Modelo 2014. Pregunta 3A. El campo electrostático creado por una carga puntual q, situada en el origen de coordenadas, viene dado por la expresión: $\vec{E} = \frac{9}{r^2}\vec{u}_r \ N\,C^{-1}$, donde r se expresa en m y $\vec{u}_r$ es un vector unitario dirigido en la dirección radial. Si el trabajo realizado para llevar una carga q´ desde un punto A a otro B, que distan del origen 5 y 10 m, respectivamente, es de -9×10^{-6} J, determine:

a) El valor de la carga puntual q que está situada en el origen de coordenadas.

b) El valor de la carga q´ que se ha transportado desde A hasta B.

Dato: Constante de la Ley de Coulomb, $K = 9\times10^9$ N m^2 C^{-2}

Solución.

a. Según la ley de Coulomb, el campo eléctrico viene dado por la expresión:

$$\vec{E} = K\cdot\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

Si se identifica con la expresión que se da en el enunciado

$$\vec{E} = K\cdot\frac{q}{r^2}\vec{u}_r = \frac{9}{r^2}\vec{u}_r$$

Se puede obtener el valor de la carga que genera el campo eléctrico.

$$K\cdot q = 9 \qquad q = \frac{9}{K} = \frac{9}{9\times10^9} = 10^{-9}\,C = 1\,nC$$

b. El trabajo realizado para trasladar una carga (q') dentro de un campo eléctrico cuya intensidad varia con el radio, viene dado por la expresión:

$$W_{A\to B} = q'\cdot\int_{r_A}^{r_B}\vec{E}\circ d\vec{r} = q'\cdot\int_5^{10}\frac{9}{r^2}dr = 9q'\cdot\int_5^{10}\frac{1}{r^2}dr = 9q'\cdot\left(\frac{-1}{r}\right]_5^{10} = 9q'\cdot\left(\frac{-1}{10}-\frac{-1}{5}\right) = \frac{9q'}{10}$$

Igualando al valor del trabajo del enunciado, se despeja el valor de la carga que se traslada por el campo eléctrico.

$$\frac{9q'}{10} = -9\times10^{-6} \quad q' = 10\times10^{-6}\,C = 10\,\eta C$$

Septiembre 2013. Pregunta 5A.- Se tiene un plano infinito con una densidad de carga superficial positiva σ.

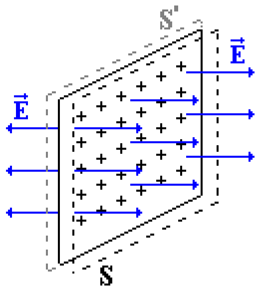
a) Deduzca, utilizando el teorema de Gauss, el vector campo eléctrico generado por la distribución.

b) Calcule la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos, en el mismo semiespacio, separados una distancia d en la dirección perpendicular al plano cargado. Justifique si cambiaría su respuesta si la dirección fuera paralela al plano cargado.

Solución.

a. Según el teorema de Gauss, el flujo neto a través de una superficie cerrada cualquiera es igual a la suma algebraica de las cargas eléctricas encerradas en su interior dividida entre la constante dieléctrica del vacío.

$$\Phi = \frac{\sum Q}{\varepsilon_o}$$



Para un plano infinito, se toma como superficie gaussiana un paralelepípedo recto como el que muestra la figura. Sólo hay flujo a través de las caras S y S' paralelas al plano. Las líneas de campo siempre salen de las cargas positivas, por lo que el campo creado por el plano será uniforme. El flujo a través de las superficies laterales es nulo (ninguna línea de campo las atraviesan).

Aplicando el teorema de Gauss:

$$\Phi = \oint_S\vec{E}\circ d\vec{S} + \oint_{S'}\vec{E}\circ d\vec{S} = E\cdot S\cdot\cos 0 + E\cdot S'\cdot\cos 0 = 2E\cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Teniendo en cuenta la densidad superficial de carga $(Q = \sigma\cdot S)$

$$2E\cdot S = \frac{\sigma\cdot S}{\varepsilon_o} \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

b. La diferencia de potencial entre dos puntos viene dado por la expresión:

$$V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{r_A}^{r_B} E\cdot dr\cdot \cos 0^{o} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} dr = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(r_B - r_A) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\cdot d$$

Si la línea que une los puntos fuese paralela al plano, $r_B - r_A = 0$, y la diferencia de potencial entre ellos seria cero

Junio 2013. Pregunta 1B.- Dos cargas puntuales q_1 y q_2 están situadas en el eje X separadas por una distancia de 20 cm y se repelen con una fuerza de 2 N. Si las suma de la dos cargas es igual a 6 μC, calcule:

a) El valor de las cargas q_1 y q_2.

b) El vector campo eléctrico en el punto medio de la recta que une las cargas.

Dato: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9\times10^{9}$ N m^2 C^{-2}.

Solución.

a. Por repelerse y sumar 6 μC, las cargas deben tener igual signo, y ser positivas. Aplicando la Ley de Coulomb:

$$\vec{F} = K\frac{q_1\cdot q_2}{d^2}\vec{u}_t \quad \text{En módulo } F = K\frac{q_1\cdot q_2}{d^2}$$

$$2 = 9\times10^{9}\frac{q_1\cdot q_2}{\left(20\times10^{-2}\right)^2} \qquad q_1\cdot q_2 = \frac{8}{9}10^{-11}$$

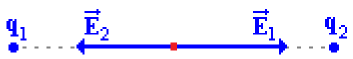
$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 6\times10^{-6} \\ q_1\cdot q_2 = \frac{8}{9}\times10^{-11} \end{cases} : \quad q_1\cdot\left(6\times10^{-6} - q_1\right) = \frac{8}{9}\times10^{-11}$$

$$q_1^2 - 6\times10^{-6}q_1 + \frac{8}{9}\times10^{-11} = 0 : \begin{cases} q_1 = \frac{10}{3}\times10^{-6} \\ q_1 = \frac{8}{3}\times10^{-6} \end{cases}$$

Si se toma como $q_1 = \frac{10}{3}\times10^{-6}\,C \Rightarrow q_2 = \frac{8}{3}\times10^{-6}\,C$

b. El campo eléctrico en el punto medio del segmento que une las cargas es la suma vectorial de los campos generan cada una de las cargas.

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = K\frac{q_1}{d^2}\vec{i} - K\frac{q_2}{d^2}\vec{i} = \frac{K}{d^2}(q_1 - q_2)\vec{i}$$



$$\vec{E} = \frac{9\times10^{9}}{\left(10\times10^{-2}\right)^2}\left(\frac{10}{3}\times10^{-6} - \frac{8}{3}\times10^{-6}\right)\vec{i} = 6\times10^{5}\,\vec{i}\ \frac{N}{C}$$

Modelo 2013. Pregunta 3B.- Una esfera maciza no conductora, de radio R = 20 cm, está cargada uniformemente con una carga de $Q = +1\times10^{-6}$ C.

a) Utilice el teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico en el punto r = 2R y determine el potencial eléctrico en dicha posición.

b) Si se envía una partícula de masa $m = 3\times10^{-12}$ kg, con la misma carga +Q y velocidad inicial $v_o = 1\times10^{5}$ m s^{-1}, dirigida al centro de la esfera, desde una posición muy lejana, determine la distancia del centro de la esfera a la que se parará dicha partícula.

Datos: $K = 9\times10^{9}$ N m^2 C^{-2}

Solución.

a. Teorema de Gauss. "El flujo neto que atraviesa una superficie cerrada cualquiera es igual a la suma algebraica de las cargas eléctricas encerradas en su interior dividida entre la constante eléctrica del vacío $\left(\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_o}\right)$"

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \oint_S E \cdot ds = E \oint_S ds = E \cdot 4\pi r^2 \overset{T.GAUSS}{=} \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$E = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}}_{K} \cdot \frac{Q}{r^2} = K\frac{Q}{r^2} = 9\times10^9 \cdot \frac{10^{-6}}{\left(2 \cdot 20\times10^{-2}\right)^2} = 56250\frac{V}{m} *$$

$$V = K \cdot \frac{Q}{r} = 9\times10^9 \cdot \frac{10^{-6}}{2 \cdot 20\times10^{-2}} = 22500\,V$$

* El campo eléctrico se puede expresar en V/m o en N/m.

b. La energía cinética que tiene la carga en un punto alejado (infinito) se transforma en trabajo que realiza para aproximarse a otra carga de igual signo.

$$\left.\begin{array}{c} W = \Delta E_c \\ \Delta E_c = \frac{1}{2}m\left(v^2 - v_o^2\right) = -\frac{1}{2}mv_o^2 \\ W = -Q \cdot \Delta V = -Q \cdot \left(V - V_\infty\right) = -Q \cdot V \end{array}\right\} : -Q \cdot V = -\frac{1}{2}mv_o^2$$

$$Q \cdot K\frac{Q}{r} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad r = \frac{2K \cdot Q^2}{mv^2} = \frac{2 \cdot 9\times10^9 \cdot \left(10^{-6}\right)^2}{3\times10^{-12} \cdot \left(10^5\right)^2} = 0{,}6\,m = 60\,cm$$

Junio 2012. Pregunta 3A.-. Un electrón que se mueve .con una velocidad $\vec{v} = 2\times10^6\,\vec{i} \cdot ms^{-1}$ penetra en una región en la que existe un campo eléctrico uniforme. Debido a la acción del campo, la velocidad del electrón se anula cuando éste ha recorrido 90 cm. Calcule, despreciando los efectos de la fuerza gravitatoria.

a) El modulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico existente en dicha región

b) El trabajo realizado por el campo eléctrico en el proceso de frenado del electrón.

Datos: Masa del electrón, $m_e = 9{,}11\times10^{-31}\,kg$;

Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}60\times10^{-19}\,C$

Solución.

a. Cuando una carga eléctrica entre en una región donde existe un campo eléctrico, se ve sometida a una fuerza que es proporcional a la intensidad del campo y al valor de su carga. La dirección de la fuerza será paralela al campo eléctrico y el sentido será el mismo que el del campo si la carga es positiva y opuesto si es negativa.

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

La fuerza a la que se ve sometida la carga se puede calcular teniendo en cuenta el segundo principio de la dinámica $\left(\vec{F} = m \cdot \vec{a}\right)$ y el tipo de movimiento que realiza la carga (M.R.U.A).

$$MRUA: \left\{\begin{array}{l} v = v_o + at \\ s = s_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2 \end{array}\right. : \ v^2 - v_o^2 = 2a\left(s - s_o\right)$$

Teniendo en cuenta que $s_o = v = 0$:

$$-v_o^2 = 2a\,s \quad a = -\frac{v_o^2}{2s} \quad \vec{a} = -\frac{v_o^2}{2s}\vec{i} \quad \vec{F} = -m\frac{v_o^2}{2s}\vec{i}$$

Sustituyendo en la expresión del campo eléctrico:

$$q \cdot \vec{E} = -\frac{mv_o^2}{2s}\vec{i} \quad \vec{E} = -\frac{mv_o^2}{2sq}\vec{i} = -\frac{9{,}11\times10^{-31} \cdot \left(2\times10^6\right)^2}{2 \cdot 0{,}9 \cdot \left(-1{,}60\times10^{-19}\right)}\vec{j} = 12{,}65\vec{i}\ N/C$$

b. El trabajo realizado por el desplazamiento de una carga en el seno de un campo eléctrico viene dado por: $W_{A\to B} = -q \cdot \Delta V = q \cdot \left(V_A - V_B\right)$

El incremento de potencial (ΔV) se puede obtener de la relación existente entre campo y potencial eléctrico.

$$E = -\frac{dV}{dx} \;:\; dV = -E\,dx$$

Teniendo en cuenta que el campo es uniforme: $\Delta V = -E\cdot\Delta x$

$$\left.\begin{aligned} W_{A\to B} &= -q\cdot\Delta V \\ \Delta V &= -E\cdot\Delta x \end{aligned}\right\} : W_{A\to B} = -q\cdot(-E\cdot\Delta x) = q\cdot E\cdot\Delta x$$

$$W_{A\to B} = -1{,}6\times10^{-19}\,C\cdot 12{,}65\,\frac{N}{C}\cdot 0{,}9\,m = -1{,}82\times10^{-18}\,J$$

También se puede resolver teniendo en cuenta que la carga se esta desplazando por un campo conservativo, y que por tanto $W = -\Delta U$, siendo en este caso ΔU el incremento de energía potencial.

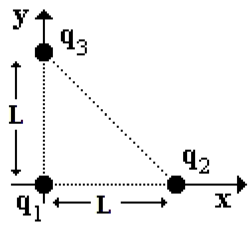
Por ser conservativo, la energía mecánica permanece constante.

$$E_m = E_P + E_c \qquad \Delta E_m = \Delta E_P + \Delta E_c = 0 \qquad \Delta E_c = -\Delta E_P$$

A medida que aumenta la energía cinética, disminuye la energía potencial

$$\left.\begin{aligned} W &= -\Delta E_P \\ -\Delta E_P &= \Delta E_c \end{aligned}\right\} : W = \Delta E_c = \frac{1}{2}m\cdot\left(v^2 - v_o^2\right) = \frac{1}{2}9{,}11\times10^{-31}\cdot\left(0-\left(2\times10^6\right)^2\right) = -1{,}82\times10^{-18}\,J$$

Modelo 2012. Pregunta 5A.- Se disponen tres cargas eléctricas puntuales en los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen una longitud *L* como indica la figura (*L* = 1,2 m, *q*1= *q*2 = 5 nC, *q*3= −5 nC).



a) Calcule la fuerza total, $\vec{F}$, ejercida por las cargas q_1 y q_2 sobre la carga q_3, y dibuje el diagrama de fuerzas de la carga q_3.

b) ¿Cuál sería el trabajo necesario para llevar la carga q_3 desde su posición actual al punto *P* de coordenadas *x* = 1,2 m, *y* = 1,2 m?

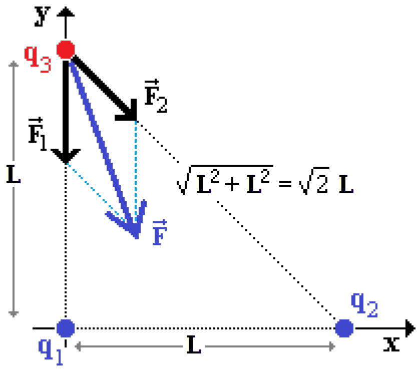
Dato: *Constante de la ley de Coulomb K* = 9×10^9 N m^2 C^{-2}.

Solución.

a. El módulo de la fuerza entre dos cargas se calcula mediante la Ley de Coulomb:

$$F = K\frac{q\cdot q'}{d^2}$$

La dirección, la línea que une las cargas, y el sentido, por ser de signos contrarios, de atracción.



$$F_1 = K\frac{q_1\cdot q_3}{L^2} = 9\times10^9\,\frac{5\times10^{-9}\cdot 5\times10^{-9}}{1{,}2^2} = 1{,}56\times10^{-7}\ N$$

$$\vec{F}_1 = -1{,}56\times10^{-7}\ \vec{j}\ N$$

$$F_2 = K\frac{q_2\cdot q_3}{L^2} = 9\times10^9\,\frac{5\times10^{-9}\cdot 5\times10^{-9}}{\left(\sqrt{2}\,1{,}2\right)^2} = 7{,}81\times10^{-8}\ N$$

Por ser un triángulo isósceles rectángulo, el ángulo en valor absoluto es de 45º

$$\vec{F}_2 = 7{,}81\times10^{-8}\ \text{sen } 45^\circ\ \vec{i} - 7{,}81\times10^{-8}\ \text{sen } 45^\circ\ \vec{j}\ N$$

La fuerza $\left(\vec{F}\right)$ a la que se ve sometida la carga q_3 es la suma vectorial de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -1{,}56\times10^{-7}\ \vec{j} + \left(7{,}81\times10^{-8}\ \text{sen } 45^\circ\ \vec{i} - 7{,}81\times10^{-8}\ \text{sen } 45^\circ\ \vec{j}\right)$$

$$\vec{F} = 7{,}81\times10^{-8}\ \text{sen}\ 45^{\circ}\ \vec{i} + \left(-1{,}56\times10^{-7} - 7{,}81\times10^{-8}\ \text{sen}\ 45^{\circ}\right)\vec{j}$$

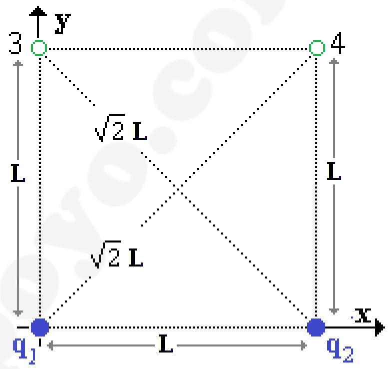
$$\vec{F} = 5{,}56\times10^{-8}\ \vec{i} - 2{,}11\times10^{-7}\ \vec{j}\ \text{N}$$

$$F = \sqrt{\left(5{,}56\times10^{-8}\right)^2 + \left(-2{,}11\times10^{-7}\right)^2} = 2{,}18\times10^{-7}\ \text{N}$$

$$\alpha = \text{arctg}\frac{F_y}{F_x} = \text{arctg}\frac{-2{,}11\times10^{-7}}{5{,}56\times10^{-8}} \approx -75^{\circ}$$

b. Por ser un campo conservativo:

$$W = -\Delta E_P = -q\cdot\Delta V = -q_3\cdot(V_4 - V_3)$$



Siendo V_4 el potencial creado por q_1 y q_2 en el punto P y V_3 el potencial creado por q_1 y q_2 en la posición inicial de q_3.

$$V = K\frac{q}{d}$$

$$V_3 = K\frac{q_1}{L} + K\frac{q_2}{\sqrt{2}\ L}\ ;\ V_4 = K\frac{q_1}{\sqrt{2}\ L} + K\frac{q_2}{L}$$

Teniendo en cuenta que $q_1 = q_2 \Rightarrow V_3 = V_4$, por lo tanto $\Delta V = 0$ y el trabajo es nulo.

$$W = -q\cdot\Delta V = -q_3\cdot 0 = 0$$

Septiembre 2011. Problema 2B.- En el punto de coordenadas (0, 3) se encuentra situada una carga, $q_1 = 7{,}11\times10^{-9}$ C y en el punto de coordenadas (4, 0) se encuentra situada otra carga, $q_2 = 3{,}0\times10^{-9}$ C. Las coordenadas están expresadas en metros.

a) Calcule la expresión vectorial de la intensidad del campo eléctrico en el punto (4, 3).

b) Calcule el valor del potencial eléctrico en el punto (4, 3).

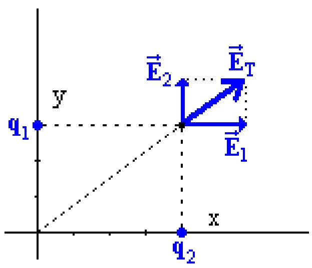
c) Indique el valor y el signo de la carga q_3 que hay que situar en el origen para que el potencial eléctrico en el punto (4, 3) se anule.

d) Indique el valor y el signo de la carga q_4 que hay que situar en el origen de coordenadas para que la intensidad del campo en el punto de coordenadas (4, 3) sea 0.

Dato: Constante de la ley de Coulomb $K = 9\times10^9$ N m^2 C^{-2}

Aclaración: No es necesario, pero si se desea que en el punto (4, 3) el campo eléctrico en el apartado d) sea un cero exacto, hay que considerar el valor de q_1 como un número periódico, $q_1 = (64/9)\times10^{-9}$ C.

Solución.



a. El campo eléctrico en el punto (4, 3) es la suma vectorial de los campos eléctricos que generan cada una de las cargas en ese punto.

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1 = E_1\vec{i} = K\cdot\frac{q_1}{r_1^2}\vec{i} = 9\times10^9\cdot\frac{64/9\times10^{-9}}{4^2}\vec{i} = 4\vec{i}$$

$$\vec{E}_2 = E_2\vec{i} = K\cdot\frac{q_2}{r_2^2}\vec{j} = 9\times10^9\cdot\frac{3\times10^{-9}}{3^2}\vec{j} = 3\vec{i}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 4\vec{i} + 3\vec{j}$$

b. El potencial eléctrico en el punto (4, 3) es la suma algebraica de los potenciales que generan cada una de las cargas en el punto

$$V_T = V_1 + V_2$$

$$V_T = \sum V_i = K\cdot\frac{q_1}{r_1} + K\cdot\frac{q_2}{r_2} = K\cdot\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right) = 9\times10^9\cdot\left(\frac{64/9\times10^{-9}}{4}+\frac{3\times10^{-9}}{3}\right) = 25\text{V}$$

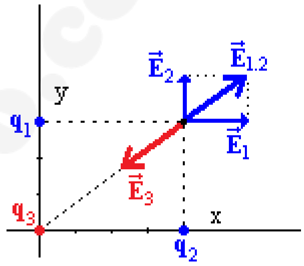
c. $$V_T = \sum V_i = K\cdot\frac{q_1}{r_1} + K\cdot\frac{q_2}{r_2} + K\cdot\frac{q_3}{r_3} = 0$$

Simplificando la constante.

$$\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}+\frac{q_3}{r_3}=0 \;;\; \frac{q_3}{r_3} = -\frac{q_1}{r_1}-\frac{q_2}{r_2} \;;\; q_3 = -r_3\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right)$$

$$q_3 = -5\cdot\left(\frac{64/9\times10^{-9}}{4}+\frac{3\times10^{-9}}{3}\right) = -\frac{125}{9}\times10^{-9}\,\text{C}$$

d. Para que el campo eléctrico en el punto (4, 3) sea nulo, la carga 3 situada sobre el punto (0, 0) deberá generar un campo eléctrico de igual modulo y dirección que el generado por las cargas 1 y 2 pero de sentido opuesto.



Para que el campo generado por la carga 2 este dirigido hacia el punto (0, 0), la carga ha de se negativa.

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 0$$

$$\vec{E}_3 = -\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = -\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right) = -4\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\vec{E}_3\right| = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = 5 \\ \left|\vec{E}_3\right| = K\cdot\dfrac{q_3}{r_3^2} \end{array}\right\} : K\cdot\frac{q_3}{r_3^2} = 5 \;;\; q_3 = -\frac{5r_3^2}{K}$$

$$r_3 = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

$$q_3 = -\frac{5\cdot5^2}{9\times10^9} = -\frac{125}{9}\times10^{-9}\,\text{C}$$

Junio 2011. Problema 2B.- Considérese un conductor esférico de radio R = 10 cm, cargado con una carga q = 5 nC.

- **a)** Calcule el campo electrostático creado en los puntos situados a una distancia del centro de la esfera de 5 y 15 cm.
- **b)** ¿A qué potencial se encuentran los puntos situados a 10 cm del centro de la esfera?
- **c)** ¿Y los situados a 15 cm del centro de la esfera?
- **d)** ¿Qué trabajo es necesario realizar para traer una carga de 2 nC desde el infinito a una distancia de 10 cm del centro de la esfera?

Dato: Constante de Coulomb $K = 1/(4\pi\,\varepsilon_o) = 9\times10^9$ N m^2 C^2.

Solución.

a. El campo eléctrico creado por un conductor esférico se calcula mediante el teorema de Gauss. Teniendo en cuenta que la dirección del campo eléctrico es radial y que la dirección del campo es perpendicular a la superficie esférica y su módulo es constante en toda la superficie, el flujo a través de la superficie es:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\bullet d\vec{S} = \oint E\,dS = E\oint dS = E\cdot4\pi R^2$$

Según el teorema de Gauss el flujo es igual a la carga encerrada dividida por ε_o.

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

Igualando

$$\frac{q}{\varepsilon_o} = E \cdot 4\pi R^2 \ ; \ \ E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \cdot \frac{q}{R^2}$$

En un conductor esférico, la carga se encuentra en la superficie y por tanto la carga en el interior de una esfera de radio menor al de la esfera conductora es cero, por lo que el campo será nulo.

- Para r = 5 cm: q = 0; E = 0
- Para r = 15 cm: q= 5×10^{-9} C; $E = 9\times10^9 \cdot \dfrac{5\times10^{-9}}{0{,}15^2} = 2000\,\dfrac{N}{C}$

b. Para r = 10 cm: $V = K \cdot \dfrac{q}{R} = 9\times10^9 \cdot \dfrac{5\times10^{-9}}{0{,}1} = 450\ V$

c. Para r = 15 cm: $V = K \cdot \dfrac{q}{R} = 9\times10^9 \cdot \dfrac{5\times10^{-9}}{0{,}15} = 300\ V$

d. Por ser un campo conservativo:

$$W = -\Delta E_p = -q \cdot \Delta V = -q \cdot \left(V(r = 0{,}1) - V(r = \infty)\right) = -2\times10^9 \cdot (450 - 0) = -9\times10^{-7}\ J$$

Se deberá hacer un trabajo de 9×10^{-7} J para trasladar la carga.

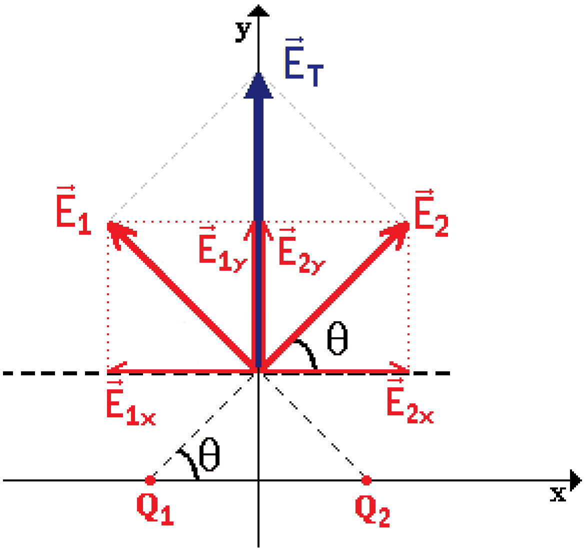
Modelo 2011. Problema 2A.- Se disponen dos cargas eléctricas sobre el eje X: una de valor Q_1 en la posición (1,0) y otra de valor Q_2 en (–1,0). Sabiendo que todas las coordenadas están expresadas en metros, determine en los casos siguientes:

a) Los valores de las cargas Q_1 y Q_2 para que el campo eléctrico en el punto (0,1) sea $\vec{E} = 2\times10^5\ \vec{j}\ N/C$ siendo $\vec{j}$ el vector unitario en el sentido positivo del eje Y.

b) La relación entre las cargas Q_1 y Q_2 para que el potencial eléctrico en el punto (2,0) sea 0.

Solución

a. El campo eléctrico generado por ambas cargas en el punto (1, 0) es la suma vectorial de los campos que generan cada una de las cargas en el punto.



Las dos cargas han de ser iguales para que se anulen las componentes x de los campo que crean cada una de las cargas, además, deben ser positivas para que el campo resultante tenga la dirección y sentido de $+\vec{j}$.

Teniendo en cuenta que las dos cargas tienen el mismo valor y están a igual distancia del punto, los módulos de los campos creados por ambas son iguales.

$$\left.\begin{array}{l} E = E_1 = E_2 = K \cdot \dfrac{Q}{r^2} \\ r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{array}\right\} : E = 9\times10^9 \cdot \frac{Q}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 4{,}5\times10^9\,Q$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{1x} + \vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2x} + \vec{E}_{2y} = -E \cdot \cos\theta\ \vec{i} + E \cdot \operatorname{sen}\theta\ \vec{j} + E \cdot \cos\theta\ \vec{i} + E \cdot \operatorname{sen}\theta\ \vec{j} = 2E \cdot \operatorname{sen}\theta\ \vec{j}$$

$$2\times10^5\ \vec{j} = 2 \cdot 4{,}5\times10^9\,Q \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\ \vec{j}$$

$$Q = \frac{2\times10^5 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 4{,}5\times10^9} = 3{,}14 \cdot 10^{-5}\,C$$

b. El potencial en un punto debido a una distribución de cargas puntuales, es la suma algebraica de los potenciales que crean cada una de las cargas en el punto.

$$V_T = \sum V_i = V_1 + V_2 = K \cdot \frac{Q_1}{r_1} + K \cdot \frac{Q_2}{r_2} = 0$$

$$\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} = 0 \ ; \ \frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{r_1}{r_2} = -\frac{1}{3}$$

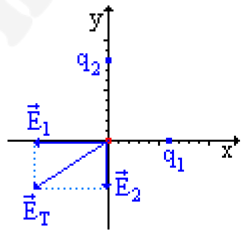
Septiembre 2010 F.G. Cuestión 2A.- Dos cargas puntuales iguales, de valor 2×10^{6} C, están situadas respectivamente en los puntos (0, 8) y (6,0). Si las coordenadas están expresadas en metros, determine:

a) La intensidad del campo eléctrico en el origen de coordenadas (0, 0).

b) El trabajo que es necesario realizar, para llevar una carga $q = 3\times10^{-6}$ C desde el punto P (3, 4), punto medio del segmento que une ambas cargas, hasta el origen de coordenadas.

Dato: Constante de la ley de Coulomb $K = 9\times10^{9}\ N\ m^2\ C^2$

Solución.



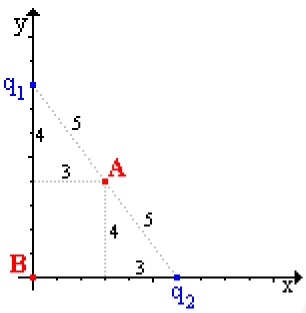
$$q_1 = q_2 = 2\times10^{-6}C$$

a. $\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -E_1\vec{i} - E_2\vec{j} = -E_1\vec{i} - E_2\vec{j}$

$$\vec{E}_T = -K \cdot \frac{q_2}{r_2^2}\vec{i} - K \cdot \frac{q_1}{r_1^2}\vec{j} = -9\times10^9 \cdot \frac{2\times10^{-6}}{6^2}\vec{i} - 9\times10^9 \cdot \frac{2\times10^{-6}}{8^2}\vec{j} = -500\vec{i} - 281{,}5\vec{j}$$

$$\left|\vec{E}_T\right| = E_T = \sqrt{(-500)^2 + (-281{,}5)^2} = 573{,}67\frac{N}{C}$$

b. El trabajo necesario para desplazar una carga entre dos puntos de un campo eléctrico es el producto de la carga por la diferencia de potencial entre los dos puntos.



$$W_{A-B} = -q \cdot (V_B - V_A)$$

$$V_A = V_{A.1} + V_{A.2} = K \cdot \frac{q_1}{r_{1.A}} + K \cdot \frac{q_2}{r_{2.A}} = \begin{Bmatrix} q_1 = q_2 = q \\ r_{1.A} = r_{2.A} \end{Bmatrix} =$$

$$= 2K \cdot \frac{q_1}{r_{1.A}} = 2 \cdot 9\times10^9 \cdot \frac{2\times10^{-6}}{5} = 7200\ V\left(\frac{J}{C}\right)$$

$$V_B = V_{B.1} + V_{B.2} = K \cdot \frac{q_1}{r_{1.B}} + K \cdot \frac{q_2}{r_{2.B}} = \{q_1 = q_2 = q\} = K \cdot q\left(\frac{1}{r_{2.B}} + \frac{1}{r_{2.B}}\right) =$$

$$= 9\times10^9 \cdot 2\times10^{-6}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6}\right) = 5250\ V\left(\frac{J}{C}\right)$$

$$W_{A-B} = -3\times10^{-6} \cdot (5250 - 7200) = 5{,}85\times10^{-3}\,J$$

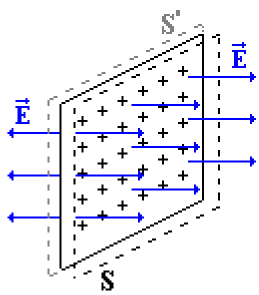
Junio 2010 F.M. Cuestión 2B.-

a) Enuncie y exprese matemáticamente el teorema de Gauss.

b) Deduzca la expresión del módulo del campo eléctrico creado por una lámina plana, infinita, uniformemente cargada con una densidad superficial de carga σ.

Solución.

a. Teorema de Gauss. El flujo neto que atraviesa una superficie cerrada cualquiera es igual a la suma algebraica de las cargas eléctricas encerradas en su interior dividida entre la constante dieléctrica del vacío.



$$\phi = \oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

b. En un plano infinito de carga constante la superficie gaussiana elegida tiene forma de un paralelepípedo como el que muestra la figura, y por lo tanto habrá flujo a través de las superficies S y

S'(S = S') paralelas al plano cargado. Aplicando el teorema de Gauss y teniendo en cuenta que el campo es constante y paralelo al vector de superficie:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \oint_S E\, dS = E\oint_S dS + E\oint_{S'} dS = E\,S + E\,S' = 2E\,S = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{Q}{2S\varepsilon_o} = \left\{\frac{Q}{S} = \sigma\right\} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

Expresión de la que se deduce que el campo e un punto del plano cargado es independiente de la distancia.

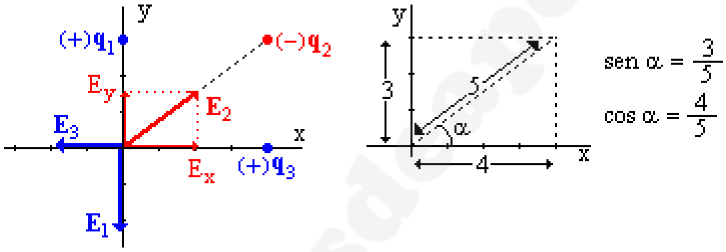
Junio 2010 F.G. Problema 2B.- Tres cargas puntuales q_1 = +3 nC, q_2 = –5 nC y q_3 = +4 nC están situadas, respectivamente, en los puntos de coordenadas (0, 3), (4, 3) y (4, 0) del plano XY. Si las coordenadas están expresadas en metros, determine:

a) La intensidad de campo eléctrico resultante en el origen de coordenadas.
b) El potencial eléctrico en el origen de coordenadas.
c) La fuerza ejercida sobre una carga q = 1 nC que se sitúa en el origen de coordenadas.
d) La energía potencial electrostática del sistema formado por las tres cargas q_1, q_2 y q_3.

Dato. Constante de la ley de Colulomb $K = 9\times10^9\ N\ m^2\ C^{-2}$

Solución.

En una distribución de cargas puntuales, como la que se pide, lo primero que hay que hacer es suponer la carga unidad positiva en el punto donde se pide calcular el campo eléctrico y establecer los vectores de campo eléctrico que genera cada una de las cargas en ese punto.



a. La intensidad de campo eléctrico generado por la distribución de cargas en el origen de ordenadas es el módulo del campo eléctrico generado por ellas.

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \left(-E_1\vec{j}\right) + \left(E_{2x}\vec{i} + E_{2y}\vec{j}\right) + \left(-E_3\vec{i}\right) = \left(E_{2x} - E_3\right)\vec{i} + \left(E_{2y} - E_1\right)\vec{j}$$

El módulo del campo eléctrico generado por una carga q a una distancia r viene dado por la expresión:

$$E = K\frac{q}{r^2}$$

Aplicando a la distribución propuesta:

$$E_1 = K\frac{q_1}{r_1^2} = 9\times10^9\,\frac{3\times10^{-9}}{3^2} = 3\,{}^{N}\!/_{C}$$

$$E_2 = K\frac{q_2}{r_2^2} = 9\times10^9\,\frac{5\times10^{-9}}{5^2} = \frac{9}{5}\,{}^{N}\!/_{C} : \begin{cases} E_{2x} = E_2 \cos\alpha = \frac{9}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{36}{25} \\ E_{2y} = E_2 \operatorname{sen}\alpha = \frac{9}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{27}{25} \end{cases}$$

$$E_3 = K\frac{q_3}{r_3^2} = 9\times10^9\,\frac{4\times10^{-9}}{4^2} = \frac{9}{4}\,{}^{N}\!/_{C}$$

Sustituyendo en la expresión del campo eléctrico:

$$\vec{E} = \left(E_{2x} - E_3\right)\vec{i} + \left(E_{2y} - E_1\right)\vec{j} = \left(\frac{36}{25} - \frac{9}{4}\right)\vec{i} + \left(\frac{27}{25} - 3\right)\vec{j} = -\frac{81}{100}\vec{i} - \frac{48}{25}\vec{j}$$

$$E = \sqrt{\left(-\frac{81}{100}\right)^2 + \left(-\frac{48}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{1737}{400}} = \frac{3\sqrt{193}}{20} \approx 2{,}1\frac{N}{C}$$

b. El potencial en un punto debido a una distribución de cargas es la suma (escalar) de los potenciales de cada carga en el punto.

$$V=\sum K\cdot\frac{q_i}{r_i}=K\cdot\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}+\frac{q_3}{r_3}\right)=9\times10^9\cdot\left(\frac{3\times10^{-9}}{3}+\frac{-5\times10^{-9}}{5}+\frac{4\times10^{-9}}{4}\right)=9\cdot(1-1+1)=9\text{ v}$$

c. $$\vec{F}=q\cdot\vec{E}=1\times10^{-9}\left(-\frac{81}{100}\vec{i}-\frac{48}{25}\vec{j}\right)=-8{,}1\times10^{-10}\vec{i}-1{,}92\times10^{-9}\vec{j}$$

$$F=\sqrt{\left(-8{,}1\times10^{-10}\right)^2+\left(-1{,}92\times10^{-9}\right)^2}\approx2{,}1\times10^{-9}\text{ N}$$

d.

$$U=K\cdot\left(\frac{q_1\cdot q_2}{r_{1.2}}+\frac{q_1\cdot q_3}{r_{1.3}}+\frac{q_2\cdot q_3}{r_{2.3}}\right)=9\times10^9\cdot1\times10^{-18}\left(\frac{3\cdot(-5)}{4}+\frac{3\cdot4}{5}+\frac{(-5)\cdot4}{4}\right)=-7{,}2\times10^{-8}\text{ J}$$

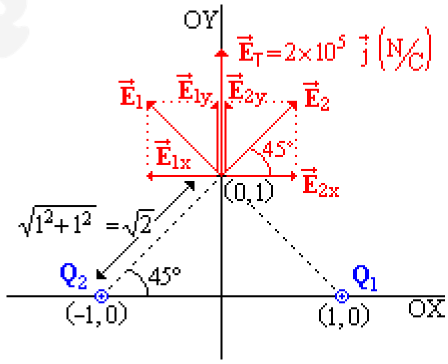
Modelo 2010. Problema 2A.- Se disponen dos cargas eléctricas sobre el eje X: una de valor Q_1 en la posición (1,0), y otra de valor Q_2 en (–1,0). Sabiendo que todas las coordenadas están expresadas en metros, determine en los dos casos siguientes:

a) Los valores de las cargas Q_1 y Q_2 para que el campo eléctrico en el punto (0,1) sea el vector $\vec{E}=2\times10^5\ \vec{j}$ N/C, siendo $\vec{j}$ el vector unitario en el sentido positivo del eje Y.

b) La relación entre las cargas Q_1 y Q_2 para que el potencial eléctrico en el punto (2,0) sea cero.

Datos: Constante de la ley de Coulomb $k = 9\times10^9\ \text{N m}^2\ \text{C}^{-2}$

Solución.



a. POR SIMETRÍA: Para que el campo resultante sea en la dirección del eje OY, las dos cargas han de ser de igual signo y módulo, por ser en la dirección positiva del eje, las cargas serán positivas.

$$\vec{E}_T=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\left\{\begin{matrix}\text{Por simetria}\\ \vec{E}_{1x}=-\vec{E}_{2x}\end{matrix}\right\}=\vec{E}_{1y}+\vec{E}_{2y}$$

Por definición:

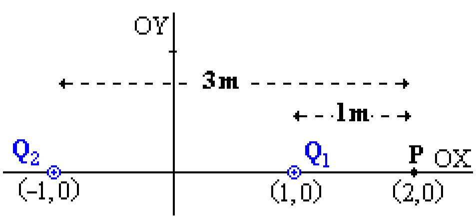
$$E=k\frac{Q}{r^2}:\begin{cases}E_{1y}=k\dfrac{Q_1}{\sqrt{2}^2}\text{sen }45^\circ\\ E_{2y}=k\dfrac{Q_2}{\sqrt{2}^2}\text{sen }45^\circ\end{cases}$$

$$\vec{E}_T=E_T\ \vec{j}=\vec{E}_{1y}+\vec{E}_{2y}=k\frac{Q_1}{\sqrt{2}^2}\text{sen }45^\circ\ \vec{j}+k\frac{Q_2}{\sqrt{2}^2}\text{sen }45^\circ\ \vec{j}=\{Q_1=Q_2\}=2k\frac{Q}{\sqrt{2}^2}\text{sen }45^\circ\ \vec{j}$$

$$E_T=2k\frac{Q}{\sqrt{2}^2}\text{sen }45^\circ=k\,Q\,\text{sen }45$$

$$Q=\frac{E_T}{k\text{ sen }45^\circ}=\frac{2\times10^5}{9\times10^9\ \frac{\sqrt{2}}{2}}=3'1\times10^{-5}\text{ C}$$

b. El potencial eléctrico en el punto P, es la suma escalar de los potenciales que genera cada una de las cargas en dicho punto.



$$V_P=V_1+V_2=0$$

Por definición: $V=k\dfrac{Q}{r}$

$$V_P=V_1+V_2=k\frac{Q_1}{r_1}+k\frac{Q_2}{r_2}$$

$$0 = k\frac{Q_1}{3} + k\frac{Q_2}{1} \qquad k\frac{Q_1}{3} = -k\frac{Q_2}{1}$$

$$Q_1 = -3Q_2$$

Tienen que ser de distinto signo, y Q_2 de triple valor que Q_1.

Septiembre 2009. Cuestión 4.- Una superficie esférica de radio R tiene una carga eléctrica Q distribuida uniformemente en ella.

a) Deduzca la expresión del módulo del vector campo eléctrico en un punto situado en el exterior a dicha superficie haciendo uso del teorema de Gauss.

b) ¿Cuál es la razón entre los módulos de los vectores campo eléctrico en dos puntos situados a las distancias del centro de la esfera $r_1 = 2$ R y $r_2 = 3$ R?

Solución.

a. Según la ley de Columb, el campo eléctrico creado por un carga Q en un punto de una superficie esférica vale $E = K\frac{Q}{r^2}$, y es perpendicular a la superficie.

El flujo a través de esta superficie será: $\Phi = \oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = K\frac{Q}{r^2}\oint_S dS = K\frac{Q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o}$

Si aplicamos el teorema de Gauss a dicha superficie esférica, el flujo a través de la superficie será:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \circ dS = \oint_S E\, dS = E\oint_S dS = E\, 4\pi\, r^2$$

Teniendo en cuenta que el flujo según el teorema de Gauss es: $\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_o}$

$$\frac{Q}{\varepsilon_o} = E\, 4\pi\, r^2 \ : \ E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2} = K\frac{Q}{r^2}$$

Resultado que es idéntico al encontrado por la Ley de Coulomb para una carga puntual.

b. Según la expresión deducida en el apartado a:

$$r_1 = 2R : E_1 = K\frac{Q}{(2R)^2} = K\frac{Q}{4R^2} \ : \ r_2 = 3R : E_2 = K\frac{Q}{(3R)^2} = K\frac{Q}{9R^2}$$

Comparando los módulos de los campos eléctricos:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{K\frac{Q}{4R^2}}{K\frac{Q}{9R^2}} = \frac{9}{4} \ : \ \frac{E_1}{E_2} = \frac{9}{4}$$

Junio 2009. Problema 2A.- Dos cargas puntuales de -3 μC y $+3$ μC se encuentran situadas en el plano XY, en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ respectivamente. Determine el vector campo eléctrico:

a) En el punto de coordenadas (10,0).

b) En el punto de coordenadas (0,10).

Nota: Todas las coordenadas están expresadas en metros.

Dato: Constante de la ley de Coulomb $K=9\times10^9$ N m^2 C^{-2}

Solución.

Según el principio de superposición, el campo eléctrico creado por una distribución de cargas puntuales en un punto de espacio, es la suma vectorial de los campos eléctricos creados por cada carga de la distribución en ese punto.

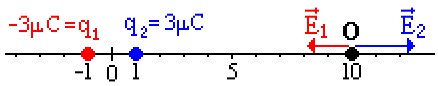
$$\bar{E}_T = \sum \bar{E}_i$$

El campo eléctrico (E) creado por una carga en un punto viene dado por la expresión:

$$\vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\bar{u}_r$$

Donde K es la constante eléctrica, Q es la carga (C), r es la distancia (m) y $\bar{u}_r$ es un vector unitario en la dirección de la recta que une la carga al punto, y sentido hacia la carga si es negativa, y en sentido opuesto si es positiva.

a. En este apartado la distribución de cargas y los campos creados por ambas en el punto O(10, 0), ofrece una geometría unidimensional, tal como muestra la figura.

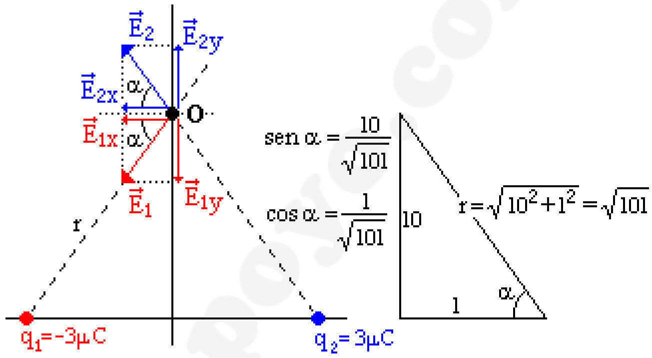


$$\overline{E}_1 = K\frac{q_1}{r_1^2}\overline{i} = 9\times10^9\frac{-3\cdot10^{-6}}{11^2}\overline{i} = -223{,}1\,\overline{i}\,\frac{N}{C}$$

$$\overline{E}_2 = K\frac{q_2}{r_2^2}\overline{i} = 9\times10^9\frac{3\cdot10^{-6}}{9^2}\overline{i} = 333{,}3\,\overline{i}\,\frac{N}{C}$$

$$\overline{E}_T = \sum\overline{E}_i = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 = -223{,}1\,i + 333{,}3\,\overline{i} = 110{,}2\,\overline{i}\,\frac{N}{C}$$

b. La figura representa la distribución de cargas y los campos creados por ambas en el punto O(0, 10). Para que la representación quede más clara se ha tomado distinta escala en los ejes.



Como el valor absoluto de las cargas y las distancias que las separan al punto O son iguales, el módulo del campo creado por ambas cargas en O también lo es.

$$\left|\overline{E}\right| = K\frac{|q|}{r^2} : E = 9\times10^9\frac{3\times10^{-6}}{\left(\sqrt{101}\right)^2} = 267{,}7\,\frac{N}{C}$$

Como en el apartado a, teniendo en cuenta el principio de superposición:

$$\overline{E}_T = \sum\overline{E}_i = \overline{E}_1 + \overline{E}_2$$

Teniendo en cuenta las componentes trigonométricas de α y el cuadrante de cada ángulo:

$$\overline{E}_1 = E_{1x}\overline{i} + E_{1y}\overline{j} = E\cdot(-\cos\alpha)\overline{i} + E\cdot(-\mathrm{sen}\,\alpha)\overline{j} = -E\cos\alpha\,\overline{i} - E\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\overline{j}$$

$$\overline{E}_2 = E_{2x}\overline{i} + E_{2y}\overline{j} = E\cdot(-\cos\alpha)\overline{i} + E\cdot\mathrm{sen}\,\alpha\,\overline{j} = -E\cos\alpha\,\overline{i} + E\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\overline{j}$$

Sumando los vectores se obtiene el campo en O.

$$\overline{E}_T = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 = -2E\cos\alpha\,\overline{i} = -2\cdot266{,}7\frac{1}{\sqrt{101}}\overline{i} = -53{,}3\,\overline{i}\,\frac{N}{C}$$

Nota: Por simetría se podría haber determinado que las componentes "y" de los campos se anulaban entre si.

Modelo 2009. Problema 1B.- En el plano x = 0 existe una distribución superficial infinita de carga cuya densidad superficial de carga es $\sigma_1 = +10^{-6}\,C/m^2$

a) Empleando el teorema de Gauss determine el campo eléctrico generado por esta distribución de carga en los puntos del espacio de coordenadas (1, 0, 0) y (–1, 0, 0).

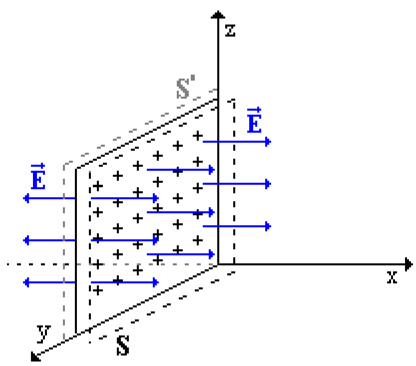
Una segunda distribución superficial infinita de carga de densidad superficial σ_2 se sitúa en el plano x = 3.

b) Empleando el teorema de Gauss determine el valor de σ_2 para que el campo eléctrico resultante de ambas distribuciones superficiales de carga en el punto (–2, 0, 0) sea $\overline{E} = +10^4\,\overline{i}$ N/C

Nota: Todas las coordenadas están expresadas en unidades del SI

Dato: Permisividad eléctrica del vacío $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}C^2N^{-1}m^{-2}$

Solución.



a. Teorema de Gauss. El flujo neto que atraviesa una superficie cerrada cualquiera es igual a la suma algebraica de las cargas eléctricas encerradas en su interior dividida entre la constante dieléctrica del vacío.

$$\phi = \oint_S \vec{E} \circ d\,\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

En un plano infinito de carga constante la superficie gaussiana elegida tiene forma de un paralelepípedo como el que muestra la figura, y por lo tanto habrá flujo a través de las superficies S y S'(S = S') paralelas al plano cargado. Aplicando el teorema de Gauss y teniendo en cuenta que el campo es constante y paralelo al vector de superficie:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \circ d\,\vec{S} = \oint_S E\,dS = E\oint_S dS + E\oint_{S'} dS = E\,S + E\,S' = 2E\,S = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{Q}{2S\varepsilon_o} = \left\{\frac{Q}{S} = \sigma\right\} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

Expresión de la que se deduce que el campo e un punto del plano cargado es independiente de la distancia.. Aplicando al caso que se propone:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = \frac{10^{-6}}{2\cdot 8.85\cdot 10^{-12}} = 5.65\times 10^4\ N/C$$

b. Según el principio de superposición, el campo en un punto es la suma vectorial de los campos generados por cada una de las distribuciones

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E} - \vec{E}_1 = 10^4\,\vec{i} - \left(-5.64\times 10^4\,\vec{i}\right) = 6{,}65\times 10^4\,\vec{i}\ N/C$$

Aplicando la expresión obtenida en el apartado a:

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_o} \Rightarrow \sigma_2 = -2E_2\,\varepsilon_o = -2\cdot\left(6{,}65\times 10^4\right)\cdot 8.85\times 10^{-12} = -1{,}18\times 10^{-6}\ C/m^2$$

Septiembre 2008. Cuestión 3. Se disponen tres cargas de 10 μC en 'tres de los vértices de un cuadrado de 1 m de lado. Determine en el centro del cuadrado:

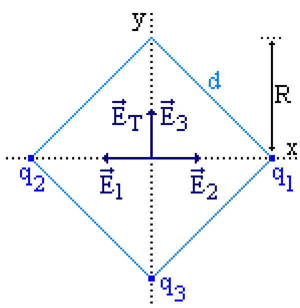
a) El módulo, la dirección y el sentido del vector campo eléctrico.

b) El potencial eléctrico. -,

Dato: Constante de la ley de Coulomb $K = 9\times 10^9\ N\,m^2\,C^{-2}$

Solución.

a. La representación del sistema puede hacerse en la orientación que más nos interese, en este caso como aparece en la figura adjunta.



La distancia entre el centro y cualquier vértice (R) es:

$$R^2 + R^2 = d^2\ :\ 2R^2 = d^2\ :\ R = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

El módulo del campo eléctrico creado por una carga a una distancia r es:

$$E = k\cdot\frac{q}{r^2}$$

En el centro del cuadrado, por ser las tres cargas iguales y las distancias a los vértices iguales, los módulos de los tres campos son iguales:

$$E_1 = E_2 = E_3 = k\cdot\frac{q}{R^2} = 9\times 10^9\cdot\frac{10\times 10^{-9}}{\left(1/\sqrt{2}\right)^2} = 180\,\frac{N}{C}$$

El vector intensidad del campo eléctrico total es la suma vectorial de los vectores intensidad de campo creados por cada una de las cargas.

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = -180\,\vec{i} + 180\,\vec{i} + 180\,\vec{j} = +180\,\vec{j}\,\frac{N}{C}$$

b. El potencial eléctrico es la suma escalar de los potenciales creados por cada una de las cargas, que son también iguales:

$$V_1 = V_2 = V_3 = k \cdot \frac{q}{r} = 10\times10^9 \cdot \frac{10\times10^{-9}}{1/\sqrt{2}} = 127{,}3\ \text{Voltios}$$

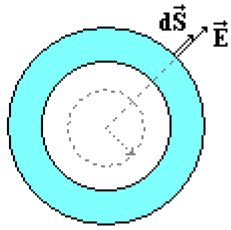
$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 = 3 \cdot 127{,}3 = 381{,}9\ \text{Voltios}$$

Septiembre 2008. Problema 1B.- Una carga de +10 μC se distribuye homogéneamente en la región que delimitan dos esferas concéntricas de radios r_1 = 2 cm y r_2 = 4 cm. Utilizando el teorema de Gauss, calcule:

a) El módulo del campo eléctrico en un punto situado a 6 cm del centro de las esferas.
b) El módulo del campo eléctrico en un punto situado a 1 cm del centro de las esferas.
Dato: Permitividad eléctrica del vacío $\varepsilon_o = 8{,}85\times10^{-12}\ N^{-1}\ m^{-2}\ C^2$.

Solución.

Teorema de Gauss: El flujo neto que atraviesa una superficie cerrada cualquiera es igual a la suma algebraica de las cargas eléctricas encerradas en su interior dividida entre la constante dieléctrica del vacío.



Dada la simetría del sistema, en todos los puntos que equidistan del centro el campo eléctrico será radial y del mismo valor, por lo que interesa coger como superficie de integración una esfera centrada en el origen.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{E}\ \text{paralelo}\ d\vec{S} \\ \cos 0 = 1 \end{array} \right\} = \oint_S E\, dS = \left\{ \begin{array}{c} \text{Ley de Coulomb} \\ E = K\dfrac{Q}{r^2} \end{array} \right\} = K\frac{Q}{r^2}\oint_S dS = K\frac{Q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = 4\pi K\, Q = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

a. El flujo a través de una superficie esférica es:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \oint_S E\, dS = E\oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2$$

Según el teorema de Gauss, el flujo tiene un valor:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

De ambas expresiones se deduce:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \ :\ E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}$$

Utilizando los datos del enunciado:

$$r = 0{,}06\ \text{m.} \qquad q_{\text{encerrada}} = 10\times10^{-9}\,C$$

$$E = \frac{1}{4\pi\, 8{,}85\times10^{-12}}\frac{10\times10^{-9}}{0{,}06^2} = 24977\,\frac{N}{C}$$

b. El procedimiento es idéntico al del apartado anterior pero ahora la superficie gaussiana es una superficie esférica de 1 cm de radio, esta superficie no encierra ninguna carga y por tanto el flujo es nulo y el campo eléctrico también es nulo.

$$r = 0{,}02\ \text{m} \qquad q_{\text{encerrada}} = 0$$

$$E = \frac{1}{4\pi\, 8{,}85\times10^{-12}}\frac{0}{0{,}06^2} = 0\,\frac{N}{C}$$

Junio 2008. Problema 1A.- Dos cargas fijas Q_1 = +12,5 nC y Q_2 = -2,7 nC se encuentran situadas en los puntos del plano XY de coordenadas (2,0) y (-2,0) respectivamente. Si todas las coordenadas están expresadas en metros, calcule:

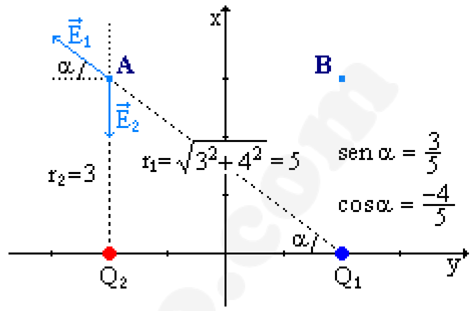
a) El potencial eléctrico que crean estas cargas en el punto A (-2,3).

b) El campo eléctrico creado por Q_1 y Q_2 en el punto A.
c) El trabajo necesario para trasladar un ión de carga negativa igual a -2e del punto A al punto B, siendo B (2,3), indicando si es a favor o en contra del campo.
d) La aceleración que experimenta el ión cuando se encuentra en el punto A.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón $e = 1{,}6\times10^{-19}\ C$
Constante de la ley de Coulomb $K = 9\times10^{9}\ N\ m^2\ C^{-2}$
Masa del ión $M = 3{,}15\times10^{-26}\ kg$

Solución.

a. Según el principio de superposición, el potencial en un punto del campo creado por varias cargas puntuales es la suma algebraica de los potenciales debidos a cada una de las cargas puntuales.



Para calcular el potencial en un punto hay que tener en cuenta que es un escalar, depende de la carga que crea el campo, de la distancia del punto a la carga y el signo será el de la carga.

$$V_A = V_1 + V_2$$

$$V_1 = K\frac{Q_1}{r_1} = 9\times10^9\ Nm^2C^{-2}\ \frac{12{,}5\times10^{-9}\ C}{5m} = 22{,}5V$$

$$V_2 = K\frac{Q_2}{r_2} = 9\times10^9\ Nm^2C^{-2}\ \frac{-2{,}7\times10^{-9}\ C}{3m} = -8{,}1V$$

$$V_A = 22{,}5 + (-8{,}1) = 14{,}4V$$

b. El campo eléctrico creado por varias cargas puntuales en un punto, es la suma vectorial de los campos que creados por cada una de las cargas en ese punto.

El módulo el campo eléctrico se puede obtener del potencial.

$$\left.\begin{matrix} V = \dfrac{K\,Q}{r} \\ \left|\vec{E}\right| = \dfrac{K\,Q}{r^2} \end{matrix}\right\} : V = \left|\vec{E}\right|\cdot r \Rightarrow \left|\vec{E}\right| = \frac{V}{r}$$

$$\left|\bar{E}_1\right| = \frac{V_1}{r_1} = \frac{22{,}5V}{5m} = 4{,}5\frac{N}{C} \qquad \left|\bar{E}_2\right| = \frac{V_2}{r_2} = \frac{8{,}1V}{3m} = 2{,}7\frac{N}{C}$$

Las componentes vectoriales se obtienen de las razones trigonométricas de los ángulos que forman los vectores.

$$\bar{E}_1 = \left|\bar{E}_1\right|\cdot\left(\cos\alpha\ \bar{i} + \operatorname{sen}\alpha\ \bar{j}\right) = 4{,}5\cdot\left(\frac{-4}{5}\bar{i} + \frac{3}{5}\bar{j}\right) = -3{,}6\bar{i} + 2{,}7\bar{j}$$

$$\bar{E}_2 = \left|\bar{E}_2\right|\cdot\left(0\ \bar{i} + (-1)\ \bar{j}\right) = 2{,}7\cdot\left(0\bar{i} - \bar{j}\right) = -2{,}7\bar{j}$$

$$\bar{E}_T = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \left(-3{,}6\bar{i} + 2{,}7\bar{j}\right) + \left(-2{,}7\bar{j}\right) = -3{,}6\bar{i}$$

$$\left|\bar{E}_T\right| = 3{,}6\frac{N}{C}$$

c. $W_{A\to B} = -q\cdot\left(V_B - V_A\right)$

Potencial en B:

$$V_B = V_{1.B} + V_{2.B}$$

$$V_{1.B} = K\frac{Q_1}{r_{1.B}} = 9\times10^9\ Nm^2C^{-2}\ \frac{12{,}5\times10^{-9}\ C}{3m} = 37{,}5V$$

$$V_{2.B} = K\frac{Q_2}{r_{2.B}} = 9\times10^9\ Nm^2C^{-2}\ \frac{-2{,}7\times10^{-9}\ C}{5m} = -4{,}86V$$

$$V_A = 37{,}5 + (-4{,}86) = 32{,}6\,V$$

Sustituyendo en la expresión del trabajo:

$$W_{A\to B} = -\left(-2\cdot 1{,}6\times10^{-19}\right)\cdot(32{,}6-14{,}4) = +5{,}82\times10^{-19}\,J$$

Por ser positivo el trabajo es a favor del campo.

d. Aplicando el segundo principio de la dinámica:

$$F = m\,a$$

La fuerza a la que se ve sometido el ión en un punto del campo es:

$$\vec{F} = q_{ión}\cdot\vec{E}$$

Igualando y se despeja la aceleración:

$$q_{ión}\cdot\vec{E} = m_{ión}\vec{a} \qquad \vec{a} = \frac{q_{ión}\vec{E}}{m}$$

$$a = \frac{2\cdot 1{,}6\times10^{-19}\cdot 3{,}6\,\vec{i}}{3{,}15\times10^{26}} = 3{,}66\times10^{7}\,\vec{i}\,\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}$$

Modelo 2008. Cuestión 4.-

a) Enuncie el teorema de Gauss y escriba su expresión matemática.

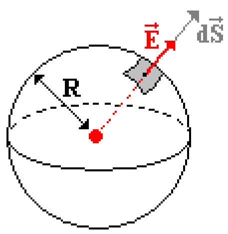
b) Utilice dicho teorema para deducir la expresión matemática del campo eléctrico en un punto del espacio debido a una carga puntual.

Solución.

a. El flujo neto que atraviesa una superficie cerrada cualquiera es igual a la suma algebraica de las cargas eléctricas encerradas en su interior dividida entre la constante dieléctrica del vacío.

$$\phi = \frac{\sum Q}{\varepsilon_o} = \oint_c \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

b. Para facilitar el cálculo del flujo, suponemos una superficie que encierre a la carga puntual con una simetría sencilla y adecuada, en este caso una esfera como la de la figura, de modo que el campo $(\vec{E})$ en cualquier punto de la superficie es un vector con dirección radial y de módulo constante $\left(E = \frac{Q}{R^2} : R = \text{radio de la esfera}\right)$, y $d\vec{S}$ es el vector representativo de la superficie diferencial a estudio, perpendicular a ella.



El flujo a través de todo la esfera vendar dado por la expresión:

$$\varphi = \oint_c \vec{E}\circ d\vec{S} = \oint_c E\cdot dS\cdot\cos\alpha$$

α es el ángulo que forman $\vec{E}$ y $d\vec{S}$, que es 0º por ser vectores paralelos.

$$\phi = \oint_c E\cdot dS\cdot\cos 0^{o} = E\cdot\oint_c dS = k\frac{Q}{R^2}\cdot\oint_c dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Septiembre 2007. Problema 2B.-

Se disponen dos cargas eléctricas sobre el eje X: una de valor Q_1 en la posición (1, 0), y otra de valor Q_2 en (–1, 0). Sabiendo que todas las distancias están expresadas en metros, determine en los dos casos siguientes:

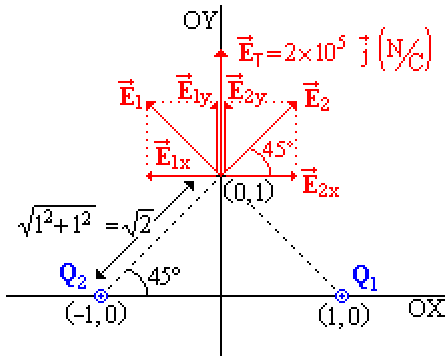
a) Los valores de las cargas Q_1 y Q_2 para que el campo eléctrico en el punto (1, 0) sea el vector $\vec{E} = 2\times10^5\,\vec{j}$ N/C, siendo $\vec{j}$ el vector unitario en el sentido positivo del eje Y.

b) La relación entre las cargas Q_1 y Q_2 para que el potencial eléctrico en el punto (2, 0) sea cero.

Datos: Constante de la ley de Coulomb $k = 9\times10^9\ N\,m^2\,C^{-2}$

Solución.

a. POR SIMETRÍA: Para que el campo resultante sea en la dirección del eje OY, las dos cargas han de ser de igual signo



y módulo, por ser en la dirección positiva del eje, las cargas serán positivas.

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{Bmatrix} \text{Por simetria} \\ \vec{E}_{1x} = -\vec{E}_{2x} \end{Bmatrix} = \vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2y}$$

Por definición:

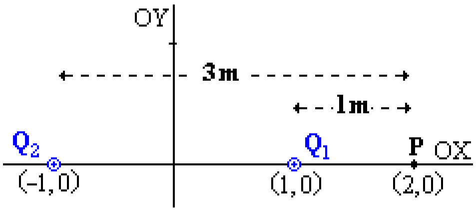
$$E = k\frac{Q}{r^2} : \begin{cases} E_{1y} = k\dfrac{Q_1}{\sqrt{2}^2}\,\text{sen } 45^{\circ} \\ E_{2y} = k\dfrac{Q_2}{\sqrt{2}^2}\,\text{sen } 45^{\circ} \end{cases}$$

$$\vec{E}_T = E_T\,\vec{j} = \vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2y} = k\frac{Q_1}{\sqrt{2}^2}\,\text{sen } 45^{\circ}\,\vec{j} + k\frac{Q_2}{\sqrt{2}^2}\,\text{sen } 45^{\circ}\,\vec{j} = \{Q_1 = Q_2\} = 2k\frac{Q}{\sqrt{2}^2}\,\text{sen } 45^{\circ}\,\vec{j}$$

$$E_T = 2k\frac{Q}{\sqrt{2}^2}\,\text{sen } 45^{\circ} = k\,Q\,\text{sen } 45$$

$$Q = \frac{E_T}{k\,\text{sen } 45^{\circ}} = \frac{2\times 10^5}{9\times 10^9\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 3'1\times 10^{-5}\ \text{C}$$

b. El potencial eléctrico en el punto P, es la suma escalar de los potenciales que generán cada una de las cargas en dicho punto.



$$V_P = V_1 + V_2 = 0$$

Por definición: $V = k\dfrac{Q}{r}$

$$V_P = V_1 + V_2 = k\frac{Q_1}{r_1} + k\frac{Q_2}{r_2}$$

$$0 = k\frac{Q_1}{3} + k\frac{Q_2}{1} \qquad k\frac{Q_1}{3} = -k\frac{Q_2}{1}$$

$$Q_1 = -3Q_2$$

Tienen que ser de distinto signo, y Q_2 de triple valor que Q_1.

Junio 2007. Problema 2B.- Dos partículas con cargas de + 1 μC y de −1 μC están situadas en los puntos del plano XY de coordenadas (−1,0) y (1,0) respectivamente. Sabiendo que las coordenadas están expresadas en metros, calcule:

- **a)** El campo eléctrico en el punto (0,3).
- **b)** El potencial eléctrico en los puntos del eje Y.
- **c)** El campo eléctrico en el punto (3,0).
- **d)** El potencial eléctrico en el punto (3,0).

Dato: Constante de la ley de Coulomb $K = 9\times 10^9\ \text{N m}^2\,\text{C}^{-2}$

Solución.

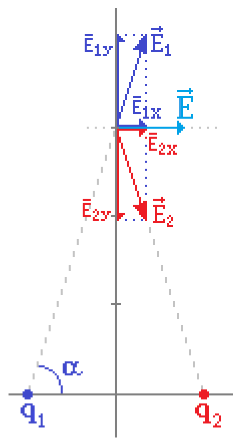
a. Por el principio de superposición: $\vec{E}(0,3) = \vec{E}_1(0,3) + \vec{E}_2(0,3)$

Teniendo en cuenta el signo de las cargas:

$$\vec{E} = \vec{E}_{1x} + \vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2x} + \vec{E}_{2y} = E_1\cos\alpha\,\vec{i} + E_1\text{sen}\alpha\,\vec{j} + E_2\cos\alpha\,\vec{i} - E_2\text{sen}\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{E} = (E_1\cos\alpha + E_2\cos\alpha)\,\vec{i} + (E_1\text{sen }\alpha - E_2\text{sen }\alpha)\,\vec{j}$$

$$r_1 = r_2 = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \qquad \text{sen}\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$



$$E_1 = K\cdot\frac{q_1}{r_1^2} = 9\times 10^9\cdot\frac{1\times 10^{-6}}{\left(\sqrt{10}\right)^2} = 9\times 10^2\ \text{N}/\text{C}$$

$$E_2 = K\cdot\frac{q_2}{r_2^2} = 9\times 10^9\cdot\frac{1\times 10^{-6}}{\left(\sqrt{10}\right)^2} = 9\times 10^2\ \text{N}/\text{C}$$

$$\vec{E}=\left(9\times10^{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}+9\times10^{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\vec{i}+\left(9\times10^{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}-9\times10^{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\vec{j}$$

$$\vec{E}(0,3)=569{,}2\,\vec{i}\ \mathrm{N/C}$$

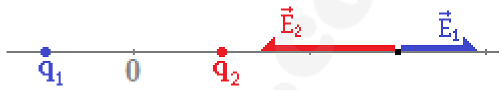
b. El potencial en un punto es la suma escalar de los potenciales que crean cada una de las cargas en ese punto.

$$V(0,y)=\sum V_i=V_1(0,y)+V_2(0,y)=K\cdot\frac{q_1}{r_1}+K\cdot\frac{q_2}{r_2}=9\times10^{9}\cdot\frac{1\times10^{-6}}{r_1}+9\times10^{9}\cdot\frac{-1\times10^{-6}}{r_2}$$

Teniendo en cuenta que en cualquier punto del eje de ordenadas $r_1 = r_2 = r$

$$V(0,y)=\frac{9\times10^{3}}{r}-\frac{9\times10^{3}}{r}=0$$

c. Al igual que en el apartado a, el campo eléctrico en el punto (3, 0) se calcula como suma vectorial de los campos eléctricos que generan cada una de las cargas. Dada la geometría del problema, solo existe campo eléctrico en la componente $\vec{i}$.



$$\vec{E}(3,0)=\vec{E}_1(3,0)+\vec{E}_2(3,0)$$

Teniendo en cuenta el signo de las cargas:

$$\vec{E}(3,0)=K\cdot\frac{q_1}{r_1^2}\vec{i}-K\cdot\frac{q_2}{r_2^2}\vec{j}=9\times10^{9}\cdot\frac{1\times10^{-6}}{4^2}\vec{i}-9\times10^{9}\cdot\frac{1\times10^{-6}}{2^2}\vec{i}=-1687{,}5\,\vec{i}\ \mathrm{N/C}$$

d.
$$V(3,0)=V_1(3,0)+V_2(3,0)=K\cdot\frac{q_1}{r_1}+K\frac{q_2}{r_2}=K\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}\right)$$

$$V(3,0)=9\times10^{9}\cdot\left(\frac{1\times10^{-6}}{4}+\frac{-1\times10^{-6}}{2}\right)=-2250\,\mathrm{V}$$

Modelo 2007. Problema 1B.- Una carga positiva de 2 μC se encuentra situada inmóvil en el origen de coordenadas. Un protón moviéndose por el semieje positivo de las X se dirige hacia el origen de coordenadas. Cuando el protón se encuentra en el punto A, a una distancia del origen de x = 10 m lleva una velocidad de 1000 m/s. Calcule:

- **a)** El campo eléctrico que crea la carga situada en el origen de coordenadas en el punto A.
- **b)** El potencial y la energía potencial del protón en el punto A.
- **c)** La energía cinética del protón en el punto A
- **d)** El cambio de momento lineal experimentado por el protón desde que parte de A y por efecto de la repulsión vuelve al mismo punto A.

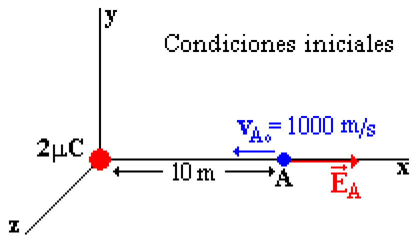
Datos: Constante de la ley de Coulomb $K=9\times10^{9}\ \mathrm{N\,m^2C^{-2}}$

Masa del protón $m_p=1{,}67\times10^{-27}$ kg; Carga del protón $q_p=1{,}6\times10^{-19}$ C

Solución.

a) Campo eléctrico es la región del espacio que se ve afectada por la presencia de una carga eléctrica. Según la Ley de Coulomb:

$$\vec{E}_A=K\cdot\frac{Q}{r_A^2}\vec{i}=9\times10^{9}\,\mathrm{Nm^2C^{-2}}\cdot\frac{2\times10^{-6}\,\mathrm{C}}{10^{2}\,\mathrm{m}^2}=180\ \mathrm{N/C}\ \vec{i}$$



.

b) El potencial en un punto de un campo eléctrico, es el trabajo necesario para desplazar la carga unidad positiva desde ese punto al infinito.

$$V = \frac{1}{q}\int_r^{\infty} \vec{F}\cdot d\vec{r} = K\cdot\frac{Q}{r} = 9\times10^9\ Nm^2C^{-2}\cdot\frac{2\times10^{-6}\ C}{10\ m} = 1800\ V\left(J/C\right)$$

El potencial en un punto se puede expresar en función de la energía potencial en ese punto.

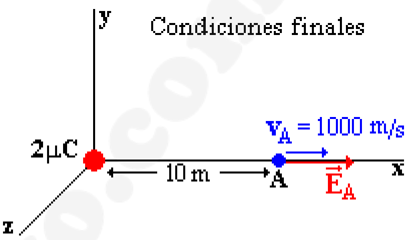
$$V = \frac{E_p}{q} \Rightarrow E_p = V\cdot q_{p^+} = 1800\ J/C\cdot 1'6\times10^{-19}\ C = 2'88\times10^{-16}\ J$$

c) $E_c = \frac{1}{2}m\cdot v^2 = \frac{1}{2}\cdot 1'67\times10^{-27}\ kg\cdot\left(10^3\ m/s\right)^2 = 8'35\times10^{-22}\ J$

d) $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m_{p^+}\vec{v}_A - m_{p^+}\vec{v}_{A_o} = m_{p^+}\left(\vec{v}_A - \vec{v}_{A_o}\right)$

$$\Delta\vec{p} = m_{p^+}\left(\vec{v}_A - \vec{v}_{A_o}\right) = 1'67\times10^{-27}\ kg\cdot\left(1000\ m/s\ \vec{i} - \left(-1000\ m/s\ \vec{i}\right)\right)$$

$$\Delta\vec{p} = 3'34\times10^{-24}\ kg\ m\ s^{-1}$$



Septiembre 2006. Problema 2B.- Dos cargas eléctricas positivas e iguales de valor 3×10^{-6} C están situadas en los puntos A (0,2) y B (0,-2) del plano XY. Otras dos cargas iguales Q están localizadas en los puntos C (4,2) Y D (4,-2). Sabiendo que el campo eléctrico en, el origen de coordenadas es $\vec{E} = 4\times10^3\vec{i}\ N/C$, siendo $\vec{i}$ el vector unitario en el sentido positivo del eje X, y que todas las coordenadas están expresadas en metros, determine:

a) El valor numérico y el signo de las cargas Q.

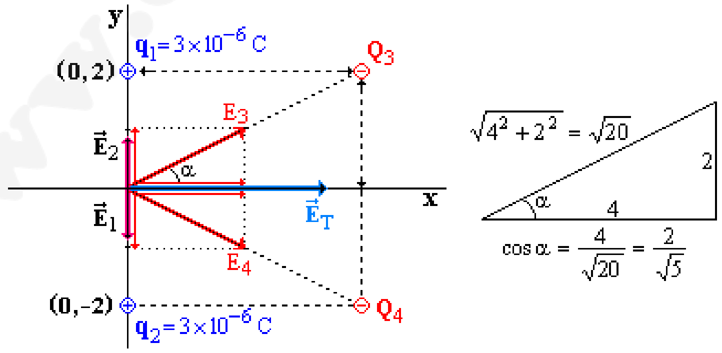
b) El potencial eléctrico en el origen de coordenadas debido a esta configuración de cargas.

Datos: Constante de la ley de Coulomb $K = 9\times10^9\ N\ m^2C^{-2}$

Solución.

a. Por el principio de superposición, el campo eléctrico $\left(\vec{E}\right)$ es la suma vectorial de los campos que generan todas las cargas en ese punto. Los campos eléctricos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ creados por las cargas q_1 y q_2 respectivamente en el origen se anulan por simetría.

Teniendo en cuenta que el $\vec{E}_T$ en el origen tiene dirección y sentido $+\vec{i}$, las cargas Q_3 y Q_4 han de ser iguales en módulo y signo (negativas), para que e esta forma, las componentes $\vec{j}$ de ambos vectores se anulen por simetría y las componentes $\vec{i}$ se sumen, tal y como se observa en la figura.



El campo eléctrico creado por una carga según la ley de Coulomb es:

$$\vec{E} = K\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

Siendo $\vec{u}$ un vector unitario en la dirección que une el punto a la carga que crea el campo.

$$\vec{E}(0,0) = \vec{E}_x(Q_3) + \vec{E}_x(Q_4) = \left\{\begin{matrix} Q_3 = Q_4 = Q \\ r_3 = r_4 = r = \sqrt{20}\end{matrix}\right\} = 2\cdot K\frac{Q}{r^2}\cos\alpha\ \vec{i} = 2\cdot 9\times10^9\frac{Q}{\left(\sqrt{20}\right)^2}\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i}$$

$$\vec{E}(0,0) = 8{,}05\times10^8\,Q\ \vec{i} = 4\times10^3\vec{i} \qquad Q = 4{,}97\times10^{-6}C = 4{,}97\mu C$$

$$Q = -4{,}97\ \mu C$$

b. El potencial en un punto debido a una distribución de cargas es la suma escalar del potencial que genera cada una de las cargas en ese punto.

$$V_T = \sum V_i = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$V_T = K\frac{q_1}{r_1} + K\frac{q_2}{r_2} + K\frac{Q_3}{r_3} + K\frac{Q_4}{r_4} = K\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{Q_3}{r_3} + \frac{Q_4}{r_4}\right)$$

$$V_T = 9\times10^9\cdot\left(\frac{3\times10^{-6}}{2} + \frac{3\times10^{-6}}{2} + \frac{-4{,}97\times10^{-6}}{\sqrt{20}} + \frac{-4{,}97\times10^{-6}}{\sqrt{20}}\right) = 6996\ \text{V}$$

Junio 2006. Cuestión 3.- Una carga puntual de valor Q ocupa la posición (0,0) del plano XY en el vacío. En un punto A del eje X el potencial es V = –120 V y el campo eléctrico es $\vec{E} = -80\,\vec{i}$ N/C siendo $\vec{i}$ el vector unitario en el sentido positivo del eje X. Si las coordenadas están dadas en metros, calcule:

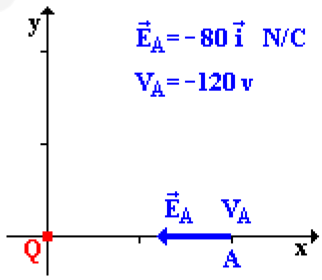
a) La posición del punto A y el valor de Q.

b) El trabajo necesario para llevar un electrón desde el punto B (2,2) hasta el punto A.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón $e = 1{,}6\times10^{-19}\,C$

Constante de la ley de Coulomb en el vacío $K = 9\times10^9\ N\,m^2C^{-2}$

Solución.



a. El campo creado por una carga Q a una distancia d sobre el eje X es $\vec{E} = k\dfrac{q}{d^2}\vec{i}$ y el potencial en ese punto es $V = k\dfrac{Q}{d}$

Por tanto aplicando a cada uno de los datos tenemos:

a. E: $-80\vec{i} = k\dfrac{Q}{d^2}\vec{i} \Rightarrow -80\cdot d^2 = k\cdot Q$

b. V: $-120 = k\dfrac{Q}{d} \Rightarrow -120d = kQ$

Igualando las expresiones:

$$-80d^2 = -120d$$

Simplificado y ordenando se calculan las posibles soluciones

$$d\cdot(80d - 120) = 0 : \begin{cases} d = 0 \\ 8d - 120 = 0 : d = 1'5\ m \end{cases}$$

La solución $d = 0$ no tiene sentido porque en ese caso, $\vec{E} = \infty$ y $V = \infty$, por lo tanto, solo queda la solución $d = 1'5\ m$

Sabiendo que $k = 9\times10^9\ Nm^2/C^2$ y sustituyendo en la ecuación del potencial se despeja la carga.

$$Q = -\frac{120d}{k} = -2\times10^{-8}\,C$$

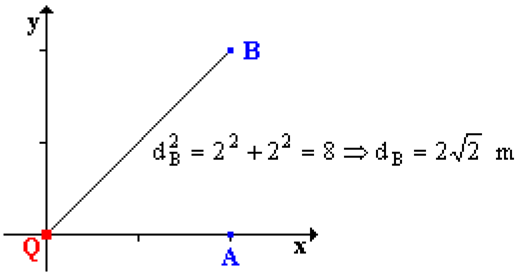
b. El trabajo para llevar una carga q desde B hasta A es igual al producto de la carga q por la diferencia de potencial entre los puntos A y B

$$W = -\Delta E_p = q(V_B - V_A)$$

El potencial en B con la expresión:

$$V_B = k\frac{Q_q}{d_B}$$

Expresión de la que lo único que desconocemos es la distancia al punto B que se calcula por el teorema de Pitágoras



Conocida la distancia B se calcula el potencial.

$$V_B = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{-2\times10^{-8}\,C}{2\sqrt{2}\ m} = -63{,}6V$$

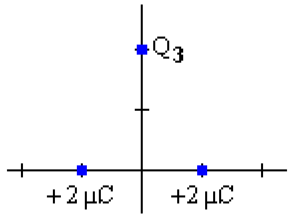
y con el potencial en A y en B y el valor de la carga que se desplaza se calcula el trabajo.

$$W = -1{,}6\times10^{-19}C\cdot\left(-63'6\ v - \left(-120\ v\right)\right) = -9{,}02\times10^{-18}J$$

Junio 2005. Problema 2A.- Tres partículas cargadas Q_1 = +2 μC, Q_2 = +2 μC y Q_3 de valor desconocido están situadas en el plano XY. Las coordenadas de los puntos en los que se encuentran las cargas son Q_1: (1, 0), Q_2: (–1, 0) y Q_3: (0, 2). Si todas las coordenadas están expresadas en metros:

- **a)** ¿Qué valor debe tener la carga Q_3 para que una carga situada en el punto (0,1) no experimente ninguna fuerza neta?
- **b)** En el caso anterior, ¿cuánto vale el potencial eléctrico resu1tante en el punto (0,1) debido a las cargas Q_1, Q_2 y Q_3 ?

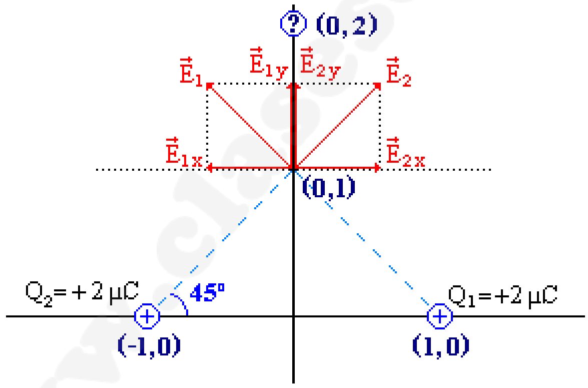
Dato: Constante de la ley de Coulomb K = 9×10⁹ N m² C⁻²



Solución.

a. Para que una carga situada en el punto (0, 1) no experimente fuerza neta, el campo $\overline{E}$ creado por las tres cargas en (0, 1) debe ser nulo.

En el punto (0, 1) el campo creado por las cargas Q_1 y Q_2 es:



$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1(0{,}1) = k\frac{Q_1}{r^2}\left(-\cos 45\,\vec{i} + \text{sen}\,45\,\vec{j}\right) = k\frac{Q_1}{r^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_2(0{,}1) = k\frac{Q_2}{r^2}\left(\cos 45\,\vec{i} + \text{sen}\,45\,\vec{j}\right) = k\frac{Q_2}{r^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

El campo total es la suma vectorial de los campos creados por ambas cargas.

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1(0{,}1) + \vec{E}_2(0{,}1) = k\frac{Q_1}{r^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) + k\frac{Q_2}{r^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) = k\frac{Q_1}{r^2}\sqrt{2}\,\vec{j}$$

$$\vec{E}_{T1.2} = k\frac{Q_1}{r^2}\sqrt{2}\,\vec{j} = 9\times10^9\frac{2\cdot10^{-6}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\sqrt{2}\,\vec{j} = 9\sqrt{2}\times10^3\,\vec{j}\ V/m$$

El campo generado Q_3 2n 2l punto (0, 1) será:

$$\vec{E}_3(0,1) = k\frac{Q_3}{r^2}\hat{r}$$

$\hat{r} \equiv$ Vector unitario en la dirección del campo

$$\left.\begin{array}{r} \hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ \vec{r} = (0,1)-(0,2) = (0,-1) = -\vec{j} \end{array}\right\} : \hat{r} = -\vec{j}$$

$$r = 1\ \text{m}$$

sustituyendo en la expresión del campo

$$\vec{E}_3(0,1) = -k\cdot Q_3\ \vec{j} = -9\times10^9 Q_3\ \vec{j}$$

Para que el campo creado por las tres cardas en (0, 1) sea nulo se debe cumplir:

$$\vec{E}_{T1.2} + \vec{E}_3 = 0$$

$$9\sqrt{2}\times10^3\ \vec{j} + \left(-9\times10^9 Q_3\ \vec{j}\right) = 0$$

expresión de la que se puede despejar la carga Q_3.

$$Q_3 = \sqrt{2}\times10^{-6}\,\text{C} = \sqrt{2}\,\mu\text{C}$$

b. El potencial $\left(V = k\dfrac{q}{r}\right)$ creado por las tres cargas en el punto (0, 1) es la suma de los potenciales creados por cada carga.

$$V_1 = k\frac{Q_1}{r} = 9\times10^9\frac{2\times10^{-6}}{\sqrt{2}} = \frac{18}{\sqrt{2}}\times10^3(\text{v})$$

$$V_2 = k\frac{Q_2}{r} = 9\times10^9\frac{2\times10^{-6}}{\sqrt{2}} = \frac{18}{\sqrt{2}}\times10^3(\text{v})$$

$$V_3 = k\frac{Q_3}{r} = 9\times10^9\frac{\sqrt{2}\times10^{-6}}{1} = 9\sqrt{2}\times10^3(\text{v})$$

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 = \left(\frac{18}{\sqrt{2}} + \frac{18}{\sqrt{2}} + 9\sqrt{2}\right)\times10^3 = \frac{54}{\sqrt{2}}\times10^3(\text{v})$$

Modelo 2005. Cuestión 3.- Dos cargas puntuales de $+6\mu C$ y $-6\mu C$ están situadas en el eje X, en dos puntos A y B distantes entre sí 12 cm. Determine:

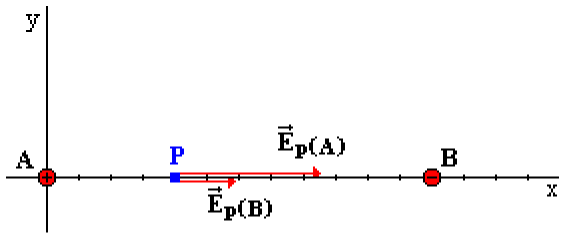
a) El vector campo eléctrico en el punto P de la línea AB, si AP = 4 cm. y PB = 8 cm.

b) El potencial eléctrico en el punto C perteneciente a la mediatriz del segmento AB y distante 8 cm. de dicho segmento.

Datos: Constante de la ley de Coulomb $K = 9\times10^9\ \text{Nm}^2\ \text{C}^{-2}$

Solución.

a. El campo eléctrico en P, es la suma vectorial de los campos que generan cada una de las cargas en dicho punto:



$$\overline{E}_p = \overline{E}_{p(A)} + \overline{E}_{p(B)}$$

$$\overline{E}_{p(A)} = k\cdot\frac{q_A}{r^2}\overline{U}_r = 9\times10^9\cdot\frac{6\times10^{-6}}{(0'04)^2}\ \overline{i}$$

$$\overline{E}_{p(A)} = 3'38\times10^{7}\,(N/c)\ \overline{i}$$

$$\overline{E}_{p(B)} = k\cdot\frac{q_B}{r^2}\,\overline{U}_r$$

sustituyendo por los valores:

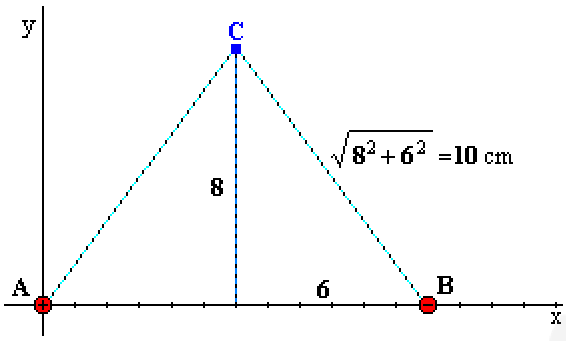
$$\overline{E}_{p(B)} = 9\times10^{9}\cdot\frac{6\times10^{-6}\,C}{(0'08)^2}\ \overline{i} = 0'84\times10^{7}\,(N/C)\ \overline{i}$$

El campo total en P, es la suma vectorial de dos vectores de la misma dirección y sentido:

$$\vec{E}_p = 3'38\times10^7 + 0'84\times10^7 = 4'22\times10^7\left(\frac{N}{C}\right)\vec{i}$$

La dirección de los vectores unitarios $\vec{u}_r$ se deduce suponiendo en el punto P, la unidad de carga positiva.

b. El potencial, a deferencia del campo eléctrico, se trata de una magnitud escalar, por tanto sumamos escalarmente los potenciales producidos por ambas cargas en ese punto C:



$$V_C = V_{C(A)} + V_{C(B)}$$

$$V_{C(A)} = k\cdot\frac{q_A}{r} = \frac{9\cdot10^9\cdot6\cdot10^{-6}}{0'1} = 54\,000\ V$$

Aplicando la misma expresión para la carga B:

$$V_{cB} = k\cdot\frac{q_B}{r} = \frac{9\cdot10^9\cdot\left(-6\cdot10^{-6}\right)}{0'1} = -54\,000\ V$$

Por tanto:

$$V_c = 54000 + (-54000) \Rightarrow V_c = 0$$

El potencial eléctrico en C es nulo.

Septiembre 2004. Problema 2B. Dos cargas eléctricas en reposo de valores $q_1 = 2\mu C$ y $q_2 = -2\mu C$, están situadas en los puntos (0, 2) y (0, –2) respectivamente, estando las distancias en metros.

Determine:

a) El campo eléctrico creado por esta distribución de cargas en el punto A de coordenadas (3 ,0)

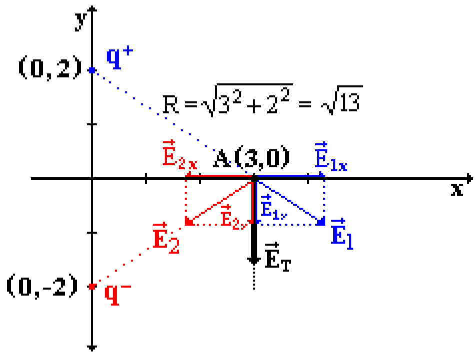
b) El potencial en el citado punto A y el trabajo necesario para llevar una carga de $3\mu C$ desde dicho punto hasta el origen de coordenadas.

Solución.

a. El campo eléctrico creado por una carga puntual q en un punto a distancia R de la carga viene dado por el vector:

$$\vec{E} = K\cdot\frac{q}{R^2}\vec{U}_r$$

en donde K es constante de Culomb y $\overline{U}_r$ es un vector unitario en la dirección de la recta que une la carga q con el punto en el que se quiere calcular el campo, dependiendo el sentido del signo de la carga, repulsivo si es positiva y atractivo si fuese negativo. El campo creado por una distribución de cargas, es la suma vectorial de los campos creados por cada carga.



$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$$

descomponiendo los campos creados por las cargas en sus componentes cartesianas:

$$\begin{cases}\vec{E}_1=E_{1x}\,\vec{i}+E_{1y}\,\vec{j}\\ \vec{E}_2=E_{2x}\,\vec{i}+E_{2y}\,\vec{j}\end{cases}$$

sustituyendo

$$\vec{E}=E_{1x}\,\vec{i}+E_{1y}\,\vec{j}+E_{2x}\,\vec{i}+E_{2y}\,\vec{j}=(E_{1x}+E_{2x})\vec{i}+(E_{1y}+E_{2y})\vec{j}$$

Teniendo en cuenta la geometría de la distribución

$$\begin{cases}E_{2x}=-E_{1x}\\ E_{2y}=E_{1y}\end{cases}$$

la expresión del campo se reduce a:

$$\vec{E}=2\cdot E_{1y}\,\vec{j}=2E_1 \text{sen}\,\alpha\;\vec{j}=2K\frac{q_1}{R^2}\,\vec{j}$$

El sen α se calcula por triángulos rectángulos

$$\text{sen}\,\alpha=\frac{-2}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{-2}{\sqrt{13}}$$

sustituyendo todos los datos en la expresión:

$$\vec{E}=2\cdot 9\times 10^9\,\frac{2\times 10^{-6}}{\sqrt{13}^2}\cdot\frac{-2}{\sqrt{13}}\,\vec{j}=-1536\,\frac{N}{C}$$

b. El potencial eléctrico creado por una carga puntual q en un punto a distancia R de la carga viene dado por:

$$V=K\,\frac{q}{R}$$

en donde K es la constante de Culomb. El potencial eléctrico es una magnitud escalar.

Para un sistema de cargas el potencial eléctrico del sistema se calcula como la suma algebraica de los potenciales creados por cada una de las cargas en el punto.

En nuestro caso, el potencial en el punto A será:

$$V_T=V_1+V_2=K\frac{q_1}{R}+K\frac{q_2}{R}$$

Teniendo en cuenta que $q_2=-q_1$, el potencial en el punto A es nulo

$$V_T=K\frac{q}{R}-K\frac{q}{R}=0\text{ v}$$

El trabajo necesario para llevar la carga desde el punto A al origen de ordenadas viene expresado por:

$$W=-\Delta E_p=-q\cdot\Delta V=-q\cdot(V(0,0)-V(A))$$

El potencial en el origen de ordenadas es:

$$V_T(0,0)=V_1(0,0)+V_2(0,0)=K\frac{q_1}{2}+K\frac{q_2}{2}=\{q_2=-q_1\}=0$$

sustituyendo en el trabajo

$$W = -q \cdot (0 - 0) = 0$$

El trabajo necesario para desplazar una carga entre dos puntos con igual potencial es nulo

Modelo 2004. Cuestión 3.- Se crea un campo eléctrico uniforme de intensidad 6x10^4 N/C entre dos láminas metálicas planas y paralelas que distan entre si 2'5 cm. Calcule:

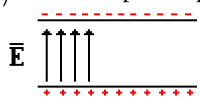
- **a)** La aceleración a la que esta sometido un electrón situado en dicho campo.
- **b)** Si el electrón parte del reposo de la lamina negativa, ¿con que velocidad llegara a la lamina positiva?

Nota: Se desprecia la fuerza gravitatoria.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón $e = 1'6\times10^{-19}$C
Masa del electrón $m = 9'1\times10^{-31}$kg

Solución.

Se crea un campo eléctrico $\left(\vec{E} = 6\times10^4\ \text{N/C}\right)$ entre dos placas paralelas:



a. La aceleración de un electrón situado entre las placas, sí despreciamos la fuerza gravitatoria, será la producida por la única fuerza que actúa sobre el e$^-$ que es la fuerza electromagnética:

$$\bar{F} = q \cdot \bar{E}$$

que será de sentido contrario a la dirección del campo E, ya que la carga es negativa.

Igualamos esta fuerza, a la expresión de la fuerza según la segunda ley de Newton:

$$F = q \cdot E = m \cdot a$$

Despejando la aceleración: $a = \dfrac{q \cdot E}{m}$ y sustituyendo valores numéricos:

$$a = 1'055 \cdot 10^{16}\ m/s^2$$

b. Si parte del reposo desde la lámina negativa, la trayectoria será recta y con MRUA. Aplicando la ecuación de este movimiento:

$$v_f = v_0 + a \cdot t \qquad v_f = 1'055 \cdot t$$

Puesto que se conoce la distancia entre placas $d = 2'5\text{cm}$ y utilizando la ecuación:

$$v_f^2 - v_o^2 = 2 \cdot a \cdot s$$

teniendo en cuenta que la velocidad inicial es nula, se obtiene, sustituyendo los valores numéricos:

$$v_f^2 = 2 \cdot a \cdot s \quad \Rightarrow \quad v_f = \sqrt{2 \cdot 1'055\times10^{16} \cdot 2'5\times10^{-2}} = 2'3\times10^7\ {}^{m}\!/_{s}$$

El vector velocidad: $\bar{v}_f = -2'3\times10^7\ \bar{j}$ (ya que solo existe movimiento en este eje)

Septiembre 2003. Cuestión 1.

- **a)** Defina las superficies equipotenciales en un campo de fuerza conservativo.
- **b)** ¿Cómo son las superficies equipotenciales del campo eléctrico creado por una carga puntual?
- **c)** ¿Qué relación geométrica existe entre las líneas de fuerza de un campo conservativo y las superficies equipotenciales?
- **d)** Indique un ejemplo de campo de fuerzas no conservativo.

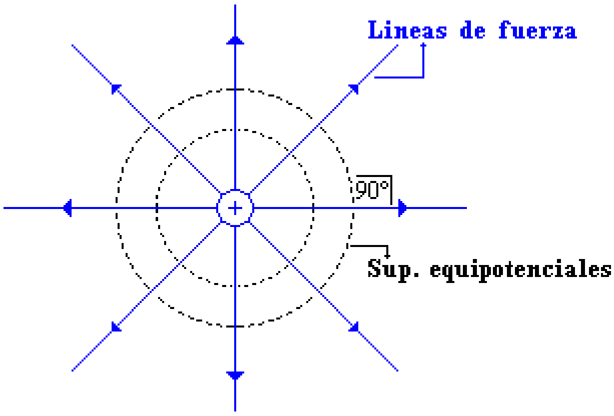
Solución.

a. Son aquellas superficies cuya característica principal es el valor constante del potencial creado por un campo conservativo en cualquier punto de dicha superficie.

b. En el caso del campo eléctrico creado por una carga puntual, el potencial tiene la forma: $V \propto \dfrac{1}{r}$.

Es decir, su valor solo depende del radio r (distancia de la carga al punto del campo), por tanto las superficies equipotenciales son superficies esféricas de radio r, con la carga en el centro de todas ellas.

c. Las líneas de fuerza de un campo conservativo, son las trayectorias que seguiría una partícula (con carga, si es un campo eléctrico), abandonada en un punto del campo conservativo. Dicha línea de fuerza, siguen la dirección del gradiente del potencial, de modo que deben ser perpendiculares a las superficies equipotenciales, ya que esa dirección es la de máxima variación del potencial. Constituye un campo radial, de la forma:



d. Un ejemplo seria el campo gravitatorio terrestre, si tuviéramos en cuenta el rozamiento con el aire, como no despreciable. En este caso, la energía de un cuerpo en este campo, ya no dependería sólo de la posición (campo conservativo), sino de la trayectoria seguida en un movimiento por dicho campo.

Junio 2002. Problema 2B. Se tiene tres cargas situadas en los vértices de un triangulo equilátero cuyas coordenadas (expresadas en cm) son:

$$A(0,2),\ B\left(-\sqrt{3},-1\right),\ C\left(\sqrt{3},-1\right)$$

Sabiendo que las cargas situadas en los puntos B y C son idénticas e iguales a 2μC y que el campo eléctrico en el origen de coordenadas (centro del triángulo) es nulo, determine:

a) El valor y el signo de la carga situada en el punto A.

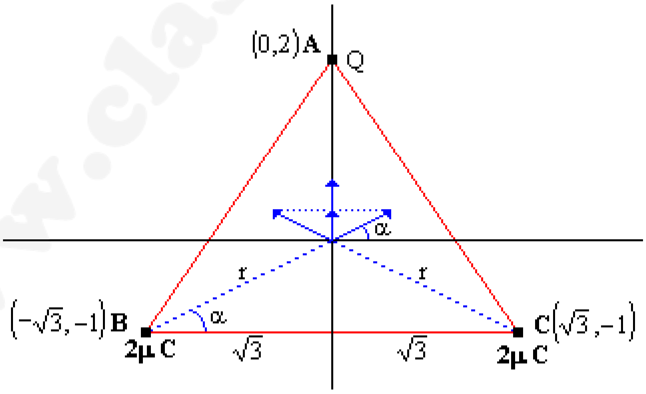
b) El potencial en el origen de coordenadas.

Datos: Constante de la ley de Coulomb $K = 9x10^9 N\ m^2/C^2$

Solución.

a. Para hallar el valor de Q, se tendrá en cuenta que E (0,0)=0. el campo creado en el centro del triángulo por la carga E_A viene expresado por:

$$E_A = k\cdot\frac{\alpha}{2^2}$$



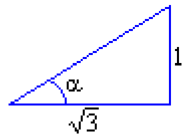
El campo creado en el mismo punto por la carga $B(E_B)$ es:

$$\left|\bar{E}_B\right| = k\cdot\frac{Q}{r^2} = \left\{r = \sqrt{3+1} = 2\right\} = 9\times10^9\cdot\frac{2\times10^{-6}}{2^2} = \frac{9}{2}\cdot10^3\ N/C = \left|\bar{E}_C\right|$$

Si sumamos vectorialmente estos dos campos, solo nos queda componente “y”, ya que las componentes “x” se anulan por simétrica.

La componente “y” es la suma de E_{B_y} y E_{C_y}, que son del mismo modulo, y de valor:

$$E_{B_y} = E_{C_y} = \left|E_B\right|\cdot\text{sen}\alpha$$

Ángulo α 

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\alpha = 30°$

Sumamos las dos componentes "y":

$$\left|E_{B_y}\right| + \left|E_{C_y}\right| = \frac{9}{2}\cdot 10^3 \cdot \operatorname{sen}30° + \frac{9}{2}\cdot 10^3 \operatorname{sen}30° = \frac{9}{2}\cdot 10^3 \ \mathrm{N/c}$$

La carga en el punto A, tiene que generar un campo en (0,0) de modo que el campo resultante sea nulo. Por tanto, el campo producido por la carga A, debe ser:

$$\bar{E}_A = -\frac{9}{2}\cdot 10^3 \ \mathrm{N/C} \ \bar{j}$$

A partir del valor del campo, hallamos la carga:

$$E_A = 4'5\cdot 10^3 = k\cdot\frac{Q}{r^2}$$

$$Q = \frac{4'5\cdot 10^3 \cdot 4}{9\cdot 10^9} \qquad Q = 2\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

el signo tiene que ser positivo. Es decir, una carga igual a la que tenemos en B y C.

b. Se calcula el potencial creado por cada carga en (0,0) y se suma escalarmente.

$$V_i = k\cdot\frac{Q_i}{r} : \left\{\begin{array}{l} V_A = 9\cdot 10^9 \cdot \dfrac{2\cdot 10^{-6}}{2} = 9\cdot 10^3\ \mathrm{V} \\ V_B = 9\cdot 10^9 \cdot \dfrac{2\cdot 10^{-6}}{2} = 9\cdot 10^3\ \mathrm{V} \\ V_c = 9\cdot 10^9 \cdot \dfrac{2\cdot 10^{-6}}{2} = 9\cdot 10^3\ \mathrm{V} \end{array}\right\} : V_T = V_A + V_B + V_C = 9\cdot 10^3\ \mathrm{v} + 9\cdot 10^3\ \mathrm{v} + 9\cdot 10^3\ \mathrm{v} = 27\cdot 10^3\ \mathrm{v}$$

Septiembre 2001. Problema 2B.- Se tienen dos cargas puntuales sobre el eje X, $q_1 = -0'2\ \mu C$ está situada a la derecha del origen y dista de él 1 m; $q_2 = +0,4\ \mu C$ está a la izquierda del origen y dista de él 2 m.

a. ¿En qué puntos del eje X el potencial creado por las cargas es nulo?

b. Si se coloca en el origen una carga $q = +0,4\ \mu C$ determine la fuerza ejercida sobre ella por las cargas q_1 y q_2.

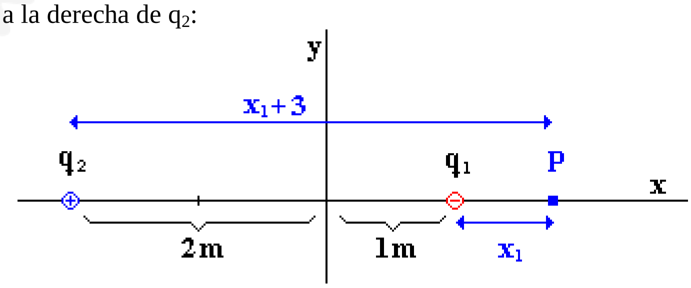
Datos: Constante de la ley de Coulomb en el vacio $K = 9\times 10^9\ \mathrm{N\ m^2 C^{-2}}$

Solución.

a. Para que el potencial en un punto del eje x se anule tiene que ocurrir que:

$$V_{1(p)} + V_{2(p)} = 0$$

Situando el punto P a la derecha de q_2:



$$V_1 = k\cdot\frac{q_1}{x_1} \qquad V_2 = k\frac{q_2}{3 + x_1}$$

sustituyendo en la condición de potencial nulo

$$k\cdot\frac{q_1}{x_1}+k\cdot\frac{q_2}{3+x_1}=0 \qquad k\cdot\frac{-0'2\times10^{-6}\,C}{x_1}=-k\cdot\frac{0'4\times10^{-6}\,C}{3+x_1}=0$$

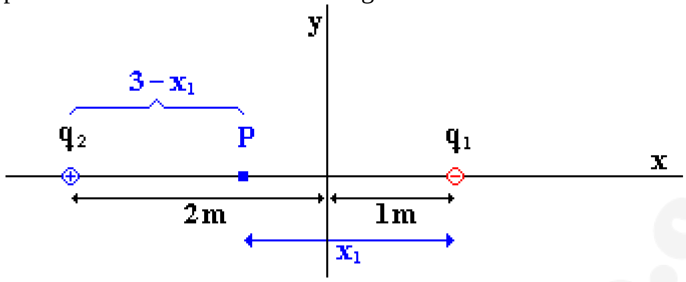
Operando y simplificando la expresión anterior:

$$(3+x_1)\cdot\left(0'2\cdot10^{-6}\right)=x_1\cdot\left(0'4\cdot10^{-6}\right)$$

resolviendo la ecuación de 1º grado

$$x_1 = 3\ m$$

Si suponemos que el punto P se encuentra entre las cargas:



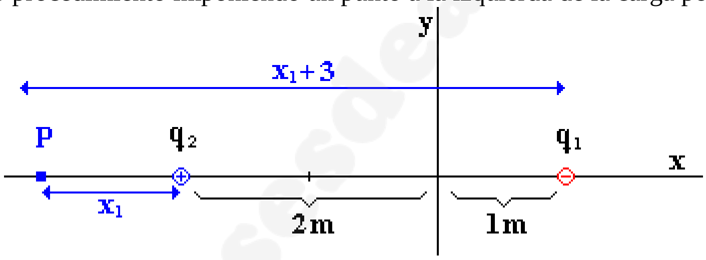
$$k\cdot\frac{-0'2\times10^{-6}}{x_1}=-k\cdot\frac{0'4\times10^{-6}}{3-x_1}=0$$

resolviendo

$$x = 1\ m$$

coincide con el origen de coordenadas, P (0, 0)

Repetimos el mismo procedimiento imponiendo un punto a la izquierda de la carga positiva:



$$k\cdot\frac{0'4\times10^{-6}\,C}{x_1}=-k\cdot\frac{-0'2\times10^{-6}\,C}{3+x_1}$$

resolviendo la ecuación

$$x_1 = -6\ m$$

No valido ya que x_1 es una distancia y no puede ser negativa. No hay ningún punto a la izquierda de la q_2 donde $V_T = 0$.

b. Si colocamos una carga q = +0'4μc en (0, 0) calcular la fuerza sobre ella.

Calculamos el campo total $\vec{E}$ en el origen de coordenadas:

$$E_1 = k\cdot\frac{q}{r^2} \qquad E_1 = k\cdot\frac{0'2\times10^{-6}}{1^2} \qquad \left|\vec{E}_1\right| = 9\times10^9\cdot0'2\times10^{-6} \qquad \left|\vec{E}_1\right| = 1'8\cdot10^3\ N/C$$

La dirección y sentido es $+\vec{i}$ (suponemos colocada en el origen una unidad de carga positiva)

$$\vec{E}_1 = 1800\ N/C\ \ \vec{i}$$

Calculamos el campo creado por la carga 2:

$$E_2 = k\cdot\frac{q}{r^2} \qquad E_2 = \frac{9\times10^9\cdot0'4\times10^{-6}}{2^2} \qquad E_2 = 0'9\times10^3 \qquad \vec{E}_2 = 900\ N/C\ \ \vec{i}$$

Puesto que ambos vectores tienen la misma dirección y sentido numeramos sus módulos:

$$\bar{E}_T = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = 2700\ {}^{N}\!/_{C}\ \bar{i}$$

La fuerza sobre la $q = +0'4 \times 10^{-6}\ c$:

$$\bar{F} = q \cdot \bar{E} \qquad \bar{F} = 0'4 \times 10^{-6} \cdot 2700\ \ \bar{i}$$

$$\bar{F} = 1{,}1 \times 10^{-3}\ N\ \ \bar{i}$$

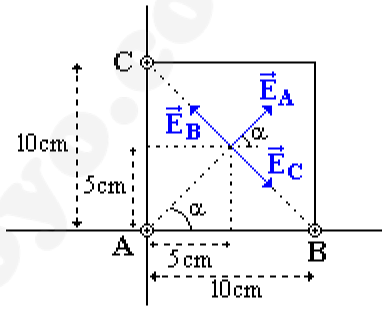
Junio 2001. Problema 2B. Tres cargas positivas e iguales de valor q = 2 ηC cada una se encuentran situadas en tres de los vértices de un cuadrado de lado 10 cm.
Determine:

- **a)** El campo eléctrico en el centro del cuadrado, efectuando un esquema gráfico en su explicación.
- **b)** Los potenciales en los puntos medios de los lados del cuadrado que unen las cargas y el trabajo realizado al desplazarse la unidad de carga entre dichos puntos.

Datos: Constante de la ley de Coulomb en el vacío $K = 9 \times 10^9\ Nm^2C^2$

Solución.

a. Como se observa en la figura, el campo resultante en el centro del cuadrado es el generado por la carga A $(\bar{E}_A)$ ya que por simetría los campos generados por las carga B y C se anulan entre si.



La distancia de cualquier vértice al centro del cuadrado se calcula por teorema de Pitágoras

$$r = \sqrt{0'05^2 + 0'05^2} = 0'05\sqrt{2}\ \ m$$

Los módulos de los campos creados por B y por C son iguales ya que están creados por la misma carga y están a igual distancia del centro.

$$\left|\bar{E}_B\right| = k \cdot \frac{Q}{r^2} = 9 \times 10^9 \cdot \frac{2 \times 10^{-6}}{\left(0'05 \cdot \sqrt{2}\right)^2} = 3'6 \times 10^6\ \frac{N}{C} = \left|\bar{E}_C\right|$$

Los vectores de campo generados por las cargas B y C $\left(\bar{E}_B\ ,\ \bar{E}_C\right)$ tienen igual módulo, dirección y sentido contrario, por lo que se anulan.

El campo resultante es por tanto el generado por la carga A.

Módulo:

$$\left|\bar{E}_A\right| = k \cdot \frac{Q}{r^2} = 9 \times 10^9 \cdot \frac{2 \times 10^{-6}}{\left(0'05 \cdot \sqrt{2}\right)^2} = 3'6 \times 10^6\ \frac{N}{C}$$

El ángulo que forma el con la horizontal es:

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{0'05}{0'05} \qquad \mathrm{tg}\ \alpha = 1 \qquad \alpha = 45^{\circ}$$

Proyecciones del vector campo sobre los ejes coordenados:

$$E_{A_x} = \left|\bar{E}_A\right| \cdot \cos\alpha \qquad E_{A_y} = \left|\bar{E}_A\right| \mathrm{sen}\alpha$$

el campo resultante es:

$$\bar{E}_T(0'05, 0'05) = 1'8\sqrt{2} \times 10^6\ \bar{i} + 1'8\sqrt{2} \times 10^6\ \bar{j}$$

b. El potencial en los puntos medios:

$$V_{CA} = k \cdot \frac{Q}{r} + k\frac{Q}{r} = 2k\frac{Q}{r} = 7'2 \times 10^5\ V$$

$$V_{AB} = k \cdot \frac{Q}{r} + k\frac{Q}{r} = 2k\frac{Q}{r} = 7'2 \times 10^5\ V$$

los potenciales son los mismos yq que están creados por la mismas carga y a igual distancia. Por tanto :

$$W = q \cdot \left(V_i - V_f\right) = 0$$

ya que ambos puntos tienen el mismo potencial

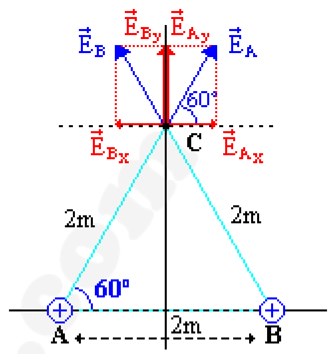
Septiembre 2000. Problema 2A.- Los puntos A, B y C son los vértices de un triángulo equilátero de 2 m de lado. Dos cargas iguales positivas de 2 mC están en A y B.

a) ¿Cuál es el campo eléctrico en el punto C?
b) ¿Cuál es el potencial en el punto C?
c) ¿Cuánto trabajo se necesita para llevar una carga positiva de 5 mC desde el infinito hasta el punto C si se mantienen fijas las otras cargas?
d) Responder al apartado anterior c) si la carga situada en B se sustituye por una carga de –2 mC.

Datos: Permitividad del vacío $\varepsilon_o = 8{,}85\times10^{-12}\ N^{-1}m^{-2}C^2$

Solución.

a. Se calcula el módulo del campo creado por cada carga en C, y se suman vectorialmente:



$$\left|\vec{E}_{A_C}\right| = k\cdot\frac{q_A}{R^2} = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_o}\cdot\frac{q_A}{R^2} = \frac{1}{4\pi\cdot 8'85\times10^{-12}}\cdot\frac{2\times10^{-6}}{2^2} = 4'5\times10\ N/C$$

$$\left|\vec{E}_{B_C}\right| = k\cdot\frac{q_A}{R^2} = \frac{1}{4\pi\cdot\varepsilon_o}\cdot\frac{q_A}{R^2} = \frac{1}{4\pi\cdot 8'85\times10^{-12}}\cdot\frac{2\times10^{-6}}{2^2} = 4'5\times10\ N/C$$

Por simétrica, y puesto que los módulos de ambos campos son iguales, las componentes x se anulan, quedando únicamente las componente y:

$$\left|\vec{E}_{A_y}\right| = \left|\vec{E}_{A_C}\right|\cdot \text{sen } 60° = \left|\vec{E}_{B_y}\right|$$

$$\vec{E}_{T_c} = 2\left|\vec{E}_{A_C}\right|\cdot \text{sen } 60°\ \vec{j} \qquad \vec{E}_{T_c} = 9\times10^3\ \vec{j}\ N/C$$

b. Se calcula el potencial creado por cada carga en C y se suman escalarmente

$$V_T = k\cdot\frac{q_A}{R} + k\cdot\frac{q_B}{R} = 2k\cdot\frac{q_A}{R} = 2\frac{1}{4\pi\cdot 8'85\times10^{-12}}\cdot\frac{2\times10^{-6}}{2} = 1'8\times10^4\ J/C\,(v)$$

c. El W para llevar una carga desde el infinito hasta el punto C se calcula como:

$$W = q(V_\infty - V_C)$$

Sí $q = 5\times10^{-6}$, $V_\infty = 0$, $V_C = 1'8\times10^4$, sustituyendo en la ecuación anterior

$$W = 5\times10^{-6}\cdot\left(0 - 1'8\times10^4\right) = -9\times10^{-2}\ J$$

Trabajo que se realiza contra el campo.

d. Si la carga en B fuera $q_B = -2\cdot10^{-6}\,C$, el potencial en C será:

$$V_c = k\frac{q_A}{2} + k\frac{q_B}{2} = \frac{1}{4\pi\cdot 8'85\times10^{-12}}\cdot\frac{2\cdot10^{-6}\,c}{2} + \cdot\frac{1}{4\pi\cdot 8'85\times10^{-12}}\frac{\left(-2\cdot10^{-6}\right)}{2} = 0$$

Por tanto, el W necesario para traer del infinito la carga en este caso, será nulo:

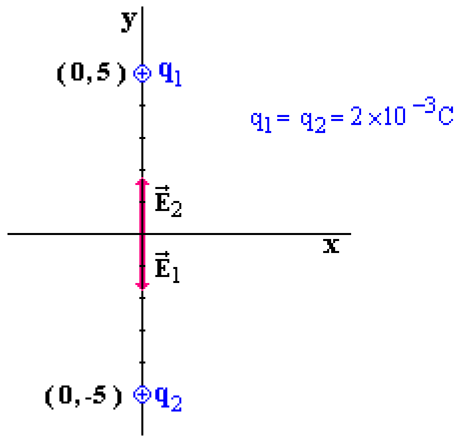
$$W = q\cdot(V_\infty - V_c) \qquad W = 0$$

Junio 2000. Cuestión 3. Dos cargas puntuales e iguales de valor 2 mC cada una, se encuentran situadas en el plano XY en los puntos (0, 5) y (0, –5), respectivamente, estando las distancias expresadas en metros.

a) ¿En qué punto del plano el campo eléctrico es nulo?
b) ¿Cuál es el trabajo necesario para llevar una carga unidad desde el punto (l, 0) al punto (–1, 0)?

Solución.

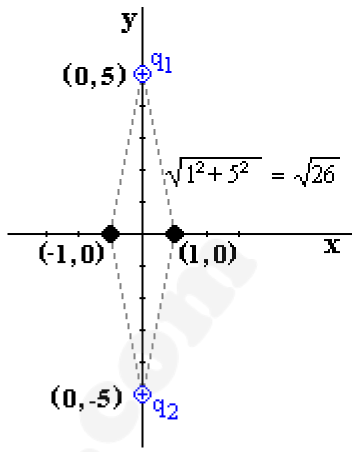
a. El campo es función de la carga que lo genera y de la distancia entre la carga que lo genera y el punto donde se calcula. Entre dos cargas iguales, el campo es nulo en el punto medio del segmento que une ambas cargas. El campo $\bar{E}$ es nulo en el origen, ya que $\bar{E}_1$ y $\bar{E}_2$ son dos vectores en la misma dirección y sentidos contrarios, y de módulos iguales, de valor:



$$\left|\bar{E}_1\right| = \left|\bar{E}_2\right| = k\cdot\frac{q}{r^2} = \frac{9\cdot10^9\cdot 2\cdot10^{-3}\,c}{25}$$

$$\left|\bar{E}_1\right| = \left|\bar{E}_2\right| = 720000\ N/C \qquad \vec{E}_{T(0,0)} = 0$$

b. $W = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_B - V_A) = q \cdot (V_A - V_B)$



Hay que calcular el potencial $\left(V = K \cdot \frac{q}{r}\right)$ en los puntos (1,0) y (-1,0)

$$V_{(1,0)} = k \cdot \frac{q_1}{\sqrt{26}} + k \cdot \frac{q_2}{\sqrt{26}} = \{q_1 = q_2 = q\} = 2k \cdot \frac{q}{\sqrt{26}}$$

$$V_{(1,0)} = 2 \cdot 9 \times 10^9 \, \frac{2 \times 10^{-3}}{\sqrt{26}} = \frac{36 \cdot 10^6}{\sqrt{26}} \, J/C$$

repitiendo el cálculo para el punto (–1, 0)

$$V_{(-1,0)} = k \cdot \frac{q_1}{\sqrt{26}} + k \cdot \frac{q_2}{\sqrt{26}} = 2 \cdot k \cdot \frac{q}{\sqrt{26}} = \frac{36 \cdot 10^6}{\sqrt{26}} \, J/C$$

para la unidad de carga(q =1): $W = V_A - V_B \quad \{V_A = V_B\} \quad W = 0$

Lo que implica que se puede mover la carga q del punto (1, 0) al punto (–1, 0) sin realizar ningún tipo de trabajo, ya que ambos puntos tienen el mismo potencial.