q\cdot\vec{E}$, aplicando a este caso:

$$\vec{F}_E=q\cdot\vec{E}=q_e\cdot E\,\vec{k}$$

Nota: La dirección y sentido de los vectores $\vec{F}_m$ y $\vec{F}_E$ se corresponden con el dibujo teniéndose en cuenta el valor negativo de la carga del electrón.

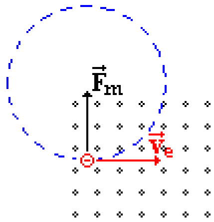
Las fuerzas que ejercen los campos eléctrico $\left(\vec{E}\right)$ y magnético $\left(\vec{B}\right)$ sobre el electrón son vectores de la misma dirección y sentido opuesto. Para que la velocidad del electrón mantenga constante su dirección, los módulos de ambas fuerzas deben ser iguales.

$$\left.\begin{array}{r}|\vec{F}_m|=q_e vB\\ |\vec{F}_E|=q_e E\end{array}\right\}:|\vec{F}_m|=|\vec{F}_E|\Rightarrow q_e vB=q_e E:v=\frac{E}{B}$$

Donde E es el módulo del campo eléctrico y B el del campo magnético.

$$v = \frac{E}{B} = \frac{3'5\times10^5\ \mathrm{N/C}}{2\ \mathrm{T}} = 1'75\times10^5\ \mathrm{m/s}$$

b. Sí $\vec{E} = 0$ y $\vec{B} = 2\,\vec{i}\ \mathrm{T}$ la fuerza que produce el campo magnético tiene carácter normal (centrípeta).



$$\left|\vec{F}_m\right| = \left|\vec{F}_c\right| \Rightarrow q_e vB = m\frac{v^2}{R} : R = \frac{mv}{q_e B}$$

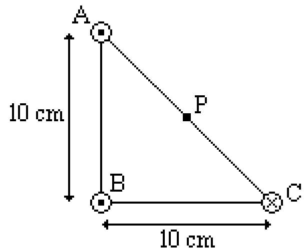
$$R = \frac{mv}{q_e B} = \frac{9'1\times10^{-31}\cdot 1'75\times10^5}{1'6\times10^{-19}\cdot 2} \approx 4'98\times10^{-7}\ \mathrm{m}$$

Septiembre 2007. Problema 2A.- Tres hilos conductores rectilíneos, muy largos y paralelos, se disponen como se muestra en la figura (perpendiculares al plano del papel pasando por los vértices de un triángulo rectángulo). La intensidad de corriente que circula por todos ellos es la misma, I = 25 A, aunque el sentido de la corriente en el hilo C es opuesto al de los otros dos hilos.
Determine:

a) E] campo magnético en el punto *P*, punto medio del segmento *AC*.

b) La fuerza que actúa sobre una carga positiva Q = $1,6\times10^{-19}$ C si 10 cm se encuentra en el punto *P* moviéndose con una velocidad de 10^6 *m/s* perpendicular al plano del papel y con sentido hacia fuera.

Datos: Permeabilidad magnética del vacío $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N\,A^{-2}}$



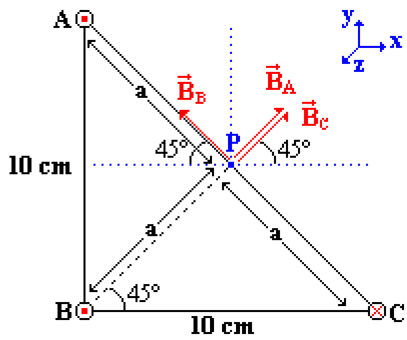
Solución.

a. En cualquiera de los triángulos rectángulos se calcula el valor de a.

En el triángulo BPC:

$$10^2 = a^2 + a^2 : 2a^2 = 100 : a = 5\sqrt{2}$$

Cada hilo conductor genera un campo magnético en P de igual módulo y distinta dirección. La dirección de cada campo se calcula con la regla de la mano derecha, obteniendo los vectores que se muestran en la figura.



El campo magnético creado por los tres hilos en el punto P es la suma vectorial del campo generado por cada uno de los hilos.

$$\vec{B}_P = \vec{B}_A + \vec{B}_B + \vec{B}_C$$

$$\vec{B}_A = \vec{B}_C = \frac{\mu_o I}{2\pi a}\left(\cos 45^\circ\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,45^\circ\,\vec{j}\right) = \frac{\mu_o I}{2\pi a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{B}_B = \frac{\mu_o I}{2\pi a}\left(-\cos 45^\circ\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,45^\circ\,\vec{j}\right) = \frac{\mu_o I}{2\pi a}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{j}\right)$$

Sumando los campos creados pos cada hilo se obtiene el campo magnético total.

$$\vec{B}_P = \vec{B}_A + \vec{B}_B + \vec{B}_C = \frac{\mu_o I}{2\pi a}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}\right)$$

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_o I}{2\pi a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{i} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\vec{j}\right) = \frac{\mu_o I\sqrt{2}}{4\pi a}\left(\vec{i} + 3\,\vec{j}\right)$$

Sustituyendo por los valores:

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_o I\sqrt{2}}{4\pi a}\left(\vec{i}+3\vec{j}\right) = \frac{4\pi\times10^{-7}\frac{N}{A^2}\cdot 25\,A\cdot\sqrt{2}}{4\pi\cdot 5\sqrt{2}\,m}\left(\vec{i}+3\vec{j}\right) = 5\times10^{-7}\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)\frac{N}{A\cdot m}(T)$$

b. $Q = +1{,}6\times10^{-19}$ C; $\vec{v} = 10^6\,\vec{k}\ m/s$. Sobre la carga Q actúa la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}_P\right) = qvB\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix} = qvB\cdot\left(-3\,\vec{i}+\vec{j}\right)$$

$$\vec{F} = 1'6\times10^{-19}\ C\cdot10^6\ m/s\cdot 5\times10^{-7}\ T\left(-3\,\vec{i}+\vec{j}\right) = 8\times10^{-20}\left(-3\,\vec{i}+\vec{j}\right)N$$

Junio 2007. Cuestión 4.- Un protón que se mueve con velocidad constante en el sentido positivo del eje X penetra en una región del espacio donde hay un campo eléctrico $\vec{E} = 4\times10^5\,\vec{k}$ N/C y un campo magnético $\vec{B} = -2\,\vec{j}$ T, siendo $\vec{k}$ y $\vec{j}$ los vectores unitarios en las direcciones de los ejes Z e Y respectivamente.

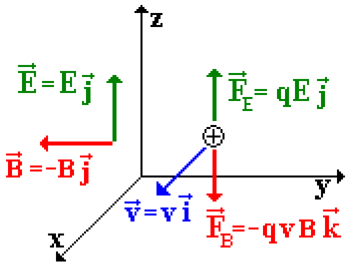
a) Determine la velocidad que debe llevar el protón para que atraviese dicha región sin ser desviado.

b) En las condiciones del apartado anterior, calcule la longitud de onda de De Broglie del protón.

Datos: Constante de Planck h = 6,63 x10^{-34} J s*; Masa del protón* $m_p = 1{,}67\times10^{-27}$ kg.

Solución.

a. Para que el protón atraviese la región sin ser desviado, la resultante de todas las fuerzas que concurren sobre el debe ser nula.



Las fuerzas que actúan sobre la carga que se desplaza se pueden observar sobre la figura adjunta.

$$\vec{R} = \vec{F}_E + \vec{F}_B$$

$$\vec{F}_E = q\cdot\vec{E} = q_{p^+}E\,\vec{k}$$

$$\vec{F}_B = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = q_{p^+}\cdot\left(v\,\vec{i}\times B\left(-\vec{j}\right)\right) = q_{p^+}vB\cdot\left(\vec{i}\times-\vec{j}\right)$$

$$\left(\vec{i}\times-\vec{j}\right) = (1,0,0)\times(0,-1,0) = \left(\begin{vmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\right) = (0,0,-1) = -\vec{k}$$

$$\vec{F}_B = -q_{p^+}vB\,\vec{k}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q_{p^+}E\,\vec{k} - q_{p^+}vB\,\vec{k} = 0$$

$$q_{p^+}E = q_{p^+}vB \qquad\qquad v = \frac{E}{B} = \frac{4\times10^5}{2} = 2\times10^5\ m/s$$

b. La longitud de onda de De Broglie viene dada por la expresión:

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}63\times10^{-34}}{9{,}1\times10^{-31}\cdot 2\times10^5} = 3{,}64\times10^{-9}\,m$$

Modelo 2007. Cuestión 3.- Indique el tipo de trayectoria descrita por una partícula cargada positivamente que posee inicialmente una velocidad v = v **i** al penetrar en cada una de las siguientes regiones:

a) Región con un campo magnético uniforme: **B** = B **i**

b) Región con un campo eléctrico uniforma: **E** = E **i**

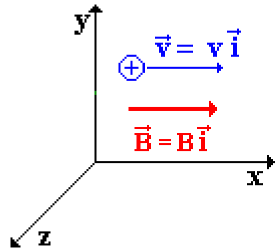
c) Región con un campo magnético uniforma: **B** = B **j**

d) Región con un campo eléctrico uniforme: **E** = E **j**

Nota: Los vectores **i** y **j** son los vectores unitarios según los ejes X e Y respectivamente.

Solución.

a) Campo magnético uniforme: $\vec{\mathbf{B}} = \mathrm{B}\,\vec{\mathbf{i}}$. Cuando una partícula con carga eléctrica y en movimiento, se desplaza en una zona donde existe un campo magnético, además de los efectos regidos por la ley de Coulomb, se ve sometida a la acción de una fuerza denominada Fuerza de Lorentz, cuyo valor viene dado por la expresión:



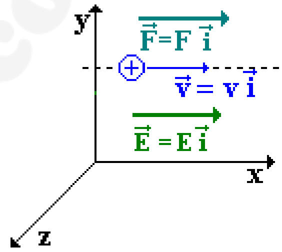
$$\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{q}\cdot\left(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{\mathrm{B}}\right)$$

Como $\vec{\mathbf{v}}$ es paralelo a $\vec{\mathbf{B}}$, su producto vectorial es nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\mathrm{v}}\times\vec{\mathrm{B}} = \left|\vec{\mathrm{v}}\right|\cdot\left|\vec{\mathrm{B}}\right|\cdot\operatorname{sen}\alpha \\ \alpha = 0\end{array}\right\} : \vec{\mathrm{v}}\times\vec{\mathrm{B}} = 0$$

Por lo tanto al no estar sometida a fuerza, la partícula sigue una trayectoria rectilínea y uniforme (M.R.U).

b) Campo eléctrico uniforma: $\vec{\mathbf{E}} = \mathrm{E}\,\vec{\mathbf{i}}$. Cuando una partícula con carga eléctrica y en movimiento, se desplaza en una zona donde existe un campo eléctrico se ve sometida a una fuerza cuyo valor viene dado por la expresión:



$$\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{q}\cdot\vec{\mathrm{E}}$$

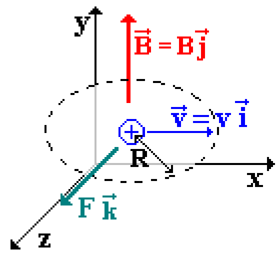
La partícula se ve sometida a una fuerza paralela al campo eléctrico, y por tanto a una aceleración en la misma dirección del campo y sentido, el mismo si la carga es positiva y opuesto si es negativa.

En el caso propuesto:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{m}\cdot\vec{\mathbf{a}} = \mathrm{q}_{\mathrm{p}^+}\cdot\mathrm{E}\,\vec{\mathbf{i}}$$

La partícula se ve sometida a una aceleración en la misma dirección y sentido que su velocidad, por tanto describe una trayectoria rectilínea uniformemente acelerada, suponiendo que el campo eléctrico es constante.

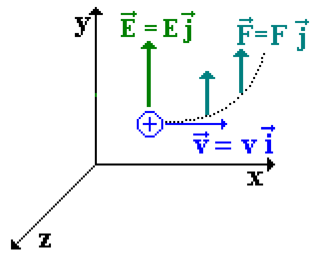
c) Campo magnético uniforma: $\vec{\mathbf{B}} = \mathrm{B}\,\vec{\mathbf{j}}$. La carga se ve sometida a una fuerza (Fuerza de Lorentz) perpendicular en todo momento a la velocidad (fuerza centrípeta), lo que provoca una trayectoria circular en el plano XZ de radio R.



$$\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{q}\cdot\left(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{\mathrm{B}}\right) = \mathrm{qvB}\cdot\left(\vec{\mathrm{i}}\times\vec{\mathrm{j}}\right) = \mathrm{qvB}\,\vec{\mathrm{k}}$$

$$\mathrm{F_M} = \mathrm{F_c} \quad : \quad \mathrm{q}_{\mathrm{p}^+}\mathrm{vB} = \mathrm{m}_{\mathrm{p}^+}\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}} \quad : \quad \mathrm{R} = \frac{\mathrm{m}_{\mathrm{p}^+}\mathrm{v}}{\mathrm{q}_{\mathrm{p}^+}\mathrm{B}}$$

d) Campo eléctrico uniforme: $\vec{\mathbf{E}} = \mathrm{E}\,\vec{\mathbf{j}}$. La carga se ve sometida a una fuerza cuyo valor viene dado por la expresión:



$$\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{q}\cdot\vec{\mathrm{E}} \quad : \quad \vec{\mathbf{F}} = \mathrm{qE}\cdot\vec{\mathrm{j}}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathrm{m}\cdot\vec{\mathrm{a}} = \mathrm{qE}\cdot\vec{\mathrm{j}} \quad : \quad \vec{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{qE}}{\mathrm{m}_{\mathrm{p}^+}}\cdot\vec{\mathrm{j}}$$

La fuerza sobre la carga es paralela al eje OY en todo momento, lo cual, provoca una aceleración en ese eje, manteniéndose la velocidad constante en el eje OX. El resultado es un movimiento parabólico, combinación de ambos movimientos: M.R.U. (OX), M.R.U.A. (OY).

Septiembre 2006. Cuestión 3.- Un protón que se mueve con una velocidad $\vec{\mathrm{v}}$ entra en una región en la que existe un campo magnético. $\vec{\mathrm{B}}$ uniforme. Explique cómo es la trayectoria que seguirá el protón:

a) Si la velocidad del protón $\vec{\mathrm{v}}$ es paralela a $\vec{\mathrm{B}}$

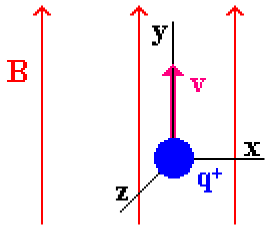
b) Si la velocidad del protón $\vec{\mathrm{v}}$ es perpendicular a $\vec{\mathrm{B}}$

Solución.

a) La fuerza que actúa sobre el protón según la ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$
$$\left|\vec{F}\right| = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\,0 = 0$$

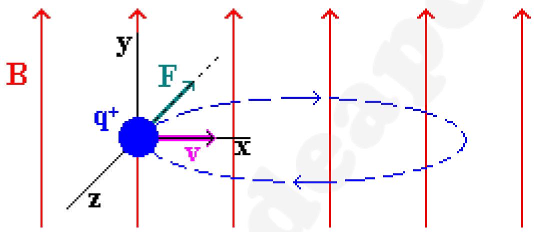
No actúa ninguna fuerza sobre el protón, luego seguirán una trayectoria rectilínea y uniforme paralela al campo $\vec{B}$



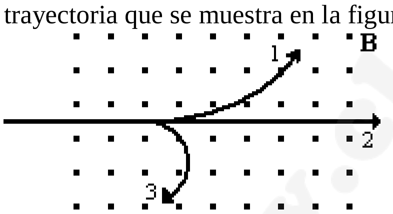
b) En este nuevo caso, la fuerza será, aplicando también la Ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad \vec{F} = q \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = qvB\,\vec{k}$$

La fuerza ($\vec{F}$), actúa en dirección perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{B}$ generando una trayectoria circular en el plano XZ como muestra la figura.



Modelo 2006. Cuestión 3.- La figura representa una región en la que existe un campo magnético uniforme B, cuyas líneas de campo son perpendiculares al plano del papel y saliendo hacia fuera del mismo. Si entran sucesivamente tres partículas con la misma velocidad v, y describe cada una de ellas la trayectoria que se muestra en la figura (cada partícula está numerada):



a) ¿Cuál es el signo de la carga de cada una de las partículas?
b) ¿En cuál de ellas es mayor el valor absoluto de la relación carga-masa (q/m)?

Solución.

La velocidad inicial de las partículas es $\vec{v} = v\,\vec{i}$ y el campo magnético es $\vec{B} = B\vec{k}$ la fuerza que sufre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético (fuerza de Lorente) es $\vec{F} = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$.

En nuestro caso

$$\vec{F} = qvB\left(\vec{i} \times \vec{k}\right) = qvB\left(-\vec{j}\right) = -qvB\,\vec{j}$$

a) ¿Cuál es el signo de la carga de cada una de las partículas?

Solución.

La partícula 1 se desvía en el sentido positivo de las $y \Rightarrow \vec{F}_1 = F_1\vec{j} = -q_1vB\,\vec{j}$ como v y B son positivos $\Rightarrow q_1 < 0$

La partícula dos no se desvía $\vec{F}_2 = 0 = -q_2vB\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad q_2 = 0$

Las partículas 3 se desvía en el sentido negativo de las $y \Rightarrow \vec{F}_3 = -F_3\vec{j} = -q_3vB\,\vec{j}$ Como v y B son positivos $\Rightarrow q_3 > 0$

b) ¿En cuál de ellas es mayor el valor absoluto de la relación carga-masa (q/m)?

Solución.

Como la trayectoria es circular

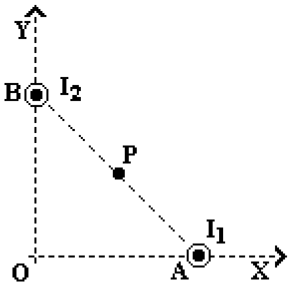
$$F_{Lorentz} = F_{centrifuga} \Rightarrow qvB = m\frac{v^2}{R}$$

$$\frac{q}{m} = \frac{v}{RB} \Rightarrow R = \frac{v}{B}\left(\frac{m}{q}\right)$$

En el gráfico se observa que $R_1 > R_2$:

$$\frac{v}{B}\left(\frac{m_1}{q_1}\right) > \frac{v}{B}\left(\frac{m_3}{q_3}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{q_1} > \frac{m_3}{q_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{m_1} < \frac{q_3}{m_3} \qquad y \qquad \frac{q_2}{m_2} = 0$$

Modelo 2006. Problema 2B.- Dos conductores rectilíneos, indefinidos y paralelos, perpendiculares al plano XY, pasan por los puntos A (80, 0) y B (0, 60) según indica la figura, estando las coordenadas expresadas en centímetros. Las corrientes circulan por ambos conductores en el mismo sentido, hacia fuera del plano del papel, siendo el valor de la corriente I_1 de 6 A. Sabiendo que $I_2 > I_1$ y que el valor del campo magnético en el punto P, punto medio de la recta que une ambos conductores, es de B = 12x 10^{-7} T, determine



a) El valor de la corriente I_2

b) El módulo, la dirección y el sentido del campo magnético en el origen de coordenadas O, utilizando el valor de 1_2, obtenido anteriormente.

Datos: Permeabilidad magnética del vacío: $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ NA^{-2}$

Solución.

a. Las líneas de campo son circunferencias concéntricas en el hilo siendo el valor del campo

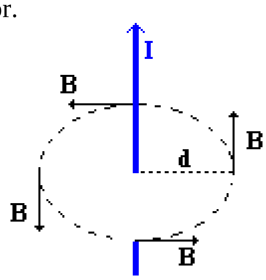
$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi \cdot d}$$

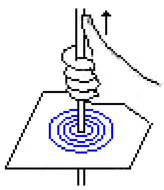
μ_o representa una constante característica del medio que recibe el nombre de permeabilidad magnética. En el vacío su valor es $\mu_0 = 4\ \pi \cdot\ 10^{-7}$ T m/A.

La distancia que separa a los conductores es

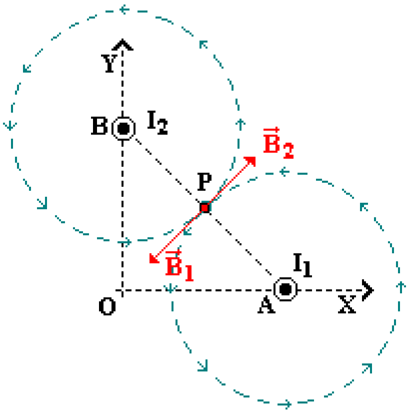
$$d(A - B) = \sqrt{(60cm)^2 + (80cm)^2} = 100\ cm = 1\ m : d = \frac{1}{2} = 0{,}5\ m$$

Por la regla de la mano derecha sabemos que el campo en el punto P es la resta de los campo generados por cada conductor.





Aplicando la regla a la disposición propuesta y trabajando en módulo:



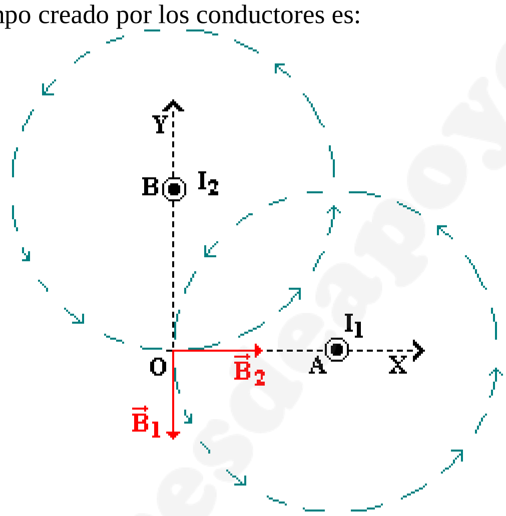
$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_o I_2}{2\pi R} - \frac{\mu_o I_1}{2\pi R} = \frac{\mu_o}{2\pi R}(I_2 - I_1)$$

$$I_2 - I_1 = B \cdot \frac{2\pi R}{\mu_o}$$

$$I_2 = \frac{2\pi RB}{\mu_o} + I_1$$

$$I_2 = \frac{2\pi \cdot 0{,}5\,\text{m} \cdot 12\times 10^{-7}\,\text{T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{NA}^{-2}} + 6\text{A} = 3\text{A} + 6\text{A} \Rightarrow I_2 = 9\text{A}$$

b. En el punto O el campo creado por los conductores es:



Campo creado por el conductor A:

$$\overline{B}_o(A) = \overline{B}_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi \cdot d}(-\bar{j}) = \frac{4\pi\times 10^{-7}(\text{NA}^{-2}) \cdot 6\text{ A}}{2\pi \cdot 0'8\text{ m}}(-\bar{j}) = 15\times 10^{-7}(-\bar{j})\text{T}$$

Campo creado por el conductor B:

$$\overline{B}_o(B) = \overline{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \cdot d}(\bar{i}) = \frac{4\pi\times 10^{-7}(\text{NA}^{-2})12\text{ A}}{2\pi \cdot 0'6\text{ m}}(\bar{i})\text{T} = 40\times 10^{-7}(\bar{i})\text{T}$$

Las direcciones y sentidos de $\overline{B}_1$ y $\overline{B}_2$ se han deducido teniendo en cuenta la regla de la mano derecha.

El campo total creado por los dos conductores en el punto O, es la suma vectorial de los campos creados por cada conductor.

$$\overline{B}_{TOTAL} = \overline{B}_1 + \overline{B}_2 = 40\times 10^{-7}\ \bar{i} - 15\times 10^{-7}\ \bar{j}\quad \text{T}$$

Septiembre 2005. Cuestión 3. Una partícula cargada penetra con velocidad v en una región en la que existe un campo magnético uniforme $\overline{B}$.
Determine la expresión de la fuerza ejercida sobre la partícula en los siguientes casos:

a) La carga es negativa, la velocidad es $\vec{v} = v_o \vec{j}$ y el campo magnético es $\vec{B} = -B_o \vec{k}$.

b) La carga es positiva, la velocidad es $\vec{v} = v_o(\vec{j} + \vec{k})$ y el campo magnético es: $\vec{B} = B_o \vec{j}$.

Nota: Los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son los vectores unitarios según los ejes X, Y y Z respectivamente.

Solución.

La expresión general de la fuerza que actúa sobre una partícula cargada en movimiento por la presencia de un campo magnético viene dada por la ley de Lorente.

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

a. $q < 0$; $\vec{v} = v_o \vec{j} = (0, v_o, 0)$; $\vec{B} = -B_o \vec{k} = (0, 0, -B_o)$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -q \cdot [(0, v_o, 0) \times (0, 0, -B_o)] = -q \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & v_o & 0 \\ 0 & 0 & -B_o \end{vmatrix} = -q \cdot \left(-v_o B_o \vec{i}\right) = q\, v_o B_o \vec{i}$$

b. $q > 0$; $\vec{v} = v_o\left(\vec{j} + \vec{k}\right) = (0, v_o, v_o)$; $\vec{B} = B_o \vec{j} = (0, B_o, 0)$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = q \cdot [(0, v_o, v_o) \times (0, B_o, 0)] = -q \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & v_o & v_o \\ 0 & B_o & 0 \end{vmatrix} = q \cdot \left(-v_o B_o \vec{i}\right) = -q\, v_o B_o \vec{i}$$

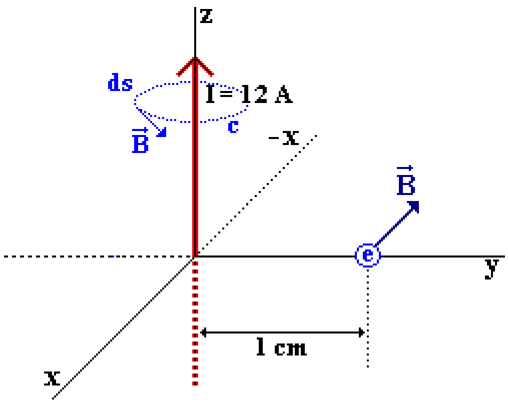
Junio 2005. Problema 2B.- Por un hilo conductor rectilíneo y de gran longitud circula una corriente de 12 A. El hilo define el eje Z de coordenadas y la corriente fluye en el sentido positivo. Un electrón se encuentra situado en el eje Y a una distancia del hilo de 1 cm. Calcule el vector aceleración instantánea que experimentaría dicho electrón si:

a) Se encuentra en reposo.
b) Su ve1ocidad es de 1 m/s según la dirección positiva del eje Y.
c) Su velocidad es de 1 m/s según la dirección positiva del eje Z.
d) Su velocidad es de 1 m/s según la dirección negativa del eje X.

Datos: Permeabilidad magnética del vado $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}\ N\, A^{-2}$
Masa del electrón $m_e = 9'1 \times 10^{-31}\ kg$
Valor absoluto de la carga del electrón $e^- = 1'6 \times 10^{-19}\ C$

Solución.

La corriente crea un campo magnético alrededor del hilo, para calcularlo se utiliza la ley de Ampêré.



$$\oint_c \vec{B} \times \vec{ds} = \mu_o I$$

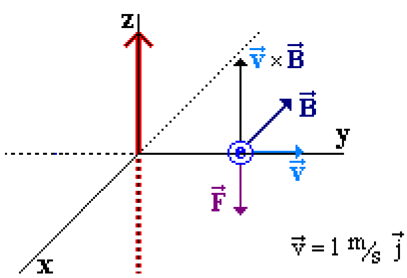
Para calcular la integral utilizamos el circuito de la figura **c**; ya que el campo magnético es tangente a las circunferencias y tiene el mismo valor en todos los puntos de la circunferencia.

$$\oint_c \vec{B} \circ \vec{ds} = B \times 2\pi R = \mu_o I \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{2\pi R}$$

$$\vec{B}\left(0, 10^{-2}, 0\right) = \frac{\mu_o I}{2\pi \times 10^{-2}}\left(-\vec{i}\right)$$

a. Si el e^- esta en reposo, la fuerza será cero, ya que un campo $\vec{B}$ solo ejerce fuerza sobre cargas en movimiento $\vec{F} = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$.

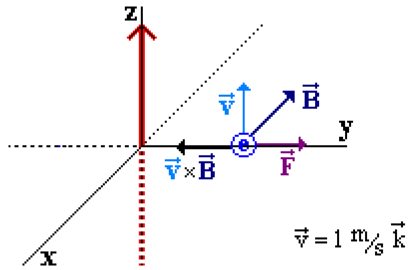
b. Su ve1ocidad es de 1 m/s según la dirección positiva del eje OY.



$$\vec{F} = -e\left(\vec{j} \times \frac{\mu_o I}{2\pi \times 10^{-2}}\left(-\vec{i}\right)\right) = \frac{\mu_o I e}{2\pi \times 10^{-2}}\left(-\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 12A \times 1'6 \times 10^{-19}}{2\pi \times 10^{-2}} = 38'4 \times 10^{-24}\left(-\vec{k}\right) N$$

c. Su velocidad es de 1 m/s según la dirección positiva del eje Z.

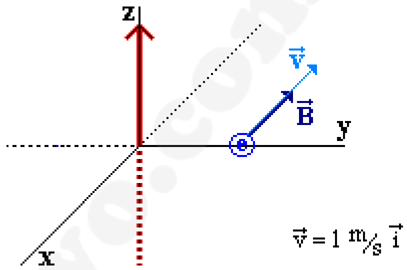


$$\vec{F} = -e\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = evB\left(\vec{j}\right) = \frac{e\mu_o I}{2\pi\times10^{-2}}\left(\vec{j}\right) =$$

$$= \frac{1'6\times10^{-19}\times4\pi\times10^{-7}\times12}{2\pi\times10^{-2}} = 38'4\times10^{-24}\,\mathrm{N}\left(\vec{j}\right)$$

d. Su velocidad es de 1 m/s según la dirección negativa del eje X.

Como $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son paralelos, $\vec{v}\times\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{F} = 0$



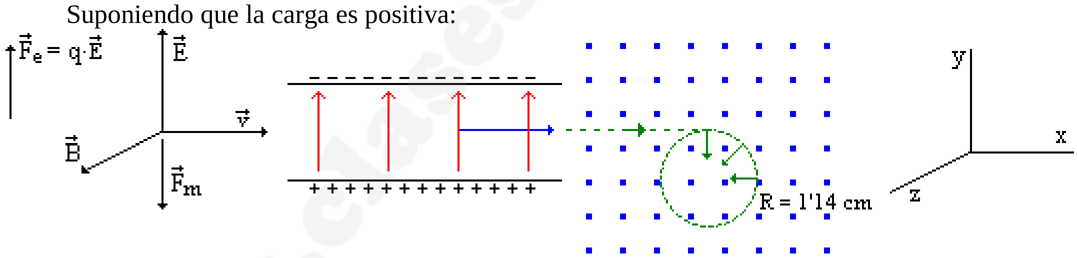
Modelo 2005. Problema 2A.- Una partícula cargada pasa sin ser desviada de su trayectoria rectilínea a través de dos campos, eléctrico y magnético, perpendiculares entre sí. El campo eléctrico está producido por dos placas metálicas paralelas (situadas a ambos lados de la trayectoria) separadas 1 cm y conectadas a una diferencia de potencial de 80 V. El campo magnético vale 0,002 T. A la salida de las placas, el campo magnético sigue actuando perpendicularmente a la trayectoria de la partícula, de forma que, ésta describe una trayectoria circular de 1,14 cm de radio. Determine:

a) La velocidad de la partícula en la región entre las placas.

b) La relación masa/carga de la partícula.

Solución.

Suponiendo que la carga es positiva:



Sabiendo que la diferencia de potencial entre las placas es 80V y la distancia entre ambas es de 1cm:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{80\mathrm{V}}{0'01\mathrm{m}} = 8000\left({}^{N}/_{c}\right)$$

$$\vec{B} = 0'002\,(T)\,\vec{k}$$

$$\vec{E} = E\vec{j} = 8000\ \left({}^{N}/_{c}\right)\vec{j}$$

a. Para que no se desvíe, F_B tiene que ser igual a la F_E:(en módulo)

$$q\cdot v\cdot B = q\cdot E \qquad v = \frac{E}{B}$$

sustituyendo:

$$v = \frac{8000\,{}^{N}/_{c}}{0'002\mathrm{T}} = 4\times10^{6}\ {}^{m}/_{s}$$

b. Si la partícula describe una circunferencia de 1'14 cm de radio, podemos utilizar este dato sabiendo que la fuerza magnética, a la salida de las placas, actúa como fuerza centrípeta:

$$F_m = q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$\frac{m}{q} = \frac{R \cdot B}{v}$$

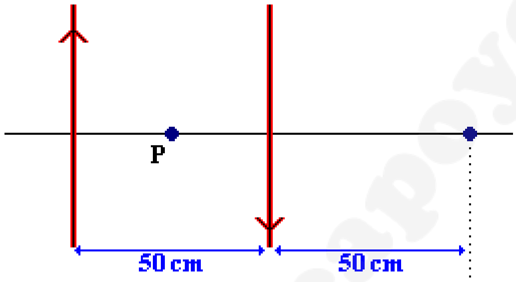
Puesto que conocemos todos los datos, sólo tenemos que sustituir:

$$m/_{q} = \frac{1{,}14\times10^{-2} \cdot 0'002T}{4 \cdot 10^{6}\ m/_{s}} = 0{,}57 \cdot 10^{-11}\ kg/_{C}$$

Modelo 2005. Problema 2B.- Dos hilos conductores de gran longitud, rectilíneos y paralelos, están separados una distancia de 50 cm, tal como se indica en la figura. Si por los hilos circulan corrientes iguales de 12 A de intensidad y con sentidos opuestos, calcule el campo magnético resultante en los puntos indicados en la figura:

a) Punto P equidistante de ambos conductores.

b) Punto Q situado a 50 cm de un conductor y a 100 cm del otro.

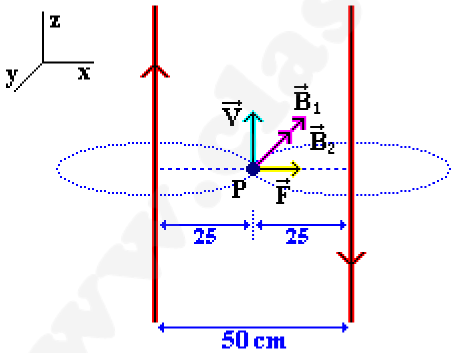


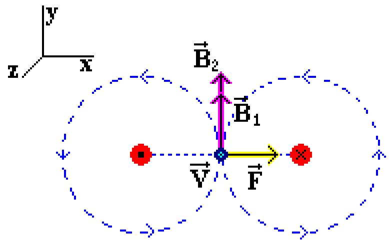
Dato: Permeabilidad magnética del vacío $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ NA^{-2}$

Solución.

a. El campo total en el punto P es la suma vectorial de los campos producidos por cada corriente.

$$\vec{B}_p = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$



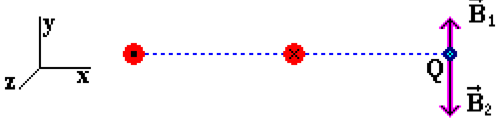


Escogemos un sistema de referencia, para dar el carácter vectorial de $\vec{B}$. Los dos vectores tienen la misma dirección y sentido, según la regla de la mano derecha.

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi \cdot a}\vec{j} \qquad \vec{B}_2 = \frac{\mu_o \cdot I_2}{2\pi \cdot a}\vec{j}$$

$$\vec{B}_p = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_o}{2\pi \cdot a}[I_1 + I_2]\vec{j} = \frac{4\pi\times10^{-7}}{2\pi \cdot 25\times10^{-2}}(12+12) = 1'92\times10^{-5}\ \vec{j}\ T$$

b. Para el punto Q, operamos de forma análoga. Por la regla de la mano derecha, comprobamos que en este caso $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ son vectores de igual dirección y sentido contrario:



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_o \cdot I_2}{2\pi 1} = \frac{4\pi\times10^{-7}\cdot 12}{2\pi\cdot 1} \qquad \vec{B}_1 = 24\times10^{-7}\,(T)\,\vec{j}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_o \cdot I_2}{2\pi 0'5} = \frac{4\pi\times10^{-7}\cdot 12}{2\pi\cdot 0'5} \qquad \vec{B}_2 = -48\times10^{-7}\,(T)\,\vec{j}$$

Restamos por tanto $\vec{B}_2 - \vec{B}_1$ para hallar el campo resultado en Q:

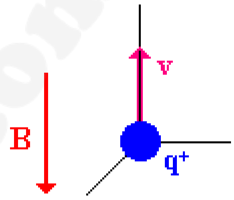
$$\vec{B}_Q = -24\times10^{-7}\,(T)\,\vec{j}$$

Septiembre 2004. Cuestión 4. En una región del espacio existe un campo magnético uniforme dirigido en el sentido negativo del eje Z. Indique mediante un esquema la dirección y el sentido de la fuerza que actúa sobre una carga, en los siguientes casos:

a) La carga es positiva y se mueve en el sentido positivo del eje Z.
b) La carga es positiva y se mueve en el sentido positivo del eje X.

Solución.

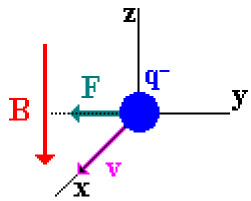
a. Teniendo en cuenta que la velocidad y el campo magnético son paralelos, y que el producto vectorial de vectores paralelos es nulo:



$$\vec{F} = q^+ \cdot \left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = 0$$

La carga es positiva y se mueve en el sentido positivo del eje X con movimiento rectilíneo uniforme.

b. En este caso, el campo magnético vendrá expresado por un vector de la forma:



$$\vec{B} = (0, 0, -B_z)$$

y el vector velocidad será de la forma:

$$\vec{v} = (v_x, 0, 0)$$

El vector fuerza se obtiene como:

$$\vec{F} = q^- \cdot \left|\vec{v}\times\vec{B}\right| = -q\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_z \end{vmatrix} = -q\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} v_x & 0 \\ 0 & -B_z \end{vmatrix}\vec{j} = -q\cdot(-1)\cdot(-v_x B_z)\vec{j} = -q\cdot v_x B_z\,\vec{j}$$

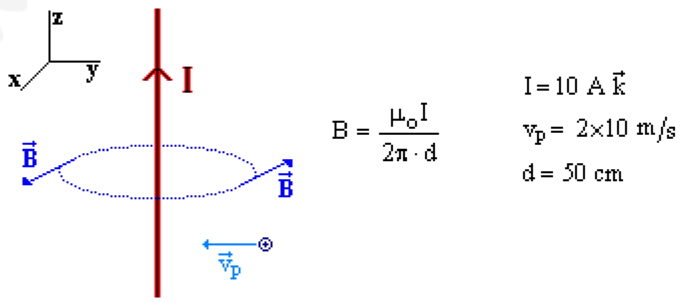
Junio 2004. Problema 1B.- Un conductor rectilíneo indefinido transporta una corriente de 10 A en el sentido positivo del eje Z. Un protón, que se mueve a 2×10^5 m/s, se encuentra a 50 cm del conductor. Calcule el módulo de la fuerza ejercida sobre el protón si su velocidad:

a) es perpendicular al conductor y está dirigida hacia él.
b) es paralela al conductor.
c) es perpendicular a las direcciones definidas en los apartados a) y b).
d) ¿En qué casos, de los tres anteriores, el protón ve modificada su energía cinética?

Datos: Permeabilidad magnética del vacío $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}\ N\cdot A^{-2}$
Valor absoluto de la carga del electrón $e = 1'6\times10^{-19}$ C

Solución.

a.



El campo B creado por el hilo de corriente es tangencial a las circunferencias pertenecientes a planos perpendiculares al conductor:

Otras vistas del problema son:

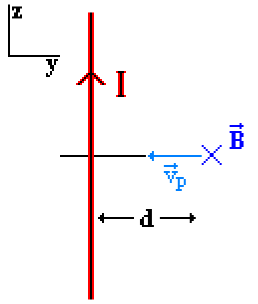
La fuerza magnética está expresada por

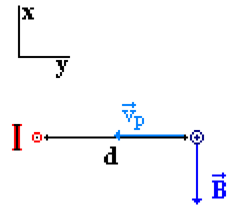
$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

El módulo de la fuerza es

$$\left|\vec{F}\right| = q \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \text{sen}\ \alpha$$

donde α es el ángulo entre $\overline{B}$ y $\overline{v}$.



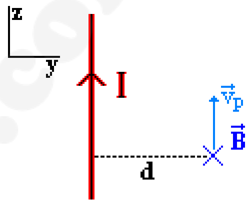


Aplicando los datos del enunciado

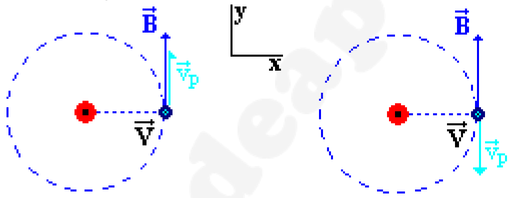
$$\left|\vec{F}\right| = e \cdot v \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \cdot \text{sen}90 = 1'6\times10^{-19} \cdot 2\times10^{5}\,\frac{4\pi\times10^{-7}\cdot 10}{2\pi\cdot 50\times10^{-2}} \cdot 1 = 1'28\times10^{-19}\,\text{N}$$

b. El ángulo entre $\overline{B}$ y $\overline{v}$ es de nuevo de 90º y por tanto, al igual que en el apartado anterior.

$$\left|\vec{F}\right| = e \cdot v \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \cdot \text{sen}90 = 1'28\times10^{-19}\,\text{N}$$



c. La dirección perpendicular a z e y, es la x, luego en este caso $\vec{v}$ es paralelo o antiparalelo a $\vec{B}$ y por tanto la fuerza es nula ya que α = 0, π y el sen 0 = sen π = 0.



d. Una carga en un campo magnético **NUNCA** ve modifica su energía cinética, ya que la fuerza es siempre perpendicular a la velocidad:

$$\vec{F} = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

por lo que no realiza trabajo $W = \Delta E_c = 0$

Modelo 2004. Problema 2A.- Por dos hilos conductores, rectilíneos y paralelos, de gran longitud, separados una distancia de 10 cm, circulan dos corrientes de intensidades 2 A y 4 A respectivamente, en sentidos opuestos. En un punto P del piano que definen los conductores, equidistante de ambos, se introduce un electrón con una velocidad de 4×10^4 m/s paralela y del mismo sentido que la corriente de 2 A. determine:

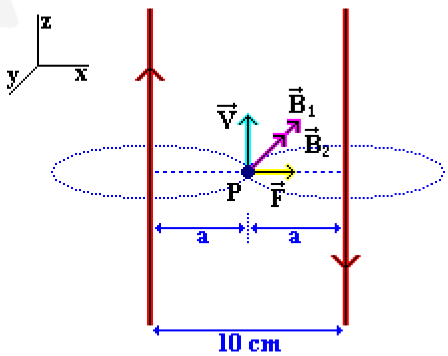
a) El campo magnético en la posición P del electrón.

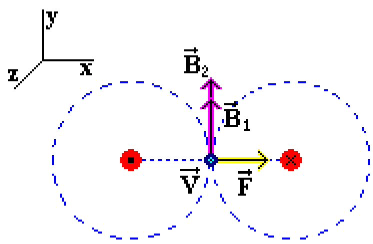
b) La fuerza magnética que se ejerce sobre el electrón situado en P.

Datos: Permeabilidad magnética del vacío $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}$ NA^{-2}

Valor absoluto de la carga del electrón e = $1'6\times10^{-19}$ C

Solución.





a. El campo magnético creado en P, es la suma vectorial (dado el carácter vectorial de $\overline{B}$) del campo que produce cada conductor en el punto P.

El Módulo del campo magnético viene expresado por:

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi\, a}$$

Los dos vectores tienen la misma dirección y sentido, por tanto el campo $\left(\overline{B}_P\right)$ resultante, lleva la dirección $\left(+\vec{j}\right)$ y el módulo es la suma escalar de ambos campos $\left(\vec{B}_1, \vec{B}_2\right)$:

$$\vec{B}_P = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \left(\frac{\mu_o I_1}{2\pi\, a} + \frac{\mu_o I_2}{2\pi\, a}\right)\vec{j}$$

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_o}{2\pi\, a}\left(I_1 + I_2\right)\vec{j}$$

Sustituyendo valores numéricos $\left(\mu = 4\pi\times 10^{-7}\, {}^{N}\!/\!_{A^2}\right)$

$$\vec{B}_P = 2{,}4\times 10^{-5}\,T\,\vec{j}$$

b. La fuerza magnética (de Lorentz) sobre el e^- en movimiento en P es:

$$\vec{F} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Operando el producto vectorial:

$$\vec{F} = -1'6\times 10^{-19}\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 4\cdot 10^4\\ 0 & 2'4\cdot 10^{-5} & 0\end{vmatrix} = \left(-1'6\times 10^{-19}\right)\cdot\left(-2'4\times 10^{-5}\cdot 4\times 10^4\right)\vec{i}$$

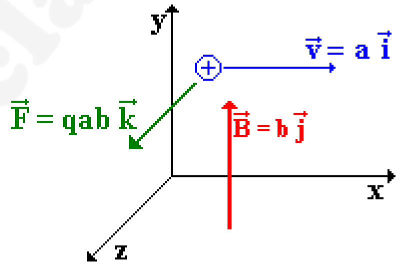
$$\vec{F} = 1{,}54\times 10^{-19}\,(N)\,\vec{i}$$

Septiembre 2003. Cuestión 3. Una partícula de carga positiva q se mueve en la dirección del eje de las X con una velocidad constante $\vec{V} = a\vec{i}$ y entra en una región donde existe un campo magnético de dirección eje Y y módulo constante $\vec{B} = b\vec{j}$.

a) Determine la fuerza ejercida sobre la partícula en módulo, dirección y sentido.

b) Razone que trayectoria seguirá la partícula y efectúe un esquema gráfico.

Solución.



a. El modulo de la fuerza es, según la ley de Lorentz:

$$\left|\vec{F}\right| = q\cdot\left|\vec{v}\times\vec{B}\right| = q\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot \text{sen}\,\alpha$$

donde α es el ángulo entre $\overline{v}$ y $\overline{B}$

$$\left|\vec{F}\right| = q\cdot a\cdot b\cdot \text{sen } 90^\circ \qquad \left|\vec{F}\right| = q\cdot a\cdot b \quad N$$

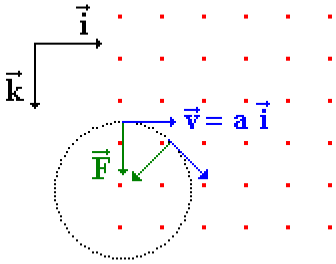
La dirección y sentido se hallan mediante el producto vectorial $\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$.

$$\vec{F} = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = q\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\end{vmatrix} = qab\cdot\vec{k}$$

$$\vec{F} = q\cdot a\cdot b \quad \vec{k}$$

La dirección y sentido del vector fuerza es la del eje z positivo, que también se puede deducir a través de la regla de la mano izquierda.

b. Trayectoria de la partícula:



La fuerza magnética actúa como fuerza centrípeta en cada punto de la trayectoria, haciendo que describa una circunferencia de radio:

$$\vec{F}_c = \vec{F}_{magnética}$$

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = q \cdot v \cdot B \quad : \quad R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

Utilizando los parámetros del problema:

$$R = \frac{m \cdot a}{q \cdot b} \quad (m)$$

Junio 2003. Cuestión 3. Un protón penetra en una región donde existe un campo magnético uniforme. Explique que tipo de trayectoria que describirá el protón si su velocidad es:

a) paralela al campo
b) perpendicular al campo.
c) ¿Qué sucede si el protón se abandona en reposo en el campo magnético?
d) ¿En que cambiarían las anteriores respuestas si en lugar de un protón fuera un electrón?

Solución.

a. Si v || B como la fuerza es $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow |\vec{F}| = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\alpha$

$\alpha = 0 \to \text{sen } 0 = 0 \to F = 0 \to$ El protón sigue una trayectoria rectilínea y uniforme.

b. $\vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow F = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen} 90 = q \cdot v \cdot B$

La fuerza es siempre $\perp$ a la velocidad $\to$ El protón sigue una trayectoria circular uniforme, cuyo radio es:

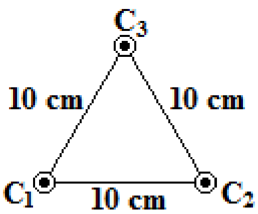
$$\frac{mv^2}{R} = qvB \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

c. $v = 0 \to$ No hay fuerza.

d. Si fuera un e^- la fuerza iría en sentido contrario y la circunferencia seria de diferente radio.

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}$$

Modelo 2003. Problema 2A.- Tres hilos conductores rectilíneos y paralelos, infinitamente largos, pasan por los vértices de un triángulo equilátero de 10 cm de lado, según se indica en la figura. Por cada uno de los conductores circula una corriente de 25 A en el mismo sentido, hacia fuera del plano del papel. Calcule:

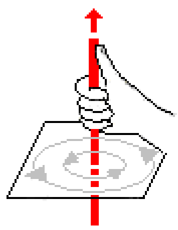


a) El campo magnético resultante en un punto del conductor C_3 debido a los otros dos conductores. Especifique la dirección del vector campo magnético.
b) La fuerza resultante por unidad de longitud ejercida sobre el conductor C_3. Especifique la dirección del vector fuerza.

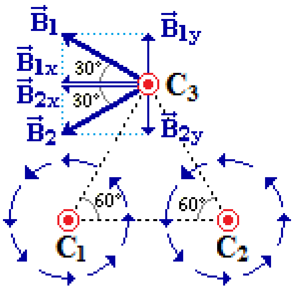
Datos: Permeabilidad magnética del vacío: $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}$ N·A^{-2}.

Solución.

a. La regla de la mano derecha nos permite determinar las líneas del fuerza alrededor de cada hilo, el campo magnético es tangente a estas y por tanto perpendicular a la línea que une los hilos, permitiendo establecer el ángulo que forma el campo magnético con unos ejes coordenados situados sobre la posición del hilo 3.



Regla de la mano derecha



El campo magnético $\vec{B}$ resultante en un punto del conductor C_3 debido a los otros dos conductores, es la suma vectorial de los campos magnéticos generados por cada hilo.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$
$$\vec{B}_1 = -B_1 \cos 30^o\, \vec{i} + B_1 \operatorname{sen} 30^o\, \vec{j}$$
$$\vec{B}_2 = -B_2 \cos 30^o\, \vec{i} - B_2 \operatorname{sen} 30^o\, \vec{j}$$

El módulo del campo magnético B, generado por un hilo por el que circula una corriente I viene dado por la expresión:

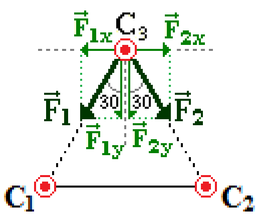
$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi\, d}$$

Aplicando la expresión a cada hilo y teniendo en cuenta que las distancias e intensidades son las mismas:

$$B_1 = B_2 = \frac{4\pi\times 10^{-7}\cdot 25}{2\pi\, 0{,}10} = 5\times 10^{-5}\,T$$
$$\vec{B}_1 = -5\times 10^{-5}\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + 5\times 10^{-5}\frac{1}{2}\vec{j}$$
$$\vec{B}_2 = -5\times 10^{-5}\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - 5\times 10^{-5}\frac{1}{2}\vec{j}$$
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -5\times 10^{-5}\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + 5\times 10^{-5}\frac{1}{2}\vec{j} + \left(-5\times 10^{-5}\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - 5\times 10^{-5}\frac{1}{2}\vec{j}\right)$$
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -5\times 10^{-5}\,\vec{i}\ T$$

b. Primero se calcula la resultante de las fuerzas que actúan sobre el tercer hilo, y de ella la fuerza por unidad de longitud sobre el hilo 3.

Por ser los hilos paralelos y circular corrientes del mismos sentido, las fuerza entre ellos es de atracción.



En el esquema adjunto se muestran las fuerzas que actúan sobre el hilo 3, la resultante es la suma vectorial de las fuerzas que generan los hilos 1 y 2 sobre el 3.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

El modulo de la fuerza entre dos hilos conductores y paralelos es:

$$F_1 = \frac{\mu_o}{2\pi\, d} I_1 I_3 \ell_1 = \frac{4\pi\times 10^{-7}}{2\pi\cdot 0{,}10}\cdot 25\cdot 25\cdot \ell_1 = 1{,}25\times 10^{-3}\ell_1\ N$$
$$F_2 = \frac{\mu_o}{2\pi\, d} I_2 I_3 \ell_1 = \frac{4\pi\times 10^{-7}}{2\pi\cdot 0{,}10}\cdot 25\cdot 25\cdot \ell_1 = 1{,}25\times 10^{-3}\ell_1\ N$$
$$\vec{F}_1 = -F_1 \cos 30\vec{i} - F_1 \operatorname{sen} 30\vec{j} = -1{,}25\times 10^{-3}\ell_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - 1{,}25\times 10^{-3}\ell_1\cdot\frac{1}{2}\vec{j}$$
$$\vec{F}_2 = F_2 \cos 30\vec{i} - F_2 \operatorname{sen} 30\vec{j} = 1{,}25\times 10^{-3}\ell_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - 1{,}25\times 10^{-3}\ell_1\cdot\frac{1}{2}\vec{j}$$
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0\vec{i} - 1{,}25\times 10^{-3}\ell_1\cdot\vec{j}$$

La fuerza por unidad de longitud del hilo es:

$$\vec{F}/\ell_1 = -1{,}25\times10^{-3}\,\vec{j}$$

Septiembre 2002. Cuestión 2.- Un electrón se mueve con velocidad **v** en una región del espacio donde coexisten un campo eléctrico y uno magnético, ambos estacionarios. Razone si cada uno de estos campos realiza o no trabajo sobre esta carga.

Solución.

Campo magnético. Si la velocidad del electrón $\vec{v}$ y el campo magnético $\vec{B}$ forman un ángulo $\alpha \neq 0$.

$$\vec{F}_m = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

Aparece una fuerza magnética sobre el electrón, siempre perpendicular a $\vec{v}$, por lo que se origina una fuerza centrípeta, que genera en el electrón una trayectoria circular de radio:

$$q\cdot v\cdot B = m\cdot\frac{v^2}{R} \qquad R = \frac{m\cdot V}{q\cdot B}$$

por tanto, la fuerza magnética **<u>no realiza trabajo</u>** sobre el electrón, ya que no produce una traslación del mismo, sino una rotación, por lo que la fuerza y el desplazamiento forman un ángulo de 90º

$$W = \bar{F}\circ\bar{d} = \left|\bar{F}\right|\cdot\left|\bar{d}\right|\cdot\cos 90 = 0$$

En el caso de que el ángulo entre $\bar{v}$ y $\bar{B}$ sea cero:

$$\left|F_m\right| = q\cdot V\cdot B\cdot\operatorname{sen}\alpha = 0$$

no se origina ninguna fuerza magnética

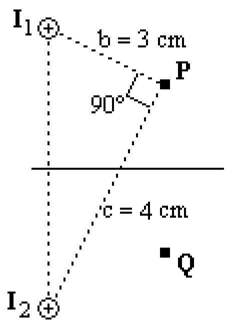
Campo eléctrico.

$$\bar{F}_e = q\cdot\bar{E}$$

Aparece una fuerza, que desplaza al electrón en la misma dirección del campo y en el mismo sentido si la carga es positiva o en sentido contrario si es una carga negativa.
Por tanto, se realiza trabajo sobre el electrón:

$$W = \left|\bar{F}\right|\cdot\left|\bar{d}\right|\cdot\cos\alpha \qquad W = q\cdot E\cdot d\cdot\cos 0º \qquad W = q\cdot E\cdot d$$

Septiembre 2002. Problema 1B. En la figura se presentan dos hilos conductores rectilíneos de gran longitud que son perpendiculares al plano del papel y llevan corrientes de intensidades I_1 e I_2 de sentidos hacia el lector.



a) Determine la relación entre I_1 e I_2 para que el campo magnético B en el punto P sea paralelo a la recta que une los hilos indicada a la figura.

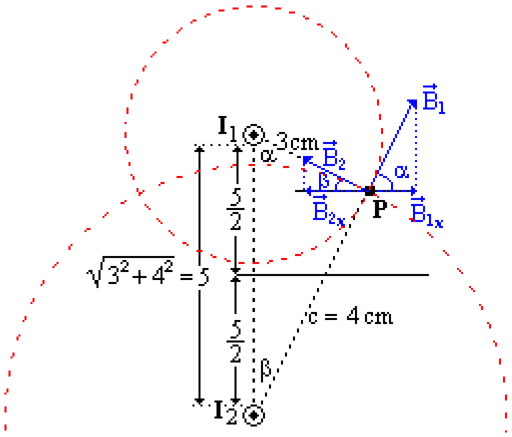
b) Para la relación entre I_1 e I_2 obtenida anteriormente, determine la dirección del campo magnético B en el punto Q (simétrico del punto P respecto del plano perpendicular a la citada recta que une los hilos y equidistante de ambos).

Nota: b y c son las distancias del punto P a los conductores.

Solución.

En la figura tenemos dos hilos conductores rectilíneos de gran longitud $\perp$ al plano de papel con I_1 e I_2 hacia el lector.

a. Se pide hallar la relación entre I_1 e I_2 para que el campo magnético B en P sea paralelo a la recta que une los hilos. Los campos $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ que crean los hilos en el punto P son:



Si el campo resultante en P tiene la dirección de la recta que une los dos hilos (dirección OY), sólo tendrá componente y, por lo que las componentes x de los dos campos han de anularse entre si:

$$\left|\vec{B}_1\right|\cdot\cos\alpha = \left|\vec{B}_2\right|\cdot\cos\beta \ (1)$$

Razones trigonométricas α y β:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{4}{5} \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{sen}\ \beta = \frac{3}{5} \quad \cos\beta = \frac{4}{5}$$

Desarrollando la expresión (1):

$$\frac{\mu_o \cdot I_1}{2\pi\cdot 0'03}\cdot\frac{3}{5} = \frac{\mu_o \cdot I_2}{2\pi\cdot 0'04}\cdot\frac{4}{5}$$

simplificando

$$\frac{3I_1}{0'03} = \frac{4I_2}{0'04}$$

Por tanto, la relación entre I_1 e I_2 tiene que ser:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{4\cdot 0'03}{0'04\cdot 3} \qquad \frac{I_1}{I_2} = 1 \qquad I_1 = I_2$$

El campo total en el punto P será: (componente y)

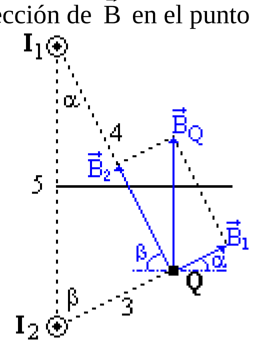
$$\left|\vec{B}p\right| = \left|\vec{B}_1\right|\text{sen}\alpha + \left|\vec{B}_2\right|\text{sen}\beta = \frac{\mu_o I}{2\pi\cdot 0'03}\cdot\frac{4}{5} + \frac{\mu_o I}{2\pi\cdot 0'04}\cdot\frac{3}{5}$$

es decir:

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_o\cdot I}{0'10\pi}\left[\frac{0'04}{0'03} + \frac{0'03}{0'04}\right]\vec{j}$$

$$\vec{B}_p = \frac{125\mu_o I}{6\pi}\,(T)\ \vec{j}$$

b. Se pide para $I_1 = I_2$ hallar la dirección de $\vec{B}$ en el punto Q(simétrico a P)



Eje x:

$$\left|\vec{B}_1\right|\cos\alpha-\left|\vec{B}_2\right|\cos\beta=B_{Q_x}$$

$$\vec{B}_{Q_x}=\frac{\mu_o\cdot I}{2\pi\cdot 0'04}\cdot\frac{4}{5}-\frac{\mu_o\cdot I}{2\pi\cdot 0'03}\cdot\frac{3}{5}$$

$$\vec{B}_{Q_x}=\frac{\mu_o\cdot I}{10\pi}\left[\frac{4}{0'04}-\frac{3}{0'03}\right]=0$$

las componentes x de $\overline{B}_1$ y $\overline{B}_2$ se anulan mutuamente.

Eje y:

$$\left|\vec{B}_{Q_y}\right|=\left|\vec{B}_1\right|\text{sen}\,\alpha+\left|\vec{B}_2\right|\text{sen}\,\beta$$

$$\left|\vec{B}_{Q_y}\right|=\frac{\mu_o\cdot I}{2\pi\cdot 0'04}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\mu_o\cdot I}{2\pi\cdot 0'03}\cdot\frac{4}{5}\Rightarrow\left|\vec{B}_{Q_y}\right|=\frac{\mu_o\cdot I}{0'10\pi}\left[\frac{0'03}{0'04}+\frac{0'04}{0'03}\right]$$

$$B_{Q_y}=\frac{\mu_o\cdot I}{0'1\pi}\cdot\frac{25}{12}\qquad B_{Q_y}=\frac{250\mu_o I}{12\pi}\qquad B_{Q_y}=\frac{125\mu_o I}{6\pi}$$

La dirección y sentido del campo B en α es: $\overline{B}_Q=\dfrac{125\mu_o I}{6\pi}\,\bar{j}$

Modelo 2002. Cuestión 3.- Una partícula cargada se mueve en línea recta en una determinada región. Si la carga de la partícula es positiva ¿Puede asegurarse que en esa región el campo magnético es nulo? ¿Cambiaría su respuesta si la carga fuese negativa en vez de ser positiva?

Solución.

No puede asegurarse que no exista un campo magnético. Podría existir un campo magnético y la partícula desplazarse paralela al campo, por lo que no se vería sometida a ninguna fuerza como pone de manifiesto la ley:

$$\vec{F}=q\cdot\left|\vec{v}\times\vec{B}\right|\qquad\left|\vec{F}\right|=q\cdot v\cdot B\cdot\text{sen}\,\alpha$$

Si la partícula se desplaza paralela al campo, α = 0 ⇒ sen α = 0 y F = 0, desplazándose con movimiento rectilíneo uniforme.

El signo de la carga solo influye en el sentido de la fuerza, si la fuerza en nula, el signo de la carga no influye.

Septiembre 2001. Cuestión 3.- Una partícula de carga q = 1’6x10^{-19} C se mueve en un campo magnético uniforme de valor B = 0’2 T, describiendo una circunferencia en un plano perpendicular a la dirección del campo magnético con periodo de 3’2x10^{-7} s, y velocidad de 3’8×10^{6} m/s. Calcule:

- **a)** El radio de la circunferencia descrita.
- **b)** La masa de la partícula.

Solución.

a. Puesto que el periodo del movimiento circular es:

$$T=3'2\cdot 10^{-7}\text{ seg}$$

la velocidad angular es:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=1'96\times10^{7}\ \text{rad}/\text{s}$$

y el radio de la trayectoria lo hallamos relacionando la velocidad angular y la lineal:

$$V=\omega\cdot R\qquad R=\frac{V}{\omega}=\frac{3'8\times10^{6}}{1'96\times10^{7}}\qquad R=0'194\text{m}$$

b. El movimiento circular se debe a la fuerza de Lorentz que actúa de fuerza centrípeta. A partir de la igualdad:

$$m\cdot\frac{v^2}{R}=q\cdot v\cdot B$$

se despeja la masa de la partícula:

$$m = \frac{q \cdot R \cdot B}{v}$$

sustituyendo los datos:

$$m = 1'633 \times 10^{-27}\,\text{kg}$$

Septiembre 2001. Problema 2A.- Por un hilo conductor rectilíneo e infinitamente largo, situado sobre el eje X, circula una corriente eléctrica en el sentido positivo del eje X. El valor del campo magnético producido por dicha corriente es de 3×10^{-5} T en el punto P (0, $-d_P$, 0), y es de 4×10^{-5} T en el punto Q (0, $+d_q$, 0). Sabiendo que $d_P + d_q = 7$ cm, determine:

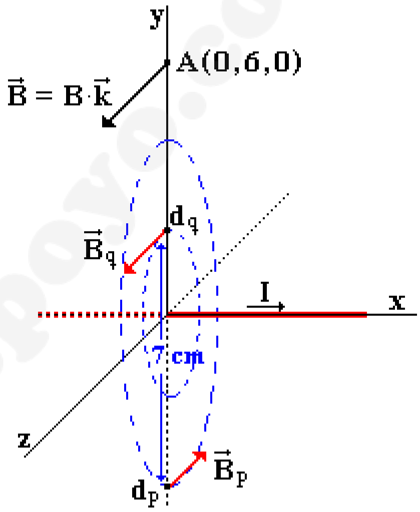
a. La intensidad que circula por el hilo conductor.

b. Valor y dirección del campo magnético producido por dicha corriente en el punto de coordenadas (0, 6 cm, 0).

Datos: Permeabilidad magnética del vacío $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ N A^{-2}

Las cantidades d_P y d_q son positivas.

Solución.



a. Las líneas de campo magnético generadas por el conductor son círculos concéntricos con el mismo por tanto, en el plano yz.

El campo $\vec{B}$ que produce una corriente indefinida de carga en un punto separado una distancia radial "a" del mismo es:

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi a}$$

por tanto, el campo producido en los puntos Q y P:

$$B_q = \frac{\mu_o I}{2\pi d_q} \quad -1- \qquad B_p = \frac{\mu_o I}{2\pi d_p} \quad -2-$$

Conociendo el campo en los dos puntos y, sabiendo que :

$$d_q + d_p = 7\times10^{-2}\,\text{m}$$

$$\begin{cases} 4\times10^{-5}\,\text{T} = \dfrac{\mu_o \cdot I}{2\pi d_q} \\ 3\times10^{-5}\,\text{T} = \dfrac{\mu_o \cdot I}{2\pi\left(7\times10^{-2} - d_q\right)} \end{cases}$$

dividiendo ambas expresiones y simplificando:

$$\frac{4\cdot10^{-5}\,\text{T}}{3\cdot10^{-5}\,\text{T}} = \frac{\left(7\cdot10^{-2} - d_q\right)}{d_q}$$

ecuación de 1º grado que permite calcular d_q.

$$d_q = 0'03\,\text{m} = 3\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad d_p = 4\,\text{cm}$$

y la intensidad ,se puede calcular por -1-, ó por -2-.

$$I = \frac{B\alpha \cdot 2\pi d\alpha}{\mu_o} \qquad I = 6\,\text{A} \qquad \left(\text{siendo } \mu_o = 4\pi\times10^{-7}\right)$$

b. En un punto A del eje y, el campo $\vec{B}$ tiene de módulo:

$$B_A = \frac{\mu_o \cdot I}{2\pi \cdot a} \quad \text{Si } a = 6\text{cm} \quad B_A = \frac{4\pi\times10^{-7}\cdot 6\text{A}}{2\pi\cdot 6\times10^{-2}} \qquad B_A = 2\times10^{-5}\,\text{T}$$

La dirección del vector $\overline{B}_A$ es tangente a la línea del campo magnético que pasa por ese punto, por tanto tiene dirección $\vec{k}$.

El sentido dado por la regla de la mano derecha es $\left(+\vec{k}\right)$:

$$\vec{B}_A = 2\times10^{-5}\,\vec{k}\,(\text{T})$$

Junio 2001. Cuestión 3. Un electrón que se mueve con una velocidad de 10^6 m/s describe una órbita circular en el seno de un campo magnético uniforme de valor 0'1 T cuya dirección es perpendicular a la velocidad. Determine:

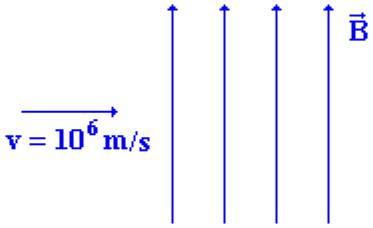
a) El valor del radio de la órbita que realiza el electrón.

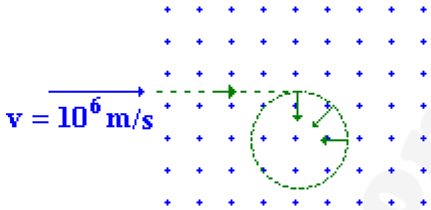
b) El número de vueltas que da el electrón en 0'001 s.

Datos: Masa del electrón m_e= 9'1×10^{-31} kg

Valor absoluto de la carga del electrón e = 1'6×10^{-19} C

Solución.





a. La fuerza de Lorentz que experimenta el electrón, hace que describa una trayectoria circular. Es una fuerza normal. (siempre perpendicular a la velocidad).

$$\bar{F} = q\cdot\left(\bar{V} \text{ x } \bar{B}\right)$$

El modulo de $\vec{F}$ es:

$$\left|\vec{F}\right| = q\cdot V\cdot B \text{ sen } 90^o$$

que es la fuerza centrípeta, por tanto:

$$-1- \quad m\cdot\frac{v^2}{R} = q\cdot V\cdot B$$

de -1-, se despeja el radio de la órbita:

$$R = \frac{m\cdot v}{qB}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$R = 5'68\cdot 10^{-5}\text{ m}$$

b. Se calcula el periodo(T) del movimiento circular:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \qquad T = 3'57\cdot 10^{10}\text{ seg} \quad \text{(tiempo que tarda en dar 1 vuelta)}$$

El nº de vueltas será:

$$\frac{0'001 \text{seg}}{3'57\cdot 10^{-10}\ \text{seg}/\text{revolución}} = \text{nº vueltas} : 2'8\cdot 10^6$$