Modelo 2014. Pregunta 1B.- Los satélites Meteosat son satélites geoestacionarios, situados sobre el ecuador terrestre y con un periodo orbital de 1 día.

a) Suponiendo que la órbita que describen es circular y poseen una masa de 500 kg, determine el módulo del momento angular de los satélites respecto del centro de la Tierra y la altura a la que se encuentran estos satélites respecto de la superficie terrestre.

b) Determine la energía mecánica de los satélites.

Datos: Radio Terrestre = $6{,}37\times10^{6}$ m ; Masa de la Tierra= $5{,}97\times10^{24}$ kg;
Constante de Gravitación Universal G = $6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

Solución.

a. El momento angular de un satélite que orbita en torno a un planeta es

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v}$$

Donde $\vec{r}$ representa el radiovector que une al satélite con el centro del planeta y $\vec{v}$ la velocidad lineal del satélite en la órbita. El módulo del momento angular es:

$$\left|\vec{L}\right| = L = |\vec{r}|\cdot|m\vec{v}|\cdot \operatorname{sen}\alpha = r\cdot m\cdot v\cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Teniendo en cuenta que la velocidad es tangente a la trayectoria, y que el satélite describe una α = 90 y sen α = 1.

$$L = r\cdot m\cdot v = \{v = \omega\cdot r\} = r^2\cdot m\cdot\omega = \left\{\omega = \frac{2\pi}{T}\right\} = r^2\cdot m\cdot\frac{2\pi}{T}$$

$$L = \frac{2\pi\cdot m\cdot r^2}{T}$$

Para determinar el radio de la órbita se tiene en cuenta que el satélite describe un movimiento circular uniforma, y por tanto, todas las fuerzas que actúan sobre el deberán ser igual a la fuerza centrípeta.

$$F_G = F_c \qquad G\frac{M\cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad G\frac{M}{r} = v^2 \qquad G\frac{M}{r} = (\omega\cdot r)^2$$

$$r^3 = \frac{G\cdot M}{\omega^2} \qquad r^3 = \frac{G\cdot M}{\left(2\pi/T\right)^2} \qquad r^3 = \frac{G\cdot M}{4\pi^2}\cdot T^2$$

Si el satélite es geoestacionario, el periodo es un día.

$$r = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M}{4\pi^2}\cdot T^2} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot 5{,}98\times10^{24}}{4\pi^2}\cdot(24\cdot 3600)^2} = 42{,}25\times10^{6}\,\mathrm{m}$$

Conocido el radio de la órbita se calcula el módulo del momento angular.

$$L = \frac{2\pi\cdot m\cdot r^2}{T} = \frac{2\pi\cdot 500\cdot\left(42{,}25\times10^{6}\right)^2}{24\cdot 3600} = 64{,}9\times10^{12}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$$

La altura del satélite respecto de la superficie de la tierra será la distancia del satélite al centro de la tierra menos el radio de la tierra.

$$h = r - R_T = 42{,}25\times10^{6} - 6{,}37\times10^{6} = 35.88\times10^{6}\,\mathrm{m}$$

b.

$$E_M = E_p + E_c = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}m\cdot G\frac{M}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$$

$$E_M = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2}6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\times10^{24}\cdot 500}{42{,}25\times10^{6}} = -2{,}36\times10^{9}\,\mathrm{J}$$

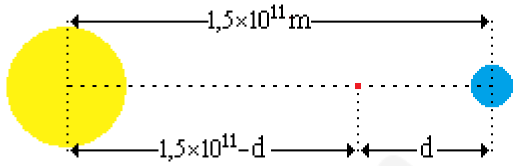
Modelo 2014. Pregunta 1A.- La masa del Sol es 333183 veces mayor que la de la Tierra y la distancia que separa sus centros es de $1,5\times10^{8}$ Km. Determine si existe algún punto a lo largo de la línea que los une en el que se anule:

a) El potencial gravitatorio. En caso afirmativo, calcule su distancia a la Tierra.

b) El campo gravitatorio. En caso afirmativo, calcule su distancia a la Tierra.

Solución.

a. El potencial gravitatorio en un punto debido a una masa M vine determinado por la expresión:



$$V(r) = -G\cdot\frac{M}{r}$$

Se busca un punto en la línea que une los centros del Sol y la Tierra donde el potencial debido al Sol y la tierra sea nulo. Si el punto buscado se encuentra a una distancia d de la Tierra y $1,5\times10^{11}$ – d del Sol, se deberá cumplir:

$$V = V_S + V_T = 0 \qquad V = -G\cdot\frac{M_S}{1,5\times10^{11}-d} + \left(-G\cdot\frac{M_T}{d}\right) = 0$$

$$-G\cdot\frac{333183\,M_T}{1,5\times10^{11}-d} - G\cdot\frac{M_T}{d} = 0 \qquad -G\cdot\frac{333183\,M_T}{1,5\times10^{11}-d} = G\cdot\frac{M_T}{d}$$

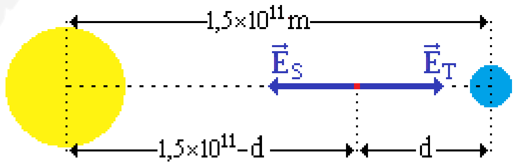
$$-\frac{333183}{1,5\times10^{11}-d} = \frac{1}{d} \qquad d = -450204 < 0$$

No hay ningún punto en la línea que une los centros del Sol y de la Tierra donde el potencial se anule

b. Según la Ley de Gravitación Universal, el campo determinado por una masa en un punto viene expresado por la siguiente función:

$$\vec{E}(r) = -G\cdot\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

Se busca un punto en la línea que une los centros del Sol y la Tierra donde el campo gravitatorio debido al Sol y la tierra sea nulo. Si el punto buscado se encuentra a una distancia d de la Tierra y $1,5\times10^{11}$ – d del Sol, se deberá cumplir:



$$\vec{E}(r) = 0 = -G\frac{M_S}{\left(1,5\times10^{11}-d\right)^2}(-\vec{u}_r) + \left(-G\frac{M_T}{d^2}\vec{u}_r\right)$$

$$G\frac{M_S}{\left(1,5\times10^{11}-d\right)^2}\vec{u}_r = G\frac{M_T}{d^2}\vec{u}_r \qquad \frac{333183\,M_T}{\left(1,5\times10^{11}-d\right)^2} = \frac{M_T}{d^2}$$

$$\frac{\left(1,5\times10^{11}-d\right)^2}{d^2} = 333183 \qquad \frac{1,5\times10^{11}-d}{d} = \pm\sqrt{333183}$$

$$*\,d = \frac{1,5\times10^{11}}{1+\sqrt{333183}} = 2,594\times10^{8}\,\text{m del centro de la Tierra}$$

Distancia al centro del sol = $1,5\times10^{11} - 2,594\times10^{8} = 1,197\times10^{11}$ m

**El signo negativo de la raíz no se tiene en cuenta ya que daría una distancia negativa*

Septiembre 2013. Pregunta 1B.- Dos planetas, A y B, tienen la misma densidad. El planeta A tiene un radio de 3500 km y el planeta B un radio de 3000 km. Calcule:

a) La relación que existe entre las aceleraciones de la gravedad en la superficie de cada planeta.

b) La relación entre las velocidades de escape en cada planeta.

Solución.

a. La expresión de la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta se obtiene del hecho de que en la superficie de un planeta, el peso de un cuerpo es la fuerza gravitacional con la que atrae el planeta al cuerpo.

$$P = F_G \qquad m \cdot g = G\frac{M \cdot m}{R^2} \qquad g = G\frac{M}{R^2}$$

Si se aplica esta expresión a cada uno de los planetas y se compara:

$$\left.\begin{array}{l} g_A = G\dfrac{M_A}{R_A^2} \\ g_B = G\dfrac{M_B}{R_B^2} \end{array}\right\} : \frac{g_A}{g_B} = \frac{G\dfrac{M_A}{R_A^2}}{G\dfrac{M_B}{R_B^2}} \quad \text{simplificando y ordenando} \quad \frac{g_A}{g_B} = \frac{M_A \cdot R_B^2}{M_B \cdot R_A^2}$$

Para encontrar una la relación entre las masas de ambos planeta, se parte de la igualdad de las densidades.

$$d_A = d_B : \left\{\begin{array}{l} d_A = \dfrac{M_A}{V_A} = \dfrac{M_A}{4/3\pi R_A^3} \\ d_B = \dfrac{M_B}{V_B} = \dfrac{M_B}{4/3\pi R_B^3} \end{array}\right\} : \frac{M_A}{4/3\pi R_A^3} = \frac{M_B}{4/3\pi R_B^3} \Rightarrow \frac{M_A}{M_B} = \frac{R_A^3}{R_B^3}$$

Teniendo en cuenta ambas relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{g_A}{g_B} = \dfrac{M_A \cdot R_B^2}{M_B \cdot R_A^2} \\ \dfrac{M_A}{M_B} = \dfrac{R_A^3}{R_B^3} \end{array}\right\} : \frac{g_A}{g_B} = \frac{R_A^3}{R_B^3} \cdot \frac{R_B^2}{R_A^2} \quad \text{simplificando} \quad \frac{g_A}{g_B} = \frac{R_A}{R_B} = \frac{3500}{3000} = \frac{7}{6} \qquad g_A = \frac{7}{6} g_B$$

b. Se denomina velocidad de escape de un planeta a la mínima velocidad de lanzamiento de un cohete para que pueda escapar de la atracción gravitatoria del planeta. Teniendo en cuenta que el cohete se mueve sometido a una fuerza conservativa, la energía mecánica se conserva, y suponiendo que el cuerpo llega al infinito con velocidad nula, se ha de cumplir:

$$E_M(\text{Superficie}) = E_M(\text{Infinito}) = 0$$

$$E_c(\text{Superficie}) + E_p(\text{Superficie}) = 0 \qquad \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = 0 \qquad v = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$$

Si aplicamos la expresión de la velocidad de escape a los dos planetas y se compara:

$$\left.\begin{array}{l} v_A = \sqrt{2G\dfrac{M_A}{R_A}} \\ v_B = \sqrt{2G\dfrac{M_B}{R_B}} \end{array}\right\} : \frac{v_A}{v_B} = \frac{\sqrt{2G\dfrac{M_A}{R_A}}}{\sqrt{2G\dfrac{M_B}{R_B}}} = \sqrt{\frac{2G\dfrac{M_A}{R_A}}{2G\dfrac{M_B}{R_B}}} = \sqrt{\frac{M_A \cdot R_B}{M_B \cdot R_A}}$$

Teniendo en cuenta la relación entre las masas de los planetas obtenida en el apartado a:

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{R_A^3}{R_B^3} \quad \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{M_A}{M_B} \cdot \frac{R_B}{R_A}} = \sqrt{\frac{R_A^3}{R_B^3} \cdot \frac{R_B}{R_A}} = \sqrt{\frac{R_A^2}{R_B^2}} = \frac{R_A}{R_B} = \frac{7}{6} \qquad v_A = \frac{7}{6} v_B$$

Septiembre 2013. Pregunta 1A.- Dos satélites describen órbitas circulares alrededor de un planeta cuyo radio es de 3000 km. El primero de ellos orbita a 1000 km de la superficie del planeta y su periodo orbital es de 2 h. La órbita del segundo tiene un radio 500 km mayor que la del primero. Calcule:

a) El módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.

b) El periodo orbital del segundo satélite.

Solución.

a. $R_P = 3000\,\text{Km}: \begin{cases} R_{s_1} = 4000\,\text{Km} & T_1 = 2\,\text{h} \\ R_{s_1} = 4500\,\text{Km} & T_2 = ? \end{cases}$

En la superficie del planeta, se cumple: $P = F_G \quad mg = G\dfrac{M \cdot m}{R_P^2} \quad g = G\dfrac{M}{R_P^2}$

El Producto $G \cdot M$, se puede obtener teniendo en cuenta que en los satélites que están orbitando en torno al planeta se cumple que $F_G = F_c$. Si aplicamos al primero de ellos, del que conocemos radio y periodo:

$$G\frac{Mm}{R_{s_1}^2} = m\frac{v^2}{R_{s_1}} \quad v^2 = G\frac{M}{R_{s_1}} \qquad v = \omega_1 \cdot R_{s_1} \qquad \omega^2 \cdot R_{s_1}^2 = G\frac{M}{R_{s_1}}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \qquad \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 \cdot R_{s_1}^2 = G\frac{M}{R_{s_1}} \qquad G \cdot M = \frac{4\pi^2 R_{s_1}^3}{T_1^2}$$

Sustituyendo en la expresión de g:

$$g = G\frac{M}{R_P^2} = \frac{4\pi^2 \cdot R_{s_1}^3}{R_P^2 \cdot T_1^2} = \frac{4\pi^2 \cdot \left(4\times10^6\right)^3}{\left(3\times10^6\right)^2 \cdot (2 \cdot 3600)^2} = 5{,}42\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}$$

b. Partiendo de: $G \cdot M = \dfrac{4\pi^2 R^3}{T^2}$, se llega rápidamente a $\dfrac{R^3}{T^2} = \dfrac{G \cdot M}{4\pi^2} = \text{cte}$, que es la tercera Ley de Kepler, aplicando a los dos satélites:

$$\frac{R_{s_1}^3}{T_1^2} = \frac{R_{s_2}^3}{T_2^2} \qquad T_2 = T_1 \cdot \sqrt{\frac{R_{s_2}^3}{R_{s_1}^3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{4500^3}{4000^3}} = 2{,}39\,\text{h} \approx 2\,\text{h}\ 23'$$

Junio 2013. Pregunta 3A. Calcule:

a) La densidad media del planeta Mercurio, sabiendo que posee un radio de 2440 km y una intensidad de campo gravitatorio en su superficie de 3,7 N kg^{-1}.

b) La energía necesaria para enviar una nave espacial de 5000 kg de masa desde la superficie del planeta a una órbita en la que el valor de la intensidad de campo gravitatorio sea la cuarta parte de su valor en la superficie.

Dato: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}77\times10^{-11}$ M n^{-2} kg^{-2}

Solución.

a. $d = \dfrac{m}{V} = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ Donde M es la masa del Mercurio y R su radio, supuesto esférico.

La intensidad de campo gravitatorio, se puede deducir teniendo en cuenta que el peso de un cuerpo es la superficie del planeta es la fuerza con la que atrae el planeta al cuerpo, que en módulo es:

$$P = F_G \qquad mg = G\frac{Mm}{R^2} \qquad g = G\frac{M}{R^2}$$

Mediante operaciones equivalentes, se transforma el segundo miembro en la densidad.

$$\frac{g}{G \cdot \frac{4}{3}\pi R} = \frac{G\frac{M}{R^2}}{G \cdot \frac{4}{3}\pi R} \qquad \frac{3g}{4\pi RG} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = d \qquad d = \frac{3g}{4\pi RG} = \frac{3 \cdot 3{,}7}{4\pi \cdot 2440\times10^3 \cdot 6{,}67\times10^{-11}}$$

$$d = 5427\,\text{kg m}^{-3}$$

b. Teniendo en cuenta que el campo gravitatorio es conservativo, la energía necesaria para poner una nave espacial en órbita será la diferencia de energía mecánica de la nave en la órbita y en la superficie de Mercurio.

$$E_M(\text{órbita}) = E_P + E_c = -G\frac{Mm}{R_1} + \frac{1}{2}mv_1^2$$

Donde R_1 representa el radio de la órbita y v_1 la velocidad de la nave el la órbita. Para calcular R_1 se tiene en cuenta el dato de que la intensidad de campo gravitatorio en la órbita(g_1) el la cuarta parte que en la superficie(g).

$$g_1 = \frac{1}{4}g : \left\{ \begin{matrix} g_1 = G\dfrac{M}{R_1^2} \\ g = G\dfrac{M}{R^2} \end{matrix} \right\} : G\frac{M}{R_1^2} = \frac{1}{4}G\frac{M}{R^2}$$

Simplificando: $R_1 = 2R$

La velocidad de la nave en la órbita se obtiene teniendo en cuenta que la nave describe un movimiento circular uniforme, y por tanto la suma de todas las fuerzas que actúan sobre ella debe ser igual a la fuerza centrípeta que la hace girar.

$$F_G = F_c \qquad G\frac{Mm}{R_1^2} = m\frac{v_1^2}{R_1} \qquad v_1^2 = G\frac{M}{R_1}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía:

$$E_M(\text{órbita}) = E_P + E_c = -G\frac{Mm}{R_1} + \frac{1}{2}mG\frac{M}{R_1} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R_1}$$

La energía mecánica en la superficie es:

$$E_M(\text{superficie}) = E_P = -G\frac{Mm}{R}$$

La energía necesaria para poner la nave en órbita es:

$$\Delta E = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R_1} - \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = \{R_1 = 2R\} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{2R} + G\frac{Mm}{R} = -\frac{1}{4}G\frac{Mm}{R} + G\frac{Mm}{R} = \frac{3}{4}G\frac{Mm}{R}$$

La masa de Mercurio se puede expresar en función de la intensidad de campo gravitatorio en su superficie.

$$g = G\frac{M}{R^2} \qquad GM = gR^2$$

$$\Delta E = \frac{3}{4}G\frac{Mm}{R} = \frac{3}{4}gR^2\frac{m}{R} = \frac{3}{4}gRm = \frac{3}{4}\cdot 3{,}7\cdot 2440\times10^3\cdot 5000 = 3{,}3855\times10^{10}\text{ J}$$

Junio 2013. Pregunta 5B.- Urano es un planeta que describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) El módulo del momento angular, respecto a la posición del Sol, en el afelio es mayor que en el perihelio y lo mismo ocurre con el módulo del momento lineal.

b) La energía mecánica es menor en el afelio que en el perihelio y lo mismo ocurre con la energía potencial.

Solución.

a. De las dos afirmaciones que se proponen, la primera es falsa, el módulo del momento angular del de Urano respecto del sol permanece constante debido a que esta sometido a fuerzas centrales.

$$L = m\cdot v\cdot r = \text{cte}$$

La segunda afirmación también es falsa, teniendo en cuenta la constancia del momento angular

$$L = \text{cte} = m\cdot v_p\cdot r_p = m\cdot v_a\cdot r_a$$

$$v_p\cdot r_p = v_a\cdot r_a$$

Teniendo en cuenta que el radio del perihelio es menor que el del afelio, la velocidad en el perihelio es mayor que en el afelio, por lo tanto el momento lineal de Urano en el perihelio será mayor que en el afelio

$$\left.\begin{array}{l} p_p = m \cdot v_p \\ p_a = m \cdot v_a \end{array}\right\} : v_p > v_a \Rightarrow p_p > p_a$$

b. La primera afirmación es falsa, debido a que Urano en su órbita alrededor del Sol solo está sometido a fuerzas centrales, por lo tanto su energía mecánica es constante.

La segunda afirmación también es falsa, debido al carácter negativo de la energía potencial.

$$r_P < r_A$$
$$E_p(P) = -G\frac{Mm}{r_P} < E_p(A) = -G\frac{Mm}{r_A}$$

Modelo 2013. Pregunta 1A.- Un cierto planeta esférico tiene una masa M = $1{,}25\times10^{23}$ kg y un radio R = $1{,}5\times10^{6}$ m. Desde su superficie se lanza verticalmente hacia arriba un objeto, el cual alcanza una altura máxima h = R/2. Despreciando rozamientos, determine:

a) La velocidad con que fue lanzado el objeto.
b) La aceleración de la gravedad en el punto más alto alcanzado por el objeto.

Datos: Constante de la Gravitación Universal, G = $6{,}67\times10^{-11}$ N m2 kg^{-2}

Solución.

a. El campo gravitatorio, si se desprecian los rozamientos, se puede considerar conservativo, lo cual permite resolver el apartado considerando que la energía mecánica del objeto se conserva.
"Energía mecánica en la superficie = Energía mecánica a una altura de R/2 de la superficie"

$$E_p(\text{Superficie}) + E_c(\text{Superficie}) = E_p(h = R/2)$$
$$-G\frac{M\cdot m}{R} + \frac{1}{2}m\cdot v^2 = -G\frac{M\cdot m}{R+h}$$

Simplificando las masas se despeja v.

$$-G\frac{M}{R} + \frac{1}{2}v^2 = -G\frac{M}{R+h} \qquad \frac{1}{2}v^2 = G\frac{M}{R} - G\frac{M}{R+h} = GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$
$$v = \sqrt{2G\cdot M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)} \overset{h=R/2}{=} \sqrt{2G\cdot M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+R/2}\right)} = \sqrt{2G\cdot M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{3R/2}\right)}$$
$$v = \sqrt{\frac{2G\cdot M}{R}\left(1 - \frac{2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{2G\cdot M}{R}\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2G\cdot M}{3R}}$$
$$v = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\times10^{-11}\cdot 1{,}25\times10^{23}}{3\cdot 1{,}5\times10^{6}}} = 1925\ m/s$$

b. El peso de un objeto es la fuera con la que el planeta atrae al objeto.

$$P = F_G \qquad mg = G\frac{Mm}{(R+h)^2} \qquad g = G\frac{M}{(R+R/2)^2} = G\frac{M}{(3R/2)^2}$$
$$g = G\frac{M}{(3R/2)^2} = 6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{1{,}25\cdot10^{23}}{\left(3\cdot1{,}5\times10^{6}/2\right)^2} = 1{,}65\ m/s^2$$

Modelo 2013. Pregunta 1B.- Una nave espacial de 800 kg de masa describe una órbita circular de 6000 km de radio alrededor de un planeta. Sabiendo que la energía mecánica de la nave es $E_M = -3{,}27\times10^8$ J, determine:

a) La masa del planeta.

b) La velocidad angular de la nave en su órbita.

Datos: Constante de la Gravitación Universal, $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

Solución.

a. La energía mecánica de un satélite que describe una órbita circular en torno a un planeta es la suma de su energía cinética y de su energía potencial.

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R}$$

Teniendo en cuenta que si el satélite describe una órbita con movimiento circular uniforma la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él debe igual a la fuerza centrípeta:

$$F_G = F_c \qquad G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \qquad v^2 = G\frac{M}{R}$$

Sustituyendo la expresión de v^2 en la energía mecánica:

$$E_M = \frac{1}{2}mG\frac{M}{R} - G\frac{Mm}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R}$$

De la expresión de la energía mecánica se puede despejar la masa del planeta.

$$M = \frac{-2E_M\cdot R}{Gm} = \frac{-2\left(-3{,}27\times10^8\right)\cdot 6000\times10^3}{6{,}67\times10^{-11}\cdot 800} = 7{,}35\times10^{22}\,\text{kg}$$

b. El apartado se puede resolver de dos formas diferentes, partiendo de la energía mecánica del satélite o mediante la masa del planeta calculada en el apartado a.

Partiendo de la energía mecánica:

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right)$$

Teniendo en cuenta que $E_M = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R} \Rightarrow -G\frac{Mm}{R} = 2E_m$, sustituyendo:

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + 2E_M \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = -E_M$$

Teniendo en cuenta: $v = \omega\cdot R$

$$\frac{1}{2}m(\omega\cdot R)^2 = -E_M \qquad \omega = \sqrt{\frac{-2E_M}{m\cdot R^2}} = \sqrt{\frac{-2\cdot\left(-3{,}27\cdot10^8\right)}{800\cdot\left(6\times10^6\right)^2}} = 1{,}28\times10^{-4}\,\text{rad/s}$$

Conocida la masa del planeta y el radio de la órbita, se puede calcular la velocidad angular, pariendo de la expresión de la velocidad en la órbita.

$$\left.\begin{array}{l} v^2 = G\dfrac{M}{R} \\ v = \omega\cdot R \end{array}\right\} : (\omega\cdot R)^2 = G\frac{M}{R} \qquad \omega^2 = G\frac{M}{R^3} \qquad \omega = \sqrt{G\frac{M}{R^3}}$$

$$\omega = \sqrt{6{,}67\times10^{-11}\frac{7{,}35\times10^{22}}{\left(6\times10^6\right)^3}} = 1{,}5\times10^{-4}\,\text{rad/s}$$

La diferencia en el resultado se debe a la mayor impresión en el calculo de la masa del planeta. Los dos métodos son válidos, pero es mejor no utilizar datos obtenidos en el desarrollo del problema.

Junio 2012. Pregunta 1A.- Un satélite de masa m gira alrededor de la Tierra describiendo una órbita circular a una altura de $2 \cdot 10^4$ km sobre su superficie.

a) Calcule la velocidad orbital del satélite alrededor de la Tierra.

b) Suponga que la velocidad del satélite se anula repentina e instantáneamente y éste empieza a caer sobre la Tierra, calcule la velocidad con la que llegaría el satélite a la superficie de la misma. Considere despreciable el rozamiento del aire.

Datos: Constante de la Gravitación Universal, $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$, Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$, Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37 \times 10^6\ m$

Solución.

a. Para que un satélite gire en torno a un planeta en una órbita circular, la suma de todas las fuerzas que actúen sobre el tiene que ser igual a la fuerza centrípeta.

$$\vec{F}_G = \vec{F}_c \quad \text{En módulo} \quad F_G = G\frac{M_T m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} = F_c$$

Simplificando la igualdad y sustituyendo por los datos del enunciado se obtiene la velocidad orbital.

$$G\frac{M}{R_T + h} = v^2 \qquad v = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T + h}} = \sqrt{6{,}67 \times 10^{-11}\frac{5{,}98 \times 10^{24}}{6{,}37 \times 10^6 + 20 \times 10^6}} = 3889\ m/s$$

b. Suponiendo que no hay pérdida de energía por rozamiento, la energía mecánica se conserva.

$$\Delta E_m = 0 \quad E_m(\text{órbita}) - E_m(\text{superficie}) = 0 \quad E_m(\text{órbita}) = E_m(\text{superficie})$$

$$E_p(\text{órbita}) + \underbrace{E_c(\text{órbita})}_{0} = E_p(\text{superficie}) + E_c(\text{superficie})$$

$$-G\frac{M_T m}{R_T + h} = -G\frac{M_T m}{R_T} + \frac{1}{2}mv^2 \qquad \frac{1}{2}v^2 = G\frac{M_T}{R_T} - G\frac{M_T}{R_T + h} \qquad v^2 = 2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

Despejando y sustituyendo por los datos se obtiene la velocidad en la superficie

$$v = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)} = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}98 \times 10^{24}\left(\frac{1}{6{,}37 \times 10^6} - \frac{1}{6{,}37 \times 10^6 + 20 \times 10^6}\right)} = 9746\ m/s$$

Junio 2012. Pregunta 1B.- Una nave espacial de 3000 kg de masa describe, en ausencia de rozamiento, una órbita circular en tomo a la Tierra a una distancia de $2{,}5 \times 10^4$ km de su superficie. Calcule:

a) El período de revolución de la nave espacial alrededor de la Tierra.

b) Las energías cinética y potencial de la nave en dicha órbita.

Datos: Constante de la Gravitación Universal, $G = 6.67 \times 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$. Masa de la Tierra, $M_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg, Radio de la Tierra. $R_T = 6.37 \times 10^6$ m

Solución.

a. Para que una nave espacial gire en torno a un planeta en una órbita circular, la suma de todas las fuerzas que actúen sobre el tiene que ser igual a la fuerza centrípeta.

$$\vec{F}_G = \vec{F}_c \quad \text{En módulo} \quad \begin{cases} F_G = G\dfrac{M_T m}{R^2} \\ F_c = m\dfrac{v^2}{R} \end{cases} \qquad G\frac{M_T m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \qquad v^2 = G\frac{M_T}{R_{Orb}}$$

$$\begin{cases} v^2 = G\dfrac{M_T}{R_{Orb}} \\ v = \omega\, R_{Orb} \end{cases} \qquad (\omega\, R_{Orb})^2 = G\frac{M_T}{R_{Orb}} \qquad \omega^2 = G\frac{M_T}{R^3_{Orb}}$$

$$\begin{cases} \omega^2 = G\dfrac{M_T}{R_{Orb}^3} \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{cases} \qquad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G\frac{M_T}{R_{Orb}^3} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{R_{Orb}^3}{G\,M_T}}$$

$$R_{Orb} = R_T + h = 6{,}37\times10^6 + 25\times10^6 = 31{,}37\times10^6\,\text{m}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(31{,}37\times10^6\right)^3}{6{,}67\times10^{-11}\cdot 5{,}98\times10^{24}}} = 55\,276\,\text{s} <> 15\text{h } 21' 16''$$

b. Energía potencial $E_p = -G\dfrac{M_T m}{R_{Orb}} = -6{,}67\times10^{-11}\dfrac{5{,}98\times10^{24}\cdot 3000}{31{,}37\times10^6} = -3{,}81\times10^{10}\,\text{J}$

Energía cinética $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \left(v^2 = G\dfrac{M_T}{R_{Orb}}\right) = \dfrac{1}{2}G\dfrac{M_T m}{R_{Orb}} = -\dfrac{1}{2}E_p = -\dfrac{1}{2}\left(-3{,}81\times10^{10}\right) = 1{,}91\times10^{10}\,\text{J}$

Modelo 2012. Pregunta 1A.- Se ha descubierto un planeta esférico de 4100 km de radio y con una aceleración de la gravedad en su superficie de 7,2 m s^{-2}.

- **a)** Calcule la masa del planeta.
- **b)** Calcule la energía mínima necesaria que hay que comunicar a un objeto de 3 kg de masa para lanzarlo desde la superficie del planeta y situarlo a 1000 km de altura de la superficie, en una órbita circular en torno al mismo.

Dato: *Constante de Gravitación G* = 6,67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}.

Solución.

a. La masa de un planeta se puede calcular conocida su gravedad y su radio teniendo en cuenta que en su superficie, el peso de un cuerpo es la fuerza con la que el planeta lo atrae.

$$P = F_G$$

$$mg = G\frac{M\cdot m}{R^2}\ ;\ g = G\frac{M}{R^2}\ ;\ M = \frac{g\cdot R^2}{G}$$

$$M = \frac{7{,}2\,\text{m s}^{-2}\cdot\left(4{,}1\times10^6\right)^2}{6{,}67\times10^{-11}} = 1{,}81\times10^{24}\,\text{kg}$$

b. La energía necesaria para lanzar un satélite desde la superficie de un planeta y situarlo en órbita, es la diferencia entre la energía mecánica que tiene en la órbita y la que tiene en la superficie del planeta.

$$\Delta E = E(\text{Órbita}) - E(\text{Superficie})$$

La energía mecánica de un satélite en órbita es la suma de su energía cinética y su energía potencial.

$$E_m(\text{Órbita}) = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right)$$

Donde R es el radio de la órbita

Para calcular la velocidad del satélite en la órbita, se iguala la fuerza centrípeta con la gravitatoria

$$\left|\bar{F}_g\right| = \left|\bar{F}_c\right|$$

$$G\cdot\frac{M\cdot m}{R^2} = m\cdot\frac{v^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = G\cdot\frac{M}{R}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía:

$$E_m(\text{Órbita}) = \frac{1}{2} m \cdot G\frac{M}{R} + \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = \frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{R} - G\frac{M \cdot m}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{R}$$

En la superficie del planeta, la energía mecánica es únicamente potencial.

$$E_m(\text{Superficie}) = E_p = -G\frac{M \cdot m}{R_P}$$

Donde R_P es el radio del planeta.

Sustituyendo en la primera expresión se obtiene la energía necesaria para lanzar un satélite desde la superficie del planeta.

$$\Delta E = E(\text{Órbita}) - E(\text{Superficie}) = -\frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{R} - \left(-G\frac{M \cdot m}{R_P}\right) = -G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R_P}\right)$$

$$\Delta E = -6{,}67\times10^{-11} \cdot 1{,}81\times10^{24} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 5{,}1\times10^{6}} - \frac{1}{4{,}1\times10^{6}}\right) = 5{,}28\times10^{7}\ \text{J}$$

Modelo 2012. Pregunta 1B.- Un satélite artificial está situado en una órbita circular en torno a la Tierra a una altura de su superficie de 2500 km. Si el satélite tiene una masa de 1100 kg:

a) Calcule la energía cinética del satélite y su energía mecánica total.
b) Calcule el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.

Datos: *Constante de Gravitación* $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}*; Radio de la Tierra* = 6370 km.*;*
Masa de la Tierra = $5{,}98\times10^{24}$ kg.

Solución.

a. Por definición:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Para calcular la velocidad del satélite en su órbita, se tiene en cuente que para que el satélite orbite entorno a la Tierra, la suma de todas las fuerzas que áctuan sobre él deben ser igual a la fuerza centrípeta a la que se ve sometido el satélite.

$$F_G = F_c$$

$$G\frac{M_T m}{R_{Orb}^2} = m\frac{v^2}{R_{Orb}} \quad ; \quad v^2 = G\frac{M_T}{R_{Orb}}$$

La energía cinética del satélite en la órbita queda:

$$E_c = \frac{1}{2}mG\frac{M_T}{R_{Orb}} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R_{Orb}} = \frac{1}{2}6{,}67\times10^{-11} \cdot \frac{5{,}98\times10^{24} \cdot 2500}{(6370 + 2500)\times10^{3}} = 2{,}47\times10^{10}\ \text{J}$$

La energía mecánica del satélite es la suma de la energía cinética y la energía potencial.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R_{Orb}} + \left(-G\frac{M_T m}{R_{Orb}}\right) = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R_{Orb}} = -2{,}47\times10^{10}\ \text{J}$$

b. Por definición:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

En módulo:

$$L = r \cdot mv\,\text{sen}\,\alpha$$

Siendo α el ángulo que forma el radio y la velocidad, que sor ser una órbita circular es de 90º, teniendo en cuenta que la velocidad es tangencial a la trayectoria.

$$L = r \cdot mv\,\text{sen}\,90^\circ = r \cdot mv$$

Teniendo en cuenta que $v^2 = G\dfrac{M_T}{R_{Orb}}$

$$v=\sqrt{G\frac{M_T}{R_{Orb}}}=\sqrt{6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\times10^{24}}{8870\times10^{3}}}=6705{,}8\,{}^{m}\!/\!_{s}$$

Sustituyendo en la expresión del módulo:

$$L=r\cdot mv=8870\times10^{3}\text{ m}\cdot1100\text{ kg}\cdot6705{,}8\,{}^{m}\!/\!_{s}=6{,}54\times10^{13}\text{ kg m}^2\text{ s}^{-1}$$

Septiembre 2011. Cuestión 1A.-

a) Exprese la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta en función de la masa del planeta, de su radio y de la constante de gravitación universal G.

b) Si la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre vale 9,8 m·s^{-2}, calcule la aceleración de la gravedad a una altura sobre la superficie terrestre igual al radio de la Tierra.

Solución.

a. El peso de un cuerpo es la fuerza con la que la Tierra lo atrae. Trabajando en módulo

$$P=F_g\ ;\ mg_o=G\frac{M_Tm}{R_T^2}\ ;\ g_o=G\frac{M_T}{R_T^2}$$

$g_o\equiv$ aceleración de la gravedad en la superficie terrestre.

b. La aceleración de la gravedad a una altura igual al radio de la Tierra es:

$$g=G\frac{M_T}{R^2}\ ;\ R=2R_T\ ;\ g=G\frac{M_T}{(2R_T)^2}=G\frac{M_T}{4R_T^2}=\frac{1}{4}G\frac{M_T}{R_T^2}=\frac{1}{4}g_o=\frac{1}{4}9{,}8=2{,}46\text{ m s}^{-2}$$

Septiembre 2011. Problema 1B.- Una sonda espacial de masa m = 1000 kg se encuentra situada en una órbita circular alrededor de la Tierra de radio r = 2,26×R$_T$, siendo R$_T$ el radio de la Tierra.

a) Calcule la velocidad de la sonda en esa órbita.

b) ¿Cuánto vale su energía potencial?

c) ¿Cuánto vale su energía mecánica?

d) ¿Qué energía hay que comunicar ala sonda para alejada desde dicha órbita hasta el infinito?

Datos: Masa de la Tierra M_T = 5,98×10^{24} kg.
Radio de la Tierra R_T =6,37×10^{6} m.
Constante de Gravitación Universal G = 6,67×l0^{-11} N m^2 kg^{-2}.

Solución.

a. Para que una masa realice una órbita circular en torno a la tierra, se debe cumplir:

$$\sum\vec{F}=\vec{F}_c$$

Trabajando en módulo y teniendo en cuenta que la única fuerza que actúa sobre la sonda es la fuera gravitacional:

$$F_g=F_c\ ;\ G\frac{M_Tm}{R^2}=m\frac{v^2}{R}\ ;\ v=\sqrt{G\frac{M_T}{R}}$$

$$v=\sqrt{6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\times10^{24}}{2{,}26\cdot6{,}37\times10^{6}}}\approx5264\,{}^{m}\!/\!_{s}$$

b. $$E_p=-G\frac{M_tm}{R}=-6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\times10^{24}\cdot1000}{2{,}26\cdot6{,}37\times10^{6}}=-2{,}77\times10^{10}\text{ J}$$

c. $$E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R}=\frac{1}{2}m\left(\sqrt{G\frac{M}{R}}\right)^2-G\frac{Mm}{R}=-G\frac{Mm}{2R}=\frac{1}{2}E_p$$

$$E_m=\frac{1}{2}\left(-2{,}77\times10^{10}\right)=-1{,}385\times10^{10}\text{ J}$$

d. $\Delta E=E_m(\text{inf})-E_m(\text{órbita})$. Teniendo en cuenta que la energía mecánica en el infinito es nula:

$$\Delta E=0-\left(-1{,}385\times10^{10}\right)=1{,}385\times10^{10}\text{ J}$$

Junio 2011. Cuestión 1.- Un satélite que gira con la velocidad angular de la tierra (geoestacionario) de masa m = 5×10^3 kg, describe una órbita circular de radio r = $3{,}6\times10^7$ m. Determine:

a) La velocidad areolar del satélite.

b) Suponiendo que el satélite describe una órbita en el plano ecuatorial de la tierra, determine el módulo, la dirección y el sentido del momento angular respecto de los polos de la Tierra.

Dato: Periodo de rotación terrestre= 24 h

Solución.

ACLARACIONES PREVIAS: En el enunciado del problema no coincide el dato del radio de la orbita del satélite con su condición de geoestacionario (R(Geoestacionario) = $4{,}23\times10^7$ m). A un radio de $3{,}6\times10^7$ m le corresponde un periodo de 18 horas 53 minutos aproximadamente. Tampoco aparece entre los datos del enunciado el radio de la tierra, imprescindible para calcular la distancia del satélite al Polo.

En nuestra opinión, el alumno debe usar el dato del radio terrestre que dan en el problema 1b, y no cuestionar la viabilidad de los datos del enunciado, utilizándolos sin ningún problema.

a. Velocidad areolar ≡ área barrida por el radiovector en la unidad de tiempo.

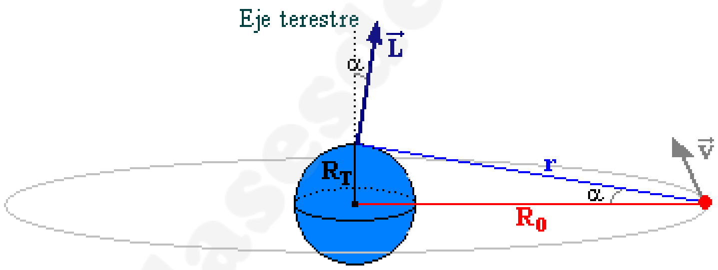
$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

Para una órbita circular, será el área barrida en un ciclo completo dividida por el período:

$$V_a = \frac{A}{T} = \frac{\pi \cdot R^2{}_{ORB}}{T} = \frac{\pi \cdot \left(3{,}6 \cdot 10^7\right)^2}{24 \cdot 3600} = 4{,}71 \cdot 10^{10}\ m^2/s$$

b. Momento angular respecto de los Polos:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v} \qquad \begin{cases} r \equiv \text{distancia del satélite al Polo} \\ v \equiv \text{velocidad lineal} \end{cases}$$



Teniendo en cuenta que $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, el módulo del momento angular es:

$$L = r \cdot m \cdot v$$

El valor de r se obtiene del triángulo rectángulo que forman el radio de la Tierra (R_T), el radio de la órbita (R_O) y el radiovector (r).

$$r^2 = R_T{}^2 + R_O{}^2 \Rightarrow r = \sqrt{\left(6{,}37 \cdot 10^2\right)^2 + \left(3{,}6 \cdot 10^7\right)^2} = 3{,}65 \cdot 10^7\,m$$

La velocidad del satélite se calcula a partir del periodo orbital y el radio de la órbita.

$$v = w \cdot R_O = \frac{2\pi}{T} R_O = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \cdot 3{,}6 \cdot 10^7 = 2620\,m/s$$

Sustituyendo en la expresión se obtiene el modulo del momento angular

$$L = 3{,}65 \cdot 10^7 \cdot 5000 \cdot 2620 = 4{,}78 \cdot 10^{14}\,kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$$

La dirección será perpendicular al plano determinan $\vec{r}$ y $\vec{v}$, siendo α el ángulo que formará la dirección de $\vec{L}$ con el eje de la Tierra.

$$tg\alpha = \frac{R_T}{R_O} \Rightarrow \alpha = arctg\frac{6{,}37 \cdot 10^6}{3{,}6 \cdot 10^7} = 10^0$$

El sentido lo marca la regla del sacacorchos.

Junio 2011. Problema 1B.- Sabiendo que el periodo de revolución lunar es de 27,32 días y que el radio de su órbita es $R_L = 3{,}84\times10^8$ m, calcule:

- **a)** La constante de gravitación universal, G (obtener un valor a partir de los datos del problema).
- **b)** La fuerza que la luna ejerce sobre la tierra y la de la tierra sobre la Luna.
- **c)** El trabajo necesario para llevar un objeto de 5000 kg desde la Tierra hasta la luna. (Despreciar los radios de la tierra de la Tierra y de la Luna, en comparación con su distancia)
- **d)** Si un satélite se sitúa entre la tierra y la Luna a una distancia de la tierra de $R_L/4$, ¿Cuál es la relación de fuerzas debidas a la Tierra y a la Luna?

Datos: Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg; masa de la Luna $M_L = 7{,}35\times10^{22}$ kg: Radio de la tierra $6{,}37\times10^6$ m; radio de la Luna $1{,}74\times10^6$ m.

Solución.

a. Para que la Luna orbité alrededor de la Tierra, se debe cumplir:

$$F_G = F_C$$

$$G\frac{M_T\cdot m_L}{r^2}=\frac{m_L v^2}{r}\ ;\ G\frac{M_T}{r^2}=\frac{(\omega\cdot r)^2}{r}\ ;\ G\frac{M_T}{r^2}=\omega^2 r\ ;\ G=\frac{\omega^2 r^3}{M_T}\ ;\ G=\frac{4\pi^2 r^3}{T^2 M_T}$$

$$G=\frac{4\pi^2\left(3{,}84\cdot10^8\right)^3}{(27{,}32\cdot24\cdot3600)^2\cdot5{,}98\times10^{24}}=6{,}71\times10^{-11}\,N\,m^2kg^{-2}$$

b. Las dos fuerzas son de igual módulo dirección y sentidos opuestos, son parejas de fuerza de acción-reacción.

$$F=G\frac{M_T\cdot m_L}{d^2}=6{,}71\times10^{-11}\frac{5{,}98\times10^{24}\cdot7{,}35\times10^{22}}{\left(3{,}84\times10^8\right)^2}=2\times10^{20}\,N$$

c. Por tratarse de fuerzas conservativas:

$$W=-\Delta E_P=-\left(E_P(L)-E_P(T)\right)$$

Para calcular la energía potencial en la superficie de la Luna y en la superficie de la tierra habrá que sumar los potenciales que genera cada masa en esos puntos.

$$E_P(L)=-G\frac{M_L\cdot m}{R_L}+\left(-G\frac{M_T\cdot m}{d_{T-L}}\right)=-Gm\left(\frac{M_L}{R_L}+\frac{M_T}{d_{T-L}}\right)=$$

$$=-6{,}71\times10^{-11}\cdot5000\cdot\left(\frac{7{,}35\times10^{22}}{1{,}74\times10^6}+\frac{5{,}98\times10^{24}}{3{,}84\times10^8}\right)=-1{,}93\times10^{10}\,J$$

$$E_P(T)=-G\frac{M_T\cdot m}{R_T}+\left(-G\frac{M_L\cdot m}{d_{T-L}}\right)=-Gm\left(\frac{M_T}{R_T}+\frac{M_L}{d_{T-L}}\right)=$$

$$=-6{,}71\times10^{-11}\cdot5000\cdot\left(\frac{5{,}98\times10^{24}}{6{,}37\times10^6}+\frac{7{,}35\times10^{22}}{3{,}84\times10^8}\right)=-3{,}15\times10^{11}\,J$$

$$W=-\Delta E_P=-\left(-1{,}93\times10^{10}-\left(-3{,}15\times10^{11}\right)\right)=-2{,}96\times10^{11}\,J$$

El signo negativo indica que para llevar el objeto de la superficie terrestre a la superficie lunar habrá que realizar un trabajo de $2{,}96\times10^{11}$ J.

d. Se pide comparar (dividir) la fuerza que ejerce la Tierra sobre el satélite con la que ejerce la Luna.

$$\frac{F_T}{F_L}=\frac{G\dfrac{M_T m}{d_1^2}}{G\dfrac{M_L m}{d_2^2}}=\frac{M_T\cdot d_2^2}{M_L\cdot d_1^2}$$

d_1 = distancia del satélite a la Tierra $=\dfrac{R_L}{4}$

$d_2 \equiv$ distancia del satélite a la Luna = $= \dfrac{3R_L}{4}$

$$\frac{F_T}{F_L} = \frac{M_T \cdot \left(\frac{3R_L}{4}\right)^2}{M_L \cdot \left(\frac{R_L}{4}\right)^2} = 3^2 \frac{M_T}{M_L} = 9 \cdot \frac{5{,}98\times 10^{24}}{7{,}35\times 10^{22}} \approx 732$$

La fuerza de atracción que ejerce la tierra sobre el satélite es 732 veces mayor que la que ejerce la luna sobre él.

Modelo 2011. Problema 1A. Un planeta orbita alrededor de una estrella de masa M. La masa del planeta es 10^{24} *Kg* y su órbita es circular de radio $r = 10^8 Km$ y periodo 3 años terrestres. Determinar:
Datos: Constante de Gravitación Universal $6{,}67 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$

a) La masa de la estrella.
b) La energía mecánica del planeta.
c) El módulo del momento angular del planeta respecto al centro de la estrella.
d) La velocidad angular de un segundo planeta que describiese una órbita circular de radio igual a 2 r alrededor de la estrella.

Solución.

a. Para que un planeta realice una órbita circular en torno a una estrella, se debe cumplir:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_c$$

Trabajando en módulo y teniendo en cuenta que la única fuerza que actúa sobre la sonda es la fuera gravitacional:

$$F_g = F_c \ ; \ G\frac{M_{Estrella} m_{Planeta}}{r^2} = m_{Planeta}\frac{v^2}{r} \ ; \ v^2 = G\frac{M_{Estrella}}{r}$$

Teniendo en cuenta que $v = \dfrac{2\pi r}{T}$

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = G\frac{M_{Estrella}}{r} \qquad M_{Estrella} = \frac{4\pi^2 r^3_{órbita}}{T^2 G}$$

$$M_{Estrella} = \frac{4\pi^2 \cdot \left(10^{11}\right)^3}{(3\cdot 365\cdot 24\cdot 3600)^2 \cdot 6{,}67\times 10^{-11}} = 6{,}61\times 10^{28}\,kg$$

b. $$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{G\frac{M}{r}}\right)^2 - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{2r}$$

$$E_m = -6{,}67\times 10^{-11}\cdot\frac{6{,}61\times 10^{28}\cdot 10^{24}}{2\cdot 10^{11}} = -2{,}2\times 10^{31}\,J$$

c. $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v}$ $\qquad L = r\cdot mv\cdot \text{sen}\,\alpha$

Por tratarse de una órbita circular, $\vec{r} \perp \vec{v} \Rightarrow \alpha = 90^o$, sen 90º = 1

$$L = r\cdot mv = r\cdot m\frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi r^2 m}{T} = \frac{2\pi\cdot\left(10^{11}\right)^2\cdot 10^{24}}{3\cdot 365\cdot 24\cdot 3600} = 6{,}64\times 10^{38}\,kg\,m^2 s^{-1}$$

d. Por definición: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

El periodo de la nueva órbita se puede calcular mediante la 3ª ley de Kepler.

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \qquad T_2 = T_1\cdot\sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}} = \{r_2 = 2r_1\} = T_2 = T_1\cdot\sqrt{\frac{(2r_1)^3}{r_1^3}} = T_1\cdot\sqrt{8} = 3\cdot\sqrt{8} = 8{,}49\text{ años}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8{,}49\cdot 365\cdot 24\cdot 3600} = 2{,}35\times 10^{-8}\,{}^{rad}\!/_{s}$$

Modelo 2011. Cuestión 1B. Dos satélites de masas m_A y m_B describen sendas órbitas circulares alrededor de la Tierra, siendo sus radios orbitales R_A y R_B respectivamente. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Si $m_A = m_B$ y $R_A > R_B$, ¿cuál de los satélites tiene mayor energía cinética?

b) Si los dos satélites estuvieran en la misma órbita ($R_A = R_B$) y tuviesen distinta masa ($m_A < m_B$), ¿cuál de los dos tendría mayor energía cinética?

Solución.

a. $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

Para calcular la velocidad de un satélite en una órbita se tiene en cuenta que $F_g = F_c$.

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \qquad v^2 = G\frac{M}{R}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\cdot G\frac{M}{R} = G\frac{Mm}{2R}$$

La energía cinética del satélite, es inversamente proporcional al radio de la órbita. A mayor órbita, menor energía cinética.

$$R_A > R_B \quad \Rightarrow \quad E_c(A) < E_c(B)$$

El satélite B tiene mayor energía cinética.

b. La energía cinética $\left(E_c = \frac{1}{2}mv^2\right)$, es directamente proporcional a la masa, a mayor masa, mayor energía cinética.

$$m_A < m_B \quad \Rightarrow \quad E_c(A) < E_c(B)$$

El satélite B tiene mayor energía cinética.

Septiembre 2010 F.M. Problema 1A.- Un satélite artificial de 100 kg se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 7,5 km/s. Calcule:

a) El radio de la órbita.

b) La energía potencial del satélite.

c) La energía mecánica del satélite.

d) La energía que habría que suministrar a este satélite para que cambiara su órbita a otra con el doble de radio.

Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2}$

Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg; Radio de la Tierra $R_T = 6370$ km

Solución.

a. Para que un satélite orbite en torno a un planeta, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el satélite debe ser igual a la fuerza centrípeta, teniendo en cuenta que la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitatoria del planeta, se ha de cumplir:

$$\vec{F}_G = \vec{F}_c$$

Trabajando en módulo, se puede despejar el radio de la órbita en función de la masa del planeta y de la velocidad orbital del satélite.

$$G\frac{M\cdot m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \ :\ R = G\cdot\frac{M}{v^2} = 6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\times10^{24}}{\left(7{,}5\times10^3\right)^2} = 7{,}09\times10^6\,\text{m} = 7090\ \text{Km}$$

b. La expresión de la energía potencial de un cuerpo sometido a una fuerza central se calcula como la integral de la fuerza respecto de la posición.

$$E_p = \int_0^r \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^r F\,dr = \int_0^r G\frac{M\,m}{r^2}dr = -G\frac{M\,m}{r} = -6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\times10^{24}\cdot100}{7{,}09\times10^6} = -5{,}626\times10^9\ \text{J}$$

c. La energía mecánica de un satélite en orbita en torno a un planeta, es la suma de las energías potencial y cinética del satélite en la órbita.

$$E_m = E_p + E_c = -G\frac{M\,m}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

Teniendo en cuenta el apartado a: $\left(v^2 = G\frac{M}{R}\right)$:

$$E_m = -G\frac{M\,m}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -G\frac{M\,m}{r} + \frac{1}{2}mG\frac{M}{r} = -G\frac{M\,m}{r} + \frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r} = \frac{1}{2}E_p$$

$$E_m = \frac{1}{2}\left(-5{,}626\times10^9\right) = -2{,}813\times10^9\ \text{J}$$

d. La energía que habrá de suministrar al satélite para cambiar de órbita es la diferencia de energía mecánica entre las dos órbitas.

$$\Delta E_m = E_f - E_i = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_f} - \left(-\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_i}\right) = -\frac{1}{2}GMm\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

Si $r_i = R$, entonces $r_f = 2R$, quedando la expresión:

$$\Delta E_m = -\frac{1}{2}GMm\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{4}G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{4}6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\times10^{24}\cdot100}{7{,}09\times10^6} = 1{,}41\times10^9\ \text{J}$$

Septiembre 2010 F.M. Cuestión 1B.- Considerando que la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es una órbita circular, deduzca:

a) La relación entre la energía potencial gravitatoria y la energía cinética de la Luna en su órbita.
b) La relación entre el periodo orbital y el radio de la órbita descrita por la Luna.

Solución.

a. La energía potencial de un satélite en una órbita circular de radio R viene dada por la expresión:

$$E_p = -G\frac{Mm}{R}$$

La energía cinética por definición es

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Teniendo en cuenta el que el la órbita se cumple que $\left\{\begin{matrix} F_G = F_C \\ G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R}\end{matrix}\right\}$: $\left(v^2 = G\frac{M}{R}\right)$:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mG\frac{M}{r} = \frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r}$$

La relación entre ambas es:

$$\frac{E_p}{E_c} = \frac{-G\frac{Mm}{R}}{\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R}} = -2 : \quad E_p = -2E_c$$

b. Partiendo de la expresión de la velocidad del satélite en la órbita se obtiene la relación pedida (tercera ley de Kepler).

$$v^2 = G\frac{M_T}{R} : \{v = \omega R\} : \omega^2 R^2 = G\frac{M_T}{R} : \left\{\omega = \frac{2\pi}{T}\right\} : \frac{4\pi^2}{T^2}R^2 = G\frac{M_T}{R}$$

Ordenando se obtiene la relación entre el periodo y el radio.

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

Septiembre 2010 F.G. Cuestión 1A.- Un cometa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. Explique en qué punto de su órbita, afelio (punto más alejado del Sol) o perihelio (punto más cercano al Sol) tiene mayor valor:

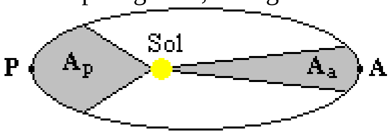
a) La velocidad.

b) La energía mecánica.

Solución.

a. La cuestión se puede resolver por dos vías diferentes.

1ª Por la ley de áreas. El área barrida por el radiovector que une el satélite (cometa) con el sol en tiempos iguales, son iguales.



$$A_1 = A_2$$

El área de un sector circular se puede expresar en función del radio y de la longitud del arco de curva.

$$A = \frac{1}{2} s \cdot r$$

Donde s representa la longitud del arco y r el radio.

$$A_p = A_a : \left\{ \begin{matrix} A_p = \frac{1}{2} s_p \cdot r_p \\ A_a = \frac{1}{2} s_a \cdot r_a \end{matrix} \right\} : \frac{1}{2} s_p \cdot r_p = \frac{1}{2} s_a \cdot r_a \ : \ s_p \cdot r_p = s_a \cdot r_a$$

Teniendo en cuenta que s = v · t

$$v_p \cdot t \cdot r_p = v_a \cdot t \cdot r_a$$

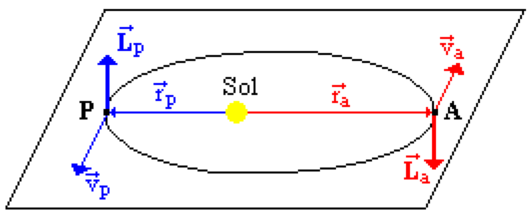
En tiempos iguales los valores de t coinciden

$$v_p \cdot r_p = v_a \cdot r_a$$

Teniendo en cuenta que $r_p < r_a$, para que la igualdad se cumpla $v_p > v_a$

La velocidad del cometa alrededor del Sol aumenta a medida que se aproxima al Sol, alcanzando su valor máximo en la posición del perihelio.

2ª Constancia del momento angular. Debido a que planetas, satélites y cometas se mueven bajo la acción de fuerzas centrales, el momento angular $\left(\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\right)$ del planeta, satélite o cometa es constante en todos los puntos de su trayectoria.



$$\vec{L}_p = \vec{L}_a = \text{cte}$$

En el perihelio y en el afelio el vector de posición es perpendicular al vector velocidad, cumpliéndose en módulo:

$$r_p \ m \ v_p \ \text{sen } 90° = r_a \ m \ v_a \ \text{sen } 90°$$

$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$$

$$r_p < r_a \quad \Leftrightarrow \quad v_p > v_a$$

Como la órbita no es perpendicular en todo momento al vector de posición a lo largo del cual actúa la fuerza central, se concluye que está fuerza tiene una componente en la dirección de la trayectoria que hace variar el módulo de la velocidad.

b. La energía mecánica de un satélite (cometa) en su orbita es la suma de la energía potencial y cinética.

$$E_m = E_p + E_c = -G\frac{M \cdot m}{r} + \frac{1}{2} m v^2 = \left\{ v^2 = G\frac{M}{r} \right\} = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{r}$$

La expresión pone de manifiesto que la energía mecánica es inversamente proporcional al radio de la órbita, teniendo en cuenta que el radio del perihelio es menor que el del afelio, la energía mecánica del cometa en valor absoluto será mayor en el perihelio.

$$r_p < r_a \Rightarrow \left|E_m(\text{Perihelio})\right| > \left|E_m(\text{Afelio})\right|$$

Septiembre 2010 F.G. Cuestión 1B.- Un asteroide está situado en una órbita circular alrededor de una estrella y tiene una energía total de -10^{10} J. Determine:

a) La relación que existe entre las energías potencial y cinética del asteroide.
b) Los valores de ambas energías potencial y cinética.

Solución.

a. Las energías potencial y cinética de un satélite (asteroide) en su orbita son:

- $$E_p = -G\frac{M\cdot m}{r}$$
- $$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \left\{v^2 = G\frac{M}{r}\right\} = \frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

La relación entre ellas es:

$$\frac{E_p}{E_c} = \frac{-G\frac{M\cdot m}{r}}{\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}} = -2 : \quad \frac{E_p}{E_c} = -2$$

b. Con la relación entre las emergías cinética y potencial y el valor de la energía mecánica total se plantea un sistema que permite calcular los valores de la energía cinética y de la energía potencial.

$$\begin{cases} \frac{E_p}{E_c} = -2 \\ E_p + E_c = -10^{10}\,J \end{cases} \xrightarrow{\text{Resolviendo}} \begin{cases} E_c = 10^{10}\,J \\ E_p = -2\cdot 10^{10}\,J \end{cases}$$

Junio 2010 F.M. Cuestión 1A.-

a) Deduzca la expresión de la energía cinética de un satélite en órbita circular alrededor de un planeta en función del radio de la órbita y de las masas del satélite y del planeta.
b) Demuestre que la energía mecánica del satélite es la mitad de su energía potencial.

Solución.

a. La energía cinética se expresa como:

$$E_c = \frac{1}{2}m\,v^2$$

La velocidad del satélite en su órbita se puede expresar en función de la masa del planeta y del radio de la órbita, teniendo en cuenta que la fuerza de atracción gravitacional es igual a la fuerza centrípeta a la que se ve sometido el satélite en su órbita.

$$F_G = F_c$$

$$G\frac{M\cdot m}{R^2} = m\cdot a_N$$

Teniendo en cuenta que $a_N = \frac{v^2}{R}$, se despeja la velocidad.

$$G\frac{M\cdot m}{R^2} = m\cdot\frac{v^2}{R} \quad : \quad v^2 = G\frac{M}{R}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía cinética.

$$E_c = \frac{1}{2}m\,G\frac{M}{R} = \frac{1}{2}G\frac{M\,m}{R}$$

b. La energía mecánica de un satélite es la suma de la energía cinética y la energía potencial.

$$E_m = E_c + E_p$$

Por definición la energía potencial de un satélite en su órbita alrededor de un planeta viene expresado por:

$$E_p = -G\frac{M\,m}{r}$$

La energía mecánica del satélite será la suma de su energía potencial y cinética.

$$E_m = E_p + E_c = -G\frac{M\,m}{r} + \frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(-G\frac{M\,m}{r}\right)}_{E_p} \Rightarrow E_m = \frac{1}{2}\cdot E_p$$

Junio 2010 F.M. Problema 1B.- Un satélite de l000 kg de masa describe una órbita circular de 12×10^3 km de radio alrededor de la Tierra. Calcule:

a) El módulo del momento lineal y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. ¿Cambian las direcciones de estos vectores al cambiar la posición del satélite en su órbita?

b) El periodo y la energía mecánica del satélite en la órbita.

Datos: Masa de la Tierra $M_T = 5{,}9\times10^{24}$ *kg*

Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67\times10^{-11}$ *N* m^2 *kg*$^{-2}$

Solución.

a. El momento lineal o cantidad de movimiento es:

$$\vec{p} = m\cdot\vec{v}$$

Su módulo es:

$$p = m\cdot v$$

Por tratarse de un satélite en órbita, su velocidad se puede poner en función de la masa del planeta y del radio de la órbita, teniendo en cuenta que el la órbita se cumple que la fuerza de atracción gravitacional es igual a la fuerza centrípeta.

$$F_G = F_c \;:\; G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \;:\; v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

Sustituyendo en la expresión del momento lineal:

$$p = m\cdot v = m\cdot\sqrt{G\frac{M}{r}} = 1000\cdot\sqrt{6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}9\times10^{24}}{12\times10^6}} = 5{,}76\times10^6\,\text{kg m s}^{-1}$$

Momento angular: $\vec{L} = \vec{p}\times\vec{r}$

Módulo del momento angular: $L = m\cdot v\cdot r\cdot \text{sen}\,\alpha$

Teniendo en cuenta que el radio y la velocidad son perpendiculares (sen 90 = 1):

$$L = m\cdot v\cdot r = m\cdot r\cdot\sqrt{G\frac{M}{r}} = m\cdot\sqrt{G\cdot M\cdot r} = 1000\cdot\sqrt{6{,}67\times10^{-11}\cdot 5{,}9\times10^{24}\cdot 12\times10^6} = 6{,}87\times10^{13}\,\text{kg m}^2\text{s}^{-1}$$

La dirección del momento lineal es la dirección de la velocidad, tangente a la trayectoria, y cambia continuamente (en cada punto será tangente a la trayectoria).

La dirección del momento angular es perpendicular al plano de la orbita y se mantiene constante en toda su trayectoria.

b. Periodo: Se obtiene de la igualdad entre la fuerza de atracción gravitacional y la fuerza centrípeta.

$$F_G = F_c \;:\; G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \;:\; G\frac{M}{r} = v^2 \;:\; v = \omega\cdot r \;:\; G\frac{M}{r} = \omega^2 r^2 \;:\; \omega = \frac{2\pi}{T} \;:\; G\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^2$$

$$G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2 \;:\; T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3 \;\; 3^{\text{a}}\ \text{Ley de Kepler}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}r^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\cdot 5{,}9\times10^{24}}\left(12\times10^6\right)^3} = 13166\,\text{s}$$

La energía mecánica de un satélite es la suma de la energía cinética y la energía potencial.

$$E_m = E_c + E_p$$

Por definición la energía potencial de un satélite en su órbita alrededor de un planeta viene expresado por:

$$E_p = -G\frac{M\,m}{r}$$

Por definición la energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \left\{\begin{matrix} F_G = F_c \\ v^2 = G\dfrac{M}{r}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}m\cdot G\frac{M}{r} = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$$

Sumando: $E_m = E_p + E_c = -G\frac{M\,m}{r} + \frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r}$

$$E_m = -\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{r} = -\frac{1}{2}6{,}67\times10^{-11}\frac{5{,}9\times10^{24}\cdot1000}{12\times10^{6}} = -1{,}64\times10^{10}\ \text{J}$$

Junio 2010 F.G. Cuestión 1A.-

a) Enuncie la 2ª ley de Kepler. Explique en qué posiciones de la órbita elíptica la velocidad del planeta es máxima y dónde es mínima.

b) Enuncie la 3ª ley de Kepler. Deduzca la expresión de la constante de esta ley en el caso de órbitas circulares.

Solución.

a. 2ª Ley de Kepler. El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales. Esta Ley es el equivalente a la constancia del momento angular $\left(\vec{L} = m\cdot\vec{r}\times\vec{v}\right)$.

Por ser el momento angular de un planeta en su órbita alrededor del Sol constante (en modulo $L = m\cdot v\cdot r$), cuando el planeta esta más alejado del Sol (afelio), su radio será máximo y su velocidad orbital mínima, mientras que cuando esta más próximo (perihelio), su radio será mínimo y su velocidad será máxima.

b. 3ª Ley de Kepler. Los cuadrados de los periodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes de las respectivas órbitas.

En una órbita, la fuerza de atracción gravitacional es igual a la fuerza centrípeta.

$$F_G = F_c \;;\; G\frac{M\,m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \;;\; G\frac{M}{r} = v^2$$

Teniendo en cuenta: $\left.\begin{matrix} v = \omega r \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T}\end{matrix}\right\} : v = \frac{2\pi r}{T}$. Sustituyendo en la igualdad anterior:

$$G\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \;;\; G\frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \;;\; \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M} = \text{cte}$$

Junio 2010 F.G. Problema 1B.-

Io, un satélite de Júpiter, tiene una masa de $8{,}9\times10^{22}$ kg, un periodo orbital de 1,77 días, y un radio medio orbital de $4{,}22\times10^{8}$ m, Considerando que la órbita es circular con este radio, determine:

a) La masa de Júpiter

b) La intensidad de campo gravitatorio, debida a Júpiter, en los puntos de la órbita de Io.

c) La energía cinética de Io en su órbita.

d) El módulo del momento angular de Io respecto de su órbita

Solución.

a. Para Calcular la masa del planeta (Júpiter) con los datos del enunciado, se tiene en cuenta que la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el satélite en orbita, debe ser igual a la fuerza centrípeta que actúa sobre el satélite.

$$F_G = F_c \;:\; G\frac{M\cdot m}{R^2} = m\cdot\frac{v^2}{R} \;:\; v^2 = G\frac{M}{R}$$

Teniendo en cuenta: $v = \omega \cdot R$

$$(\omega \cdot R)^2 = G\frac{M}{R} \ : \ \omega^2 = G\frac{M}{R^3} \ : \ \omega = \frac{2\pi}{T} \ : \ \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = G\frac{M}{R^3} \ : \ M = \frac{4\pi^2 R^3}{G \cdot T^2}$$

Según el enunciado: $T = 1{,}77\,d = 1{,}77\,d \cdot 24\frac{h}{d} \cdot 3600\frac{s}{h} = 152928s$

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot \left(4{,}22 \times 10^8\,m\right)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot T^2 Nm^2 Kg^{-2} \cdot (152928s)^2} = 1{,}9 \times 10^{27}\,Kg$$

b. La intensidad de campo gravitatorio se obtiene igualando la fuerza gravitacional al peso.

$$F_G = P \ : \ G\frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot g \ : \ g = G\frac{M}{R^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \frac{1{,}9 \times 10^{27}}{\left(4{,}22 \times 10^8\right)^2} = 0{,}71\,m/s^2$$

c. $$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \left\{v^2 = G\frac{M}{R}\right\} = \frac{1}{2}m \cdot G\frac{M}{R} = \frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{R} = \frac{1}{2}6{,}67 \times 10^{-11}\frac{1{,}9 \times 10^{27} \cdot 8{,}9 \times 10^{22}}{4{,}22 \times 10^8}$$

$$E_c = 1{,}33 \times 10^{31}\,J$$

d. Por definición: $\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$. El módulo del momento angular es:

$$L = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Si considera una órbita circular (α = 90º):

$$L = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\,90 = m \cdot r \cdot v = \left\{v = \sqrt{G\frac{M}{r}}\right\} = m \cdot r \cdot \sqrt{G\frac{M}{r}} = m_{Io}\sqrt{G \cdot M_J \cdot r} =$$

$$= 8{,}9 \times 10^{22}\sqrt{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}9 \times 10^{27} \cdot 4{,}22 \times 10^8} = 6{,}5 \times 10^{35}\,Kg\,m^2 s^{-1}$$

Modelo 2010. Problema 1A.- Desde un punto de la superficie terrestre se lanza verticalmente hacia arriba un objeto de 100 kg que llega hasta una altura de 300 km. Determine:

a) La velocidad de lanzamiento.

b) La energía potencial del objeto a esa altura.

Si estando situado a la altura de 300 km, queremos convertir el objeto en satélite de forma que se ponga en órbita circular alrededor de la Tierra,

c) ¿Qué energía adicional habrá que comunicarle?

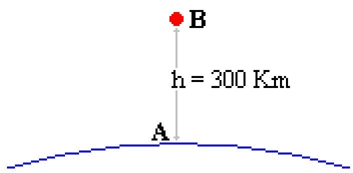
d) ¿Cuál será la velocidad y el periodo del satélite en esa órbita?

Datos: Constante de Gravitación $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\,m^2\,kg^{-2}$

Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra $R_T = 6370$ km

Solución.

a. En ausencia de fuerzas externas (rozamiento) el objeto se encuentra en un campo conservativo y por lo tanto la energía mecánica se conserva.



$$E_m(A) = E_m(B)$$

$$E_p(A) + E_c(A) = E_p(B)$$

$$-G\frac{M_T \cdot m}{R_T} + \frac{1}{2}m_s v^2 = -G\frac{M_T \cdot m}{R_T + h}$$

Simplificando la masa del objeto (m), se despeja la velocidad.

$$-G\frac{M_T}{R_T} + \frac{1}{2}v^2 = -G\frac{M_T}{R_T + h} \ ; \ \frac{1}{2}v^2 = G\frac{M_T}{R_T} - G\frac{M_T}{R_T + h} \ ; \ v^2 = 2G \cdot M_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)$$

$$v = \sqrt{2G \cdot M_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)} = \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}98 \times 10^{24}\left(\frac{1}{6{,}37 \times 10^6} - \frac{1}{6{,}67 \times 10^6}\right)} = 2373{,}3\,m/s$$

b. La energía potencial del objeto a esa altura viene dada por la expresión:

$$E_p = -G\frac{M_T \cdot m}{R}$$

$$R = R_T + h = 6370 + 300 = 6670\ Km$$

$$E_p = -6{,}67\times10^{-11}\frac{5{,}98\times10^{24}\cdot 100}{6{,}67\times10^{6}} = -5{,}98\cdot 10^{9}\ J$$

c. La energía adicional que habría que comunicar al objeto para convertirlo en satélite es la diferencia entre la energía del objeto convertido en satélite orbitando a esa altura y la energía del objeto a esa altura, calculada en el apartado anterior.

La energía de un satélite de 100 kg de masa que orbita a una altura de 300 Km sobre la superficie de la tierra es la suma de la energía potencial y la energía cinética.

$$E_m(\text{Satélite}) = E_p + E_c = -G\frac{M_T\cdot m}{R} + \frac{1}{2}mv^2$$

El producto mv^2 se puede obtener teniendo en cuenta que para que un satélite orbite en torno a un planeta, la fuerza de atracción gravitacional debe ser igual a la fuerza centrípeta.

$$F_G = F_c\ ;\ \ G\frac{M_T\cdot m}{R^2} = m\frac{v^2}{R}\ ;\ \ mv^2 = G\frac{M_T\cdot m}{R}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía mecánica del satélite:

$$E_m(\text{Satélite}) = -G\frac{M_T\cdot m}{R} + \frac{1}{2}\frac{M_T\cdot m}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T\cdot m}{R}$$

$$E_m(\text{Satélite}) = -\frac{1}{2}\cdot 6{,}67\times10^{-11}\frac{5{,}98\times10^{24}\cdot 100}{6{,}67\times10^{6}} = -2{,}99\times10^{9}\ J$$

La energía que habrá que comunicar al objeto situado a 300 Km de altura para convertirlo en un satélite es:

$$\Delta E = E_m(\text{satélite}) - E_p(\text{objeto}) = -2{,}99\times10^{9} - \left(-5{,}98\times10^{9}\right) = 2{,}99\times10^{9}\ J$$

d. Para que un satélite orbite en torno a un planeta, la fuerza de atracción gravitacional debe ser igual a la fuerza centrípeta.

$$F_G = F_c\ ;\ \ G\frac{M_T\cdot m}{R^2} = m\frac{v^2}{R}\ ;\ \ mv^2 = G\frac{M_T\cdot m}{R}\ ;\ \ v = \sqrt{G\frac{M_T}{R}}$$

$$v = \sqrt{6{,}67\times10^{-11}\frac{5{,}98\times10^{24}}{6{,}67\times10^{6}}} = 7733\ m/s$$

El periodo del satélite se puede calcular aplicando la tercera ley de Kepler.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\cdot M_T}R^3 = \frac{4\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\cdot 5{,}98\times10^{24}}\cdot\left(6{,}67\times10^{6}\right)^3 = 29370424\ s^2$$

$$T = \sqrt{29370424\ s^2} = 5419\ s$$

También se puede calcular a partir de la velocidad.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{v/R} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi\cdot 6{,}67\times10^{6}}{7733} = 5419\ s$$

Modelo 2010. Cuestión 1B.-

a) ¿Cuál es el periodo de un satélite artificial que gira alrededor de la Tierra en una órbita circular cuyo radio es un cuarto del radio de la órbita lunar?

b) ¿Cuál es la relación entre la velocidad del satélite y la velocidad de Luna en sus respectivas órbitas?

Dato: Periodo de la órbita lunar T_L = 27,32 días

Solución.

a. Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler: *"El cuadrado del periodo del movimiento de un planeta es directamente proporcional al cubo de la distancia media del planeta al sol"*

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

Aplicando esta expresión al satélite y a la Luna:

$$\left.\begin{array}{l} T_S^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM} R_S^3 \\ T_L^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM} R_L^3 \end{array}\right\} : \text{Dividiendo.} \frac{T_S^2}{T_L^2} = \frac{\frac{4\pi^2}{GM} R_S^3}{\frac{4\pi^2}{GM} R_L^3} : \text{Simplificando.} \frac{T_S^2}{T_L^2} = \frac{R_S^3}{R_L^3}$$

Expresión de la que se puede despejar el periodo del satélite:

$$T_S = \sqrt{\frac{R_S^3}{R_L^3} \cdot T_L^2} = T_L \cdot \sqrt{\frac{R_S^3}{R_L^3}} \cdot$$

Según el enunciado: $R_S = \frac{1}{4} R_L$

$$T_S = T_L \cdot \sqrt{\frac{R_S^3}{R_L^3}} \cdot = T_L \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{4} R_L\right)^3}{R_L^3}} = T_L \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{4^3} R_L^3}{R_L^3}} = T_L \cdot \sqrt{\frac{1}{4^3}} = \frac{T_L}{2^3}$$

$$T_S = \frac{T_L}{8} = \frac{27{,}32}{8} = 3{,}42 \text{ días} <> 3 \text{ d, 9h, 57 min}$$

b. Teniendo en cuenta que: $\left\{\begin{array}{l} \omega = \dfrac{2\pi}{T} \\ v = \omega \cdot R \end{array}\right. : \frac{v}{R} = \frac{2\pi}{T} \;;\; v = \frac{2\pi \cdot R}{T}$

$$\frac{v_s}{v_L} = \frac{\frac{2\pi \cdot R_s}{T_s}}{\frac{2\pi \cdot R_L}{T_L}} = \frac{T_L \cdot R_s}{T_s \cdot R_L} = \left\{\begin{array}{l} R_s = \dfrac{1}{4} R_L \\ T_s = \dfrac{1}{8} T_L \end{array}\right\} = \frac{T_L \cdot \frac{1}{4} R_L}{\frac{1}{8} T_L \cdot R_L} = \frac{8}{4} = 2$$

Septiembre 2009. Cuestión 1.- Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El valor de la velocidad de escape de un objeto lanzado desde la superficie de la Tierra depende del valor de la masa del objeto.

b) En el movimiento elíptico de un planeta en tomo al Sol la velocidad del planeta en el perihelio (posición más próxima al Sol) es mayor que la velocidad en el afelio (posición más alejada del Sol).

Solución.

a. **FALSO.** Por el principio de conservación de la energía, la energía mecánica en la superficie terrestre (suma de cinética y potencial) debe ser igual a la que tendrá cuando escape del campo gravitatorio, que será nula debido a que suponemos que llega con velocidad nula (E_c = 0) y que esta a una distancia infinita (E_p = 0).

$$\frac{1}{2} m\, v^2 - G \frac{M\, m}{R_T} = 0$$

Simplificando las masas se despeja v.

$$\frac{1}{2} v^2 = G \frac{M}{R_T} \;:\; v = \sqrt{2G \frac{M}{R_T}}$$

b. **VERDADERO.** Teniendo en cuenta que el modulo del momento angular del planeta en su giro alrededor del Sol y en ausencia de fuerzas externas, permanece constante.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$
$$\left|\vec{L}\right| = L = r \cdot m \cdot v \cdot \text{sen}\,90 = r \cdot m \cdot v = cte$$
$$L_{Afelio} = L_{Perihelio}$$
$$r_A \cdot m \cdot v_A = r_P \cdot m \cdot v_P$$
$$r_A \cdot v_A = r_P \cdot v_P : \{r_A > r_P\} \Rightarrow v_P > v_A$$

Junio 2009. Cuestión 1.- Un satélite artificial de 500 kg que describe una órbita circular alrededor de la Tierra se mueve con una velocidad de 6,5 km/s. Calcule:

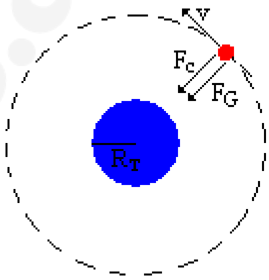
a) La energía mecánica del satélite.

b) La altura sobre la superficie de la Tierra a la que se encuentra.

Dato: *Constante de Gravitación Universal* $G = 6.67 \times 10^{-11}$ *N m² kg⁻²*
Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ *kg*
Radio de la Tierra $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ *m*

Solución.

a. La energía mecánica de un satélite que orbita alrededor de la Tierra es la suma de la energía cinética y de la energía potencial, y se calcula mediante la expresión



$$E_m = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r}$$

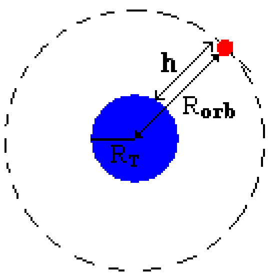
Donde r representa la distancia del satélite al centro de la Tierra. Para calcular r se tiene en cuenta que para que un satélite orbite alrededor de la Tierra, la fuerza centrípeta del satélite debe ser igual a la fuerza de atracción de la Tierra.

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2} \;:\; r = G\frac{M_T}{v^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{5{,}98 \times 10^{24}}{6500^2} = 9{,}44 \times 10^6 \text{m}$$

Conocido el radio, se calcula la energía mecánica.

$$E_m = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2} 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{5{,}98 \times 10^{24} \cdot 500}{9{,}44 \cdot 10^6} = -1{,}06 \times 10^{10}\,\text{J}$$

b. Para calcular la altura desde la superficie terrestre, se resta el radio de la tierra al radio de la órbita.



$$h = r_{orb} - r_T = 9{,}44 \times 10^6 - 6{,}37 \times 10^6 = 3{,}07 \times 10^6 \text{m}$$

Problema 1B- Suponiendo que los planetas Venus y la Tierra describen órbitas circulares alrededor del Sol, calcule:

a) El periodo de revolución de Venus.

b) Las velocidades orbítales de Venus y de la Tierra.

Dato: *Distancia de la Tierra al Sol:* $1{,}49 \times 10^{11}$ *m*
Distancia de Venus al Sol: $1{,}08 \times 10^{11}$ *m*
Periodo de revolución de la Tierra: *365 días*

Solución.

a. La fuerza de atracción que ejerce el Sol sobre cada planeta causa la aceleración centrípeta necesaria para que el planeta orbite alrededor de él. Si se considera la aproximación de órbitas circulares, se puede deducir la Ley de Kepler.

Aplicando la segunda ley de Newton ($F = m \cdot a$), al planeta que órbita:

$$F_G = m \cdot a_n \;:\; G \cdot \frac{M_S m}{R^2} = m \cdot \frac{v^2}{R} \;:\; \{v = \omega R\} \;:\; G \cdot \frac{M_S}{R^2} = \frac{(\omega R)^2}{R} \;:\; G \cdot \frac{M_S}{R^2} = \omega^2 R \;:\left\{\omega\frac{2\pi}{T}\right\} :$$

$$G\cdot\frac{M_S}{R^2}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\ :\ G\cdot\frac{M_S}{R^3}=\frac{4\pi^2}{T^2}\ :\ \frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{G\cdot M_S}=cte$$

Esta expresión permite calcular el periodo de un planeta (Venus) conocida su distancia al Sol, no obstante, en este caso no nos dan como dato la masa del Sol, por lo que habrá que comparar los parámetros de Venus con los terrestres.

$$\frac{T^2}{R^3}=cte\Rightarrow\frac{T_V^2}{R_V^3}=\frac{T_T^2}{R_T^3}\ :\ T_V=T_T\sqrt{\frac{R_V^3}{R_T^3}}=365\sqrt{\frac{\left(1{,}08\times10^{11}\right)^3}{\left(1{,}49\times10^{11}\right)^3}}=225\,\text{días}$$

b. Supuesta una órbita circula, conocido el periodo se calcula la velocidad angular, y con la velocidad angular y el radio la velocidad orbital.

$$\left.\begin{array}{l}\omega=\dfrac{2\pi}{T}\\ \omega=\dfrac{v}{R}\end{array}\right\}:\frac{v}{R}=\frac{2\pi}{T}\ :\ v=\frac{2\pi}{T}R$$

Para Venus: $v_V=\frac{2\pi}{T}R_V=\frac{2\pi}{225\cdot24\cdot3600}\cdot1{,}08\times10^{11}=34907\,{}^{m}\!/_{s}=34{,}9\,{}^{Km}\!/_{s}$

Para la Tierra: $v_T=\frac{2\pi}{T}R_T=\frac{2\pi}{365\cdot24\cdot3600}\cdot1{,}49\times10^{11}=29687\,{}^{m}\!/_{s}=29{,}7\,{}^{Km}\!/_{s}$

Modelo 2009.- Cuestión 1.

a) Enuncie la tercera ley de Kepler y demuéstrela para el caso de órbitas circulares.

b) Aplique dicha ley para calcular la masa del Sol suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular con un radio medio de l ,49x1O^8 km.

Dato: Constante de Gravitación Universal G = 6,67 x 10^{-11} N m^2 kg^{-2}

Solución.

a. Tercera ley de Kepler:

"El cuadrado del periodo del movimiento de un planeta es directamente proporcional al cubo de la distancia media del planeta al sol"

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

Deducción:

En el caso de una órbita circular, la fuerza que actúa sobre un cuerpo es la fuerza gravitatoria y la aceleración es la aceleración centrípeta; por lo tanto podemos escribir la segunda ley de Newton como:

$$G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$$

Simplificando y despejando:

$$\left.\begin{array}{l}G\dfrac{Mm}{r^2}=m\dfrac{v^2}{r}\\ v=\omega\cdot r\end{array}\right\}:\frac{GM}{r^2}=\frac{\omega^2\cdot r^2}{r}:\frac{GM}{r^2}=\omega^2\cdot r$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{GM}{r^2}=\omega^2\cdot r\\ \omega=\dfrac{2\pi}{T}\end{array}\right\}:\frac{GM}{r^2}=\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot r\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

b. Para calcular la masa del sol se despeja M de la tercera ley de Kepler.

$$M=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}=\left\{\begin{array}{c}r=1{,}49\times10^8\,Km=1{,}49\times10^{11}\,m\\ G=6{,}67\times10^{-11}\,Nm^2Kg^{-2}\\ T=365\text{días}=3{,}15\times10^7\,s\end{array}\right\}=\frac{4\pi^2\left(1{,}49\times10^{11}\right)^3}{6{,}67\times10^{-11}\cdot\left(3{,}15\times10^7\right)^2}=1{,}97\times10^{30}\,Kg$$

Septiembre 2008. Cuestión 1. Calcule el módulo del momento angular de un objeto de 1000 kg respecto al centro de la Tierra en los siguientes casos:

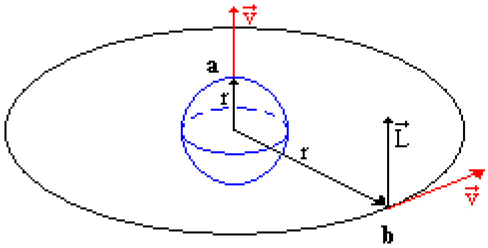
a) Se lanza desde el polo norte perpendicularmente a la superficie de la Tierra con una velocidad de10 Km/s.

b) Realiza un órbita circular alrededor de la Tierra en el plano ecuatorial a una distancia de 600 km de su superficie. .

Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6,67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

Masa de la Tierra $M_T = 5,98\times10^{24}$ kg. Radio de la Tierra $R_T = 6,37\times10^6$ m

Solución.



El momento angular se define como el producto vectorial del radiovector por la cantidad de movimiento:

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times(m\,\vec{v})$$

Su modulo, viene dado por:

$$L = r\,m\,v\,\text{sen}\,\alpha$$

a) En este caso el ángulo que forman el vector posición r con el vector velocidad es cero por lo que el modulo del momento angular es nulo.

$$L = r\,m\,v\,\text{sen}\,0^\circ = 0\left(\text{kg m}^2\text{s}^{-1}\right)$$

b) En este caso el ángulo que forma el vector posición r y la velocidad orbital es 90º.

$$L = r\,m\,v\,\text{sen}\,90^\circ = r\,m\,v$$

La velocidad de orbita se calcula teniendo en cuenta que debe ser tal que la fuerza de atracción gravitatoria sea la fuerza centrípeta necesaria para describir la órbita de radio r.

$$r = R + h = 6,37.\ 10^6 + 600000 = 6,97.\ 10^6\ \text{m:}$$

$$F_G = F_c\ :\ G\cdot\frac{M\cdot m}{r^2} = m\cdot\frac{v^2}{r}\ :\ v = \sqrt{G\cdot\frac{M}{r}} = \sqrt{6,67\times10^{-11}\cdot\frac{5,98\times10^{24}}{6,97\times10^6}} = 7565\,\text{m/s}$$

Conocida la velocidad orbital se calcula el módulo del momento angular.

$$L = m\cdot r\cdot v\cdot\text{sen}\,90^\circ = 6,97\times10^6\cdot1000\cdot7565\cdot1 = 5,27\times10^{13}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

El vector L es perpendicular a al plano orbital.

Septiembre 2008. Problema 2A.- Un satélite artificial de 100 kg se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 7,5 km/s. Calcule:

a) El radio de la órbita

b) La energía potencial del satélite.

c) La energía mecánica del satélite.

d) La energía que habría que suministrar al satélite para que describa una órbita circular con radio doble que el de la órbita anterior. .

Datos: Constante de Gravitación Universal. $G = 6,67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

Masa de la Tierra $M_T = 5,98\times10^{24}$ kg; Radio de la Tierra $R_T = 6,37\times10^6$ m

Solución.

a. Para que un satélite orbite en torno a un planeta, la fuerza de atracción gravitacional a la que se ve sometido debe ser igual a la fuerza centrípeta que desarrolla el satélite al girar en la órbita.

$$F_G = F_c\ :\ G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}\ :\ r = G\frac{M}{v^2} = 6,67\times10^{-11}\cdot\frac{5,98\times10^{24}}{\left(7,5\times10^3\right)^2} = 7,09\times10^6\ \text{m}$$

b. La energía potencial de un satélite en órbita viene dada por la expresión:

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} = 6,67\times10^{-11}\frac{5,98\cdot10^{24}\cdot100}{7.09\times10^6} = 5,625\times10^9\ \text{J}$$

c. La energía mecánica del satélite es la suma de su energía potencial y de su energía cinética del en la órbita.

$$E_m = E_p + E_c = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = \left\{\begin{matrix} F_G = F_c \\ v^2 = G\dfrac{M}{r} \end{matrix}\right\} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} =$$

$$= -\frac{1}{2}6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\times10^{24}\cdot100}{7{,}09\times10^{6}} = -2{,}813\times10^{9}\ J$$

d. La energía que habrá que suministrar al satélite para que describa una órbita de doble radio es la diferencia de energía mecánica existente entre las dos órbitas.

$$\Delta E = E_m(2r) - E_m(r) = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{2r} - \left(-\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}\right) = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}G\frac{Mm}{r} =$$

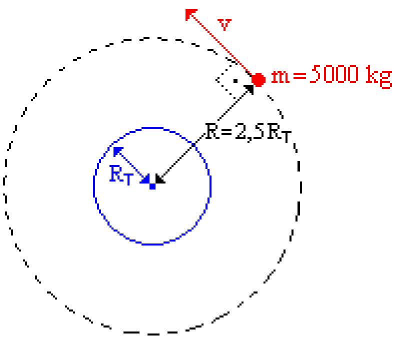
$$= -\frac{1}{4}6{,}67\times10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\times10^{24}\cdot100}{7{,}09\times10^{6}} = 1{,}406\times10^{9}\ J$$

Junio 2008. Cuestión 2. Una sonda de masa 5000 kg se encuentra en una órbita circular a una altura sobre la superficie terrestre de 1,5 R_T. Determine: **a)** el momento angular de la sonda en esa órbita respecto al centro de la Tierra; **b)** la energía que hay que comunicar a la sonda para que escape del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.

Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67\times10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$

Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg; Radio de la Tierra $R_T = 6{,}37\times10^{6}$ m

Solución.



a. Momento angular:

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v}$$

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\right|\cdot\left|m\vec{v}\right|\cdot \text{sen } 90^\circ = R\cdot m\cdot v$$

Donde R es la distancia de la sonda al centro de la tierra $R = 2'5\ R_T$

La velocidad en la órbita se calcula igualando la fuerza centrípeta a la fuerza gravitacional:

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot5{,}98\times10^{24}}{2{,}5\cdot6{,}37\times10^{6}}} = 5005\ m/s$$

Sustituyendo los datos en la expresión del módulo del momento angular:

$$\left|\vec{L}\right| = r\cdot m\cdot v = 2{,}5\cdot6{,}37\times10^{6}(m)\cdot5000(kg)\cdot5005(m/s) = 3{,}98\times10^{14}\ kg\ m^2 s^{-1}$$

b. La energía necesaria para poder escapar del campo gravitatorio terrestre

Solución.

Por conservación de la energía, la energía potencial en la órbita más la energía cinética que le comunicamos ha de ser igual a la energía mecánica en el infinito, que es cero, teniendo en cuenta que llega con velocidad nula (E(c) = 0), y que al ser R = ∞ la energía potencial es 0.

Para que la sonda escape del campo gravitatorio, tendrá que superar su potencial gravitatorio, es decir, tendrá que ganar una energía igual a la energía mecánica que tiene en la órbita.

$$\Delta E = 0 - E_m(\text{Órbita}) = --\frac{1}{2}G\cdot\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}6'67\times10^{-11}\left(Nm^2kg^{-2}\right)\frac{5'98\times10^{24}(kg)\cdot5000(kg)}{2{,}5\cdot6{,}37\times10^{6}\,m} = 6{,}26\times10^{10}\ J(Nm)$$

Modelo 2008. Cuestión 1.- Cuatro masas puntuales idénticas de 6 kg cada una están situadas en los vértices de un cuadrado de
lado igual a 2 m. Calcule:

a) El campo gravitatorio que crean las cuatro masas en el centro de cada lado del cuadrado.

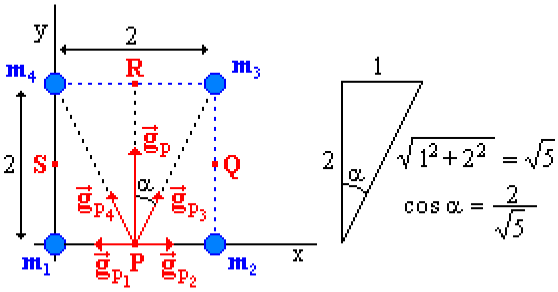
b) El potencial gravitatorio creado por las cuatro masas en el centro del cuadrado, tomando el infinito como origen de potenciales.

Dato: Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2\ kg^{-2}}$

Solución.

a. Se pide calcular la intensidad de campo gravitatorio $(\vec{g})$ en los puntos medios de los lados del cuadrado.

Sobre la masa 1 colocamos los ejes de coordenadas, y denominamos P, Q, R y S a los puntos medios de los lados del cuadrado. Analizamos el punto P:



La intensidad de campo gravitatorio viene determinada por la expresión:

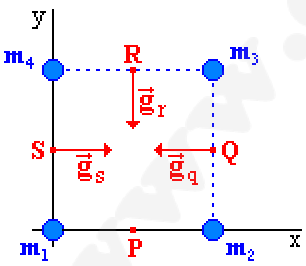
$$\vec{g} = G\cdot\frac{m}{d^2}\vec{u}_r$$

Debido a la igualdad de las masas y, dado el carácter vectorial de la magnitud, por simetría se comprueba que $\vec{g}_{1_p} = -\vec{g}_{2_p}$, anulándose mutuamente. Ocurre lo mismo con las componentes OX de las intensidades creadas por las masas 3 y 4 $\left(\vec{g}_{4_{x_p}} = -\vec{g}_{3_{x_p}}\right)$, por lo tanto la intensidad del campo resultante en el punto P será la suma de las componentes OY de las intensidades creadas por la masas 3 y 4.

$$\vec{g}_{T_p} = \vec{g}_{3_{y_p}} + \vec{g}_{4_{y_p}} : \begin{cases} \vec{g}_{3_{y_p}} = g_{3_p}\cos\alpha\ \vec{j} = G\cdot\dfrac{m_3}{d^2}\cos\alpha\ \vec{j} = 6{,}67\times10^{-11}\ \dfrac{6}{\left(\sqrt{5}\right)^2}\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\ \vec{j} = 7{,}16\times10^{-11}\ \vec{j}\ \mathrm{m/s^2} \\ \vec{g}_{4_{y_p}} = g_{4_p}\cos\alpha\ \vec{j} = G\cdot\dfrac{m_4}{d^2}\cos\alpha\ \vec{j} = 6{,}67\times10^{-11}\ \dfrac{6}{\left(\sqrt{5}\right)^2}\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\ \vec{j} = 7{,}16\times10^{-11}\ \vec{j}\ \mathrm{m/s^2} \end{cases}$$

$$\vec{g}_{T_p} = 7{,}16\times10^{-11}\ \vec{j} + 7{,}16\times10^{-11}\ \vec{j} = 14{,}32\times10^{-11}\ \vec{j}\ \mathrm{m/s^2}$$

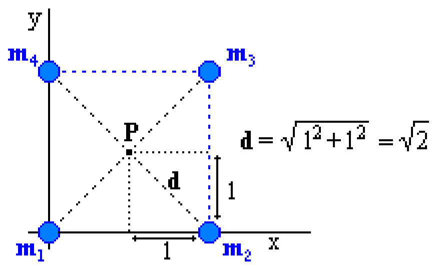
Puesto que las masas son iguales y las distancias de las masas a los puntos medios de los lados también lo son, las intensidades de campo gravitatorio en los puntos Q, R y S son:



$$\vec{g}_Q = -14{,}32\times10^{-11}\ \vec{i}\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\vec{g}_R = -14{,}32\times10^{-11}\ \vec{j}\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\vec{g}_S = 14{,}32\times10^{-11}\ \vec{i}\ \mathrm{m/s^2}$$



b. El potencial en P es la suma escalar de los potenciales que crea cada masa en ese punto.

$$V_P = V_{P_1} + V_{P_2} + V_{P_3} + V_{P_4}$$

El potencial gravitatorio en un punto debido a una masa m situada a una distancia d viene dado por la expresión:

$$V = -G\frac{m}{d}$$

Aplicando esta expresión al sistema de masas propuesto

$$V_P = -G\frac{m_1}{d} + \left(-G\frac{m_2}{d}\right) + \left(-G\frac{m_3}{d}\right) + \left(-G\frac{m_4}{d}\right)$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 6 \text{ kg} = m$$

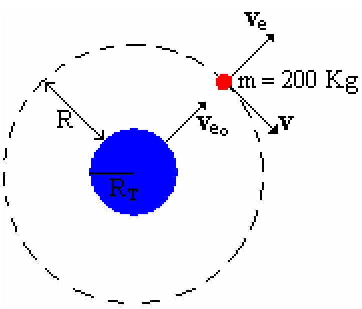
$$V_P = 4\cdot\left(-G\frac{m}{d}\right) = 4\cdot\left(-6{,}67\times10^{-11}\frac{6}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}31\times10^{-9}\ \text{J}/\text{kg}$$

Modelo 2008. Problema 1B.- Un satélite artificial de 200 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape a la atracción terrestre desde esa órbita es la mitad que la velocidad de escape desde la superficie terrestre.

a) Calcule la fuerza de atracción entre la Tierra y el satélite.
b) Calcule el potencial gravitatorio en la órbita del satélite.
c) Calcule la energía mecánica del satélite en la órbita.
d) ¿Se trata de un satélite geoestacionario? Justifique la respuesta.

Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg; Radio de la Tierra $R_T = 6{,}37\times10^6$ m

Solución.



Para resolver las diferentes cuestiones que plantea el problema hace falta conocer el radio de la orbita donde se encuentra el satélite, para ello se informa que la velocidad de escape en la órbita (v_e) es la mitad que la velocidad de escape desde la superficie terrestre (v_{e_o}).

Se denomina velocidad de escape de un cuerpo (cohete, satélite,…), a la velocidad que este debe adquirir, en el momento se ser lanzado, para que escape del campo gravitatorio del planeta en el que se encuentra. Se calcula mediante un balance energético.

La energía de escape es la diferencia entre la energía en el infinito (0) y le energía mecánica total en la órbita, siendo el infinito el punto donde la interacción gravitatoria se anula.

Si denominamos v a la velocidad del satélite en la órbita:

E(Escape) = E(Infinito) – E(Órbita)

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = 0 - \left(\underbrace{-G\frac{Mm}{R}}_{E_p} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{E_c}\right)$$

La energía cinética en la órbita se puede expresar en función del radio de la órbita igualando la fuerza de atracción gravitacional con la fuerza centrípeta.

$$F_g = F_c \qquad G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \qquad v^2 = G\frac{M}{R}$$

Sustituyendo la expresión v^2 en el balance energético y operando se despeja la velocidad de escape en la órbita:

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = G\frac{Mm}{R} - \frac{1}{2}m\cdot G\frac{M}{R} \qquad \frac{1}{2}mv_e^2 = G\frac{Mm}{R} - \frac{1}{2}G\frac{Mm}{R} \qquad \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{R}$$

$$v_e^2 = G\frac{M}{R} \qquad v_e = \sqrt{G\frac{M}{R}}$$

La velocidad de escape desde la superficie terrestre se calcula de igual forma, teniendo en cuenta, que el la superficie terrestre solo hay energía potencial.

$$\frac{1}{2}mv_{e_o}^2 = 0 - \left(-G\frac{Mm}{R_T}\right) \quad ; \quad v_{e_o} = \sqrt{2G\frac{M}{R_T}}$$

Comparando las velocidades de escape se obtiene el radio de la órbita:

$$v_e = \frac{1}{2} v_{e_o} \quad ; \quad \frac{v_{e_o}}{v_e} = 2 \quad ; \quad \frac{\sqrt{2G\frac{M}{R_T}}}{\sqrt{G\frac{M}{R}}} = 2 \quad ; \quad \frac{2G\frac{M}{R_T}}{G\frac{M}{R}} = 2^2 \quad ; \quad \frac{R}{R_T} = 2 \quad ; \quad R = 2R_T$$

$$R = 2 \cdot 6{,}37 \times 10^6 \, m = 12{,}74 \times 10^6 \, m$$

a. $$F = G\frac{M \cdot m}{R^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \times 10^{24} \cdot 200}{\left(12{,}74 \times 10^6\right)^2} = 491{,}5 \, N$$

b. $$V = -G\frac{M}{R} = -6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \times 10^{24}}{12{,}74 \times 10^6} = -3{,}13 \times 10^7 \, J/kg$$

c. $$E_m = -\frac{1}{2} G \frac{M \cdot m}{R} = -\frac{1}{2} 6{,}67 \times 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \times 10^{24} \cdot 200}{12{,}74 \times 10^6} = -3{,}13 \times 10^9 \, J$$

d. Para que un satélite sea estacionario, su periodo debe ser de 24 horas. El periodo se puede calcular aplicando la 3ª ley de Kepler.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3 \quad ; \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} R^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot 5{,}98 \times 10^{24}} \cdot \left(12{,}74 \times 10^6\right)^3} = 14\,306 \, s = 3h\, 58'\, 26''$$

El satélite no es geoestacionario

Septiembre 2007. Cuestión 1.- a) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico cuyo radio es la mitad del de la Tierra y posee la misma densidad media? **b)** ¿Cuál sería el período de la órbita circular de un satélite situado a una altura de 400 km respecto a la superficie del planeta?

Datos: Radio de la Tierra $R_T = 6371$ km
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra $g = 9{,}8 \, m \, s^{-2}$

Solución.

a. La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta se puede expresar en función de la masa y el radio del planeta, igualando el peso en la superficie con la fuerza gravitacional.

$$P = F_G \quad ; \quad m \cdot g = G\frac{M \cdot m}{R^2} \quad ; \quad g = G\frac{M}{R^2}$$

La gravedad en el planeta que se pide se calcula por comparación con la gravedad terrestre.

$$g_T = G\frac{M_T}{R_T^2} \qquad g_p = G\frac{M_p}{R_p^2}$$

Comparando

$$\frac{g_p}{g_T} = \frac{G\frac{M_p}{R_p^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{R_T^2 \cdot M_p}{R_p^2 \cdot M_T}$$

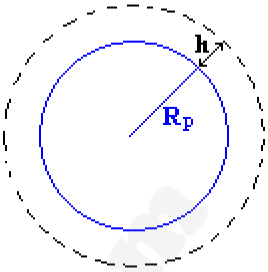
$$M = V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Teniendo en cuenta que $\rho_T = \rho_p = \rho$

$$\frac{g_p}{g_T} = \frac{R_T^2 \cdot \frac{4}{3}\pi R_p^3 \cdot \rho}{R_p^2 \cdot \frac{4}{3}\pi R_T^3 \cdot \rho} \quad \text{Simplificando} \quad \frac{g_p}{g_T} = \frac{R_p}{R_T}$$

$$R_p = \frac{1}{2} R_T \qquad \frac{g_p}{g_T} = \frac{\frac{1}{2} R_T}{R_T} \qquad \frac{g_p}{g_T} = \frac{1}{2} \qquad g_p = \frac{1}{2} g_T = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 = 4{,}9 \, m/s^2$$

b. Utilizando la 3ª ley de Kepler:



$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_p} \cdot R^3$$

Donde $R = R_p + h$ y el producto $G \cdot M_p$ lo obtenemos de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.

$$g_p = G \frac{M_p}{R_p^2} \Rightarrow G \cdot M_p = g_p \cdot R_p^2$$

Sustituyendo:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g_p \cdot R_p^2} \cdot R^3 = \frac{4\pi^2}{g_p \cdot R_p^2} \cdot (R_p + h)^3 \qquad T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{g_p \cdot R_p^2} \cdot (R_p + h)^3}$$

Sustituyendo por los datos del enunciado:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{4'9 \cdot \left(\frac{6371\times10^3}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{6371\times10^3}{2} + 400\times10^3\right)^3} = 6049'6\,s \approx 100\,min$$

Septiembre 2007. Problema 1A.- Un satélite de masa 20 kg se coloca en órbita circular sobre el ecuador terrestre de modo que su radio se ajusta para que dé una vuelta a la Tierra cada 24 horas. Así se consigue que siempre se encuentre sobre e] mismo punto respecto a la Tierra (satélite geoestacionario).

a) ¿Cuál debe ser el radio de su órbita?
b) ¿Cuánta energía es necesaria para situarlo en dicha órbita?

Datos: *Constante de Gravitación Universal* $G = 6{,}67\times10^{-11}\ N\,m^2\,kg^{-2}$
Masa de la Tierra $M_T = 5{,}96\times10^{24}$ kg
Radio de la Tierra $R_T = 6371$ Km

Solución.

a. Si un satélite describe una órbita geoestacionaria alrededor de la Tierra, el periodo del satélite será de 24 horas, y el radio de la órbita se puede calcular teniendo en cuenta este dato.

$$F_G = F_c$$

$$G\frac{M\,m}{R^2} = m\,a_n \;:\; G\frac{M\,m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \;:\; v^2 = G\frac{M}{R}$$

Teniendo en cuenta que $\left.\begin{array}{l} v = \omega R \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \end{array}\right\} : v = \frac{2\pi}{T} R$

$$\left(\frac{2\pi}{T} R\right)^2 = G\frac{M}{R} \;:\; \frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{M}{R^3} \;:\; R = \sqrt[3]{G\frac{MT^2}{4\pi^2}}$$

$$R = \sqrt[3]{6{,}67\times10^{-11} \cdot \frac{5{,}98\times10^{24} \cdot (24\cdot3600)^2}{4\pi^2}} = 4{,}23\times10^7\ m$$

b. La energía necesaria para ponerle en órbita un satélite, es la diferencia entre la energía mecánica que tiene el satélite en la órbita y la que tiene en la superficie terrestre.

$$\Delta E = E_m(\text{órbita}) + E_m(\text{superficie})$$

$$E_m(\text{órbita}) = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right)$$

La velocidad del satélite en la órbita se puede expresar en función de la masa de la Tierra y el radio de la tierra.

$$F_c = F_g \qquad m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \qquad v^2 = G\frac{M}{R}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía:

$$E_m(\text{órbita}) = \frac{1}{2}m\cdot G\frac{M}{R} + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R}$$

$$E_m(\text{sup erficie}) = -G\frac{Mm}{R_T}$$

En la superficie terrestre, el satélite solo tiene energía potencial.

Sustituyendo en el incremento de energía:

$$\Delta E = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R} - \left(-G\frac{Mm}{R_T}\right) = GMm\cdot\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R}\right)$$

$$\Delta E = 6{,}67\times10^{-11}\cdot 5{,}98\times10^{24}\cdot 20\cdot\left(\frac{1}{6371\times10^3} - \frac{1}{2\cdot 4{,}23\times10^7}\right) = 1{,}16\times10^9\,\text{J}$$

Junio 2007. Cuestión 1.- Sabiendo que la aceleración de la gravedad en un movimiento de caída libre en la superficie de la Luna es un sexto de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y que el radio de la Luna es aproximadamente 0,27 R_T (siendo R_T el radio terrestre), calcule:

a) la relación entre las densidades medias ρ_{Luna} / ρ_{Tierra}

b) la relación entre las velocidades de escape de un objeto desde sus respectivas superficies $(v_e)_{Luna}$ / $(v_e)_{Tierra}$.

Solución.

a. Este apartado se resuelve comparando la intensidad de campo gravitatorio (g) en la superficie de la Tierra y en la superficie lunar.

La aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta se puede expresar en función de la masa y el radio del planeta, igualando el peso en la superficie con la fuerza gravitacional.

$$P = F_G \;;\quad m\cdot g = G\frac{M\cdot m}{R^2} \;;\quad g = G\frac{M}{R^2}$$

Para la superficie terrestre: $g_T = G\dfrac{M_T}{R_T^2}$

Para la superficie lunar: $g_L = G\dfrac{M_L}{R_L^2}$

$$g_L = \frac{1}{6}g_T \qquad \frac{g_L}{g_T} = \frac{1}{6} \qquad \frac{G\frac{M_L}{R_L^2}}{G\frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{1}{6} \qquad \frac{M_L R_T^2}{M_T R_L^2} = \frac{1}{6}$$

Las masa de la tierra y de la luna se expresar en función de sus densidades

$$\frac{\rho_L V_L R_T^2}{\rho_T V_T R_L^2} = \frac{1}{6} \qquad \frac{\rho_L \frac{4}{3}\pi R_L^3 R_T^2}{\rho_T \frac{4}{3}\pi R_T^3 R_L^2} = \frac{1}{6} \qquad \frac{\rho_L R_L}{\rho_T R_T} = \frac{1}{6} \qquad \frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{R_T}{6R_L}$$

$$\frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{R_T}{6\cdot 0{,}27R_T} \qquad \frac{\rho_L}{\rho_T} = 0{,}62$$

b. La velocidad de escape de un planeta se calcula por el principio de conservación de la energía, la energía mecánica en la superficie del planeta (suma de cinética y potencial) debe ser igual a la que tendrá cuando escape del campo gravitatorio, que será nula debido a que suponemos que llega con velocidad nula ($E_c = 0$) y que esta a una distancia infinita ($E_p = 0$).

$$\frac{1}{2} m\, v^2 - G\frac{M\, m}{R_T} = 0$$

Simplificando las masas se despeja v.

$$\frac{1}{2} v^2 = G\frac{M}{R_T} \quad : \quad v = \sqrt{2G\frac{M}{R_T}}$$

$$\left.\begin{aligned} (v_e)_{Luna} &= \sqrt{2G\frac{M_L}{R_L}} \\ (v_e)_{Tierra} &= \sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}} \end{aligned}\right\} : \frac{(v_e)_{Luna}}{(v_e)_{Tierra}} = \frac{\sqrt{2G\frac{M_L}{R_L}}}{\sqrt{2G\frac{M_T}{R_T}}} = \sqrt{\frac{M_L R_T}{M_T R_L}}$$

$$\frac{(v_e)_{Luna}}{(v_e)_{Tierra}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi R_L^3 \cdot \rho_L R_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3 \cdot \rho_T R_L}} = \sqrt{\frac{R_L^2}{R_T^2}\cdot\frac{\rho_L}{\rho_T}} = \sqrt{\frac{(0{,}27\cdot R_T)^2}{R_T^2}\cdot 0{,}62} = 0{,}27\cdot\sqrt{0{,}62} = 0{,}21$$

Junio 2007. Problema 1B.- Fobos es un satélite de Marte que gira en una órbita circular de 9380 km de radio, respecto al centro del planeta, con un periodo de revolución dé 7,65 horas. Otro satélite de Marte, Deimos, gira en una órbita de 23460 km de radio. Determine:

- **a)** La masa de Marte.
- **b)** El período de revolución del satélite Deimos.
- **e)** La energía mecánica del satélite Deimos.
- **d)** El módulo del momento angular de Deimos respecto al centro de Marte.

Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 Kg^{-2}
Masa de Fobos = $1{,}1\times10^{16}$ Kg; *Masa de Deimos* = $2{,}4\times10^{15}$ Kg

Solución.

a. Para calcular la masa de Marte (M) se tiene en cuenta que si Fobos realiza una órbita circular alrededor de Marte, la suma de fuerzas que actúan sobre Fobos será igual a la fuerza centrípeta que actúa sobre él.

$$F_g = F_c \qquad G\frac{M\cdot m_f}{R^2} = m_f\frac{v^2}{R} \qquad G\frac{M}{R} = v^2 \qquad M = \frac{v^2\cdot R}{G} = \frac{(\omega\cdot R)^2\cdot R}{G} = \frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R^3}{G}$$

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{G\cdot T^2} = \frac{4\pi^2\cdot\left(9{,}38\times10^6\right)^3}{6{,}67\times10^{-11}\cdot(7{,}62\cdot 3600)^2} = 6{,}49\times10^{23}\text{Kg}$$

b. El periodo de Deimos se puede calcular aplicando la 3ª ley de Kepler.

$$\frac{T^2}{R^3} = cte \Rightarrow \frac{T_D^2}{R_D^3} = \frac{T_f^2}{R_f^3}$$

$$T_D = T_f\cdot\sqrt{\frac{R_D^3}{R_f^3}} = 7{,}62\cdot\sqrt{\frac{\left(23{,}46\times10^6\right)^3}{\left(9{,}38\times10^6\right)^3}} = 30{,}14\text{ h} = 1\text{ d } 6\text{ h } 8\text{ min}$$

c. $$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_D v^2 + \left(-G\frac{M\, m_D}{R_D}\right) = \left\{v^2 = G\frac{M}{R_D}\right\} = -\frac{1}{2} G\frac{M\, m_D}{R_D}$$

$$E_m = -\frac{1}{2}\cdot 6{,}67\times10^{-11}\frac{6{,}49\times10^{23}\cdot 2{,}4\times10^{15}}{23{,}46\times10^6} = -2{,}2\times10^{21}\text{J}$$

d. $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ En módulo $L = r \cdot mv \cdot \text{sen}\,\alpha$

Aplicando a Deimos:

$$L_D = r_D \cdot m_D v_D \cdot \text{sen}\,\alpha \qquad r_D \perp v_D \Rightarrow \alpha = 90 \;;\; \text{sen}\,\alpha = 1$$

$$L_D = r_D \cdot m_D v_D = r_D \cdot m_D \cdot \omega_D \cdot r_D = r_D^2 \cdot m_D \cdot \frac{2\pi}{T_D}$$

$$L_D = \left(23{,}46\times10^6\right)^2 \cdot 2{,}4\times10^{15} \cdot \frac{2\pi}{30{,}14 \cdot 3600} = 7{,}65\times10^{25}\,\text{N m}$$

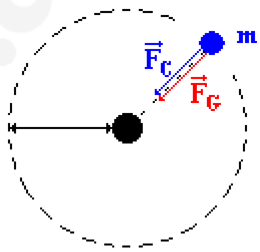
Modelo 2007. Cuestión 1.- Un objeto de 5 kg de masa posee una energía potencial gravitatoria $Ep = -2\times10^8\,\text{J}$ cuando se encuentra a cierta distancia de la Tierra.

a) Si el objeto a esta distancia estuviera describiendo una órbita circulas. ¿cuál sería su velocidad?

b) Si la velocidad del objeto a esa distancia fuese de 9 km/s, ¿cuál sería su energía mecánica? ¿Podría el objeto estar describiendo una órbita elíptica es este caso?

Solución.

a) Sobre un objeto que describe una órbita circular la única fuerza que a actúa sobre él es la fuerza de atracción gravitatoria, es una fuerza centrípeta dirigida hacia el centro de la tierra.



$$F_g = F_c$$

$$G\frac{M_T \cdot m}{d^2} = m\frac{v^2}{d} \quad \text{despejando} \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{d}}$$

Por otro lado, la energía potencial gravitatoria es:

$$E_p = -G\frac{M_T \cdot m}{d} = -2\times10^8\,\text{J} \Rightarrow G\frac{M_T}{d} = \frac{2\times10^8\,\text{J}}{m(\text{kg})}$$

Sustituyendo en la expresión de la velocidad:

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{d}} = \sqrt{\frac{2\times10^8\,\text{J}}{m(\text{kg})}} = \sqrt{\frac{2\times10^8\,\text{J}}{5\,\text{kg}}} \approx 6324\,{}^{m}\!/_{s} \approx 6'3\,{}^{Km}\!/_{s}$$

b) La energía mecánica es la suma de la energía potencial y de la energía cinética.

$$E_m = E_p + E_c = E_p + \frac{1}{2}mv^2 = -2\times10^8 + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot(9000)^2 = 2'5\times10^6\,\text{J}$$

Si la energía mecánica es mayor que cero, el objeto se escapa del campo gravitatorio, y por tanto no describe ningún tipo de órbita.

Nota

El criterio que se debe seguir para evaluar el tipo de órbita es el siguiente:

- Si $E_M > 0$, el objeto se escapa del campo gravitatorio, llegando al infinito con velocidad, seguirá una trayectoria hiperbólica.
- Si $E_M = 0$, el objeto se escapa del campo gravitatorio, llegando al infinito sin velocidad (caso teórico, el tiempo que tardaría seria infinito), seguirá una trayectoria parabólica
- Si la $E_M < 0$, el objeto queda atrapado en el campo gravitatorio. En este caso se pueden dar tres situaciones diferentes:
  - $\frac{1}{2}|E_p| < E_c < |E_p|$ El objeto describe una órbita elíptica, aumentando la excentricidad de la elipse a medida que aumente la velocidad (energía cinética).
  - $\frac{1}{2}|E_p| = E_c$ El objeto describe una órbita circular.
  - $\frac{1}{2}|E_p| > E_c$ El objeto no describe ningún tipo de órbita y acaba colapsando contra el planeta.

Septiembre 2006. Cuestión 1.-

a) Desde la superficie de la Tierra lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad v. Si se desprecia el rozamiento, calcule el valor de v necesario para que el objeto alcance una altura igual al radio de la Tierra.

b) Si se lanza el objeto desde la superficie de la Tierra con una velocidad doble a la calculada en el apartado anterior, ¿escapará o no del campo gravitatorio terrestre?

Datos: Masa de la Tierra $M_T = 5,98\ x10^{24}$ kg Radio de la Tierra $R_T = 6370$ kg
Constante de Gravitación $G = 6,67x10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$

Solución.

a. Igualamos las energías mecánicas en la superficie de la Tierra y en la orbita con $r = 2R_T$

$$E_m(\text{Superficie}) = E_m(\text{Órbita})$$

$$-G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T} + \frac{1}{2} mv^2 = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{2R_T}$$

Simplificando la masa m en toda la ecuación, se despeja la velocidad

$$\frac{1}{2} v^2 = G \cdot M_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_T} \right)$$

$$v^2 = 2G \cdot M_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2R_T} \right) \qquad v = \sqrt{2GM_T \left(\frac{1}{2R_T} \right)} \qquad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T}}$$

Sustituyendo datos numéricos:

$$v = \sqrt{\frac{6'67 \times 10^{-11} \cdot 5'98 \times 10^{24}}{6'37 \times 10^6}} = 7913'1\ ^{m}\!/_{s}$$

b. Si escapa del campo gravitatorio, la energía mecánica final será la que tenga en el infinito (punto donde la tierra no ejerce influencia), que es igual a cero. Procediendo como en el apartado a

$$E_m(\text{Superficie}) = E_m(\text{Infinito})$$

$$-G \cdot \frac{M \cdot m}{R_T} + \frac{1}{2} mv^2 = 0$$

Dividiendo toda la ecuación `por la nasa del objeto:

$$-G \cdot \frac{M}{R_T} + \frac{1}{2} v^2 = 0$$

Para saber si el objeto escapa de la tierra, se calcula con la igualdad anterior la velocidad de escape de la tierra.

$$-G \cdot \frac{M}{R_T} + \frac{1}{2} v_{esc}^2 \geq 0 \qquad v_{esc} \geq \sqrt{2G \cdot \frac{M}{R_T}} = \sqrt{2 \cdot 6'67 \times 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \times 10^{24}}{6,37 \times 10^6}} = 11190\ ^{m}\!/_{s}$$

$$v_{objeto} = 2 \cdot 7913,1 = 15826,2 > v_{esc}$$

Como la velocidad del objeto es superior a la de escape, el objeto **se escapa** del campo gravitatorio

Junio 2006. Cuestión 1.- Llamando g_o y V_o a la intensidad de campo gravitatorio y al potencial gravitatorio en la superficie terrestre respectivamente, determine en función del radio de la Tierra:

a) La altura sobre la superficie terrestre a la cual la intensidad de campo gravitatorio es $g_o/2$.

b) La altura sobre la superficie terrestre a la cual el potencial gravitatorio es $V_o/2$.

Solución.

El campo gravitatorio y el potencial gravitatorio a una distancia R del centro de la Tierra son, respectivamente y en valor absoluto:

$$g = G\frac{M_T}{R^2} \qquad V = G\frac{M_T}{R}$$

donde G = constante de gravitación y M_T = masa de la tierra.

Por tanto en la superficie terrestre, donde la distancia al centro es el radio de la Tierra R_T.

$$g_o = G\frac{M_T}{R_T^2} \qquad V_o = G\frac{M_T}{R_T}$$

a. Se busca la distancia R a la que se cumple:

$$g = \frac{g_o}{2}$$

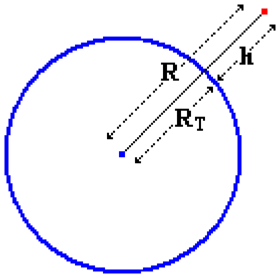
Sustituyendo por sus respectivas expresiones.

$$G\frac{M_T}{R_2} = \frac{1}{2}G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Despejando R:

$$R^2 = 2R_T^2 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{2}R_T$$

Para calcular la altura (h) sobre la superficie se tiene en cuenta:



$$h = R - R_T$$

Como se ve en la figura.

$$h = \sqrt{2}R - R = \left(\sqrt{2} - 1\right)R_T = 0{,}41R_T$$

b. Se busca la distancia R al centro de la tierra a la que se cumple:

$$V = \frac{V_o}{2}$$

Sustituyendo por sus respectivas expresiones.

$$G\frac{M_T}{R} = \frac{1}{2}G\frac{M_T}{R_T}$$

Despejando R:

$$R = 2R_T.$$

Si h es la altura sobre la superficie, al igual que en el apartado anterior se tiene que:

$$h = R - R_T = 2R_T - R_T$$

$$h = R_T$$

Junio 2006. Problema 1A.- Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. En esta órbita la energía mecánica del satélite es -4,5 x 10^9 J y su velocidad es 7610 m s^{-1} Calcule:

a) El módulo del momento lineal del satélite y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.

b) El periodo de la órbita y la altura a la que se encuentra el satélite.

Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\ m^2 kg^{-2}$

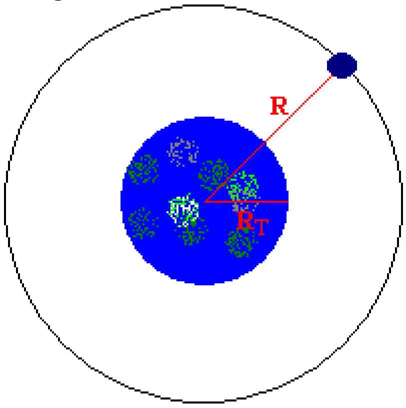
Masa de la Tierra $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$

Radio de la Tierra $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}\ m$

Solución.

Para resolver los apartados a) y b) es necesario conocer la masa del satélite y el radio de su órbita.

El radio se calcula teniendo en cuenta que en una órbita circula la fuerza centrífuga es igual a la fuerza gravitatoria.



$$F_c = F_g \Rightarrow m\frac{v^2}{R} = G\frac{M_T m}{R_2}$$

Igualdad de la que se despeja el radio de la órbita.

$$R = \frac{GM_T}{v^2} \qquad R = 6890 \text{ Km}$$

La energía mecánica en una órbita circular coincide con la mitad de la energía potencial.

$$E_m = \frac{1}{2}Ep = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R}$$

donde m es la masa del satélite.

$$m = -\frac{2 \cdot R \cdot E_m}{G \cdot M_T} \qquad m = 155\text{kg}$$

a. El modulo del momento lineal es:

$$p = m \cdot v = 155\,\text{kg} \cdot 7610\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1'180 \times 10^6\,\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El módulo del momento angular es:

$$L = m \cdot v \cdot R = 155\,\text{kg} \cdot 7610\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6'89 \times 10^6\,\text{m} = 8{,}13 \times 10^{12}\,\text{kg m}^2\text{s}^{-1}$$

b. Conociendo la velocidad y el radio de la orbita el periodo se calcula a partir de:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot 6'89 \times 10^6\,\text{m}}{7610\,\text{m s}^{-1}} = 5689\,\text{s}$$

La altura sobre la superficie es la diferencia entre el radio de la tierra y el de la órbita:

$$h = R - R_T = 6890 - 6370 = 520\,\text{Km}$$

Modelo 2006. Cuestión 1.-

a) Enuncie las tres leyes de Kepler sobre el movimiento planetario.

b) Si el radio de la órbita de la Tierra es $1{,}50 \times 10^{11}$ m y el de Urano $2{,}87 \times 10^{12}$ m calcule el periodo orbital de Urano.

Solución.

a. Las tres leyes de Kepler son.

1. Los planetas describen orbitas elípticas con el sol situado en un foco
2. La velocidad areolar (el área que barre el vector de posición del planeta por unidad de tiempo) es constante.
3. Los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al sol.

b.

$$R_T = 1{,}50 \times 10^{11}\,\text{m}$$
$$R_u = 2{,}87 \times 10^{12}\,\text{m}$$

De acuerdo con la tercera ley de Kepler $T^2 = CR^3$ donde C es una constante que podemos calcular con los datos del radio de la orbita terrestre y de su periodo orbital que es un año.

$$T_T^2 = CR_T^3 \Rightarrow C = \frac{T_T^2}{R_T^3}$$

Como Urano cumple la misma relación

$$T_u^2 = CR_u^3 = \frac{T_T^2}{R_T^3} R_u^3 \Rightarrow T_u^2 = \frac{R_u^3}{R_T^3} T_T^2$$

$$T_u = \sqrt{\frac{R_u^3}{R_T^3}} T_T = \sqrt{\frac{\left(2{,}87 \times 10^{12}\, m\right)^3}{\left(1{,}50 \times 10^{11}\, m\right)}} \times 1 \text{año} = 83{,}7 \text{años}$$

Modelo 2006. Problema 1A.- Se lanza una nave de masa m = 5×10^3 kg desde la superficie de un planeta de radio $R_l = 6\times10^3$ km y masa $M_1 = 4\times10^{24}$ kg, con velocidad inicial $v_0 = 2\times10^{24}$ en dirección hacia otro planeta del mismo radio $R_2 = R_l$ y masa $M_2 = 2\, M_1$, siguiendo la línea recta que une los centros de ambos planetas. Si la distancia entre dichos centros es D = $4{,}83\times l0^{10}$ m, determine:

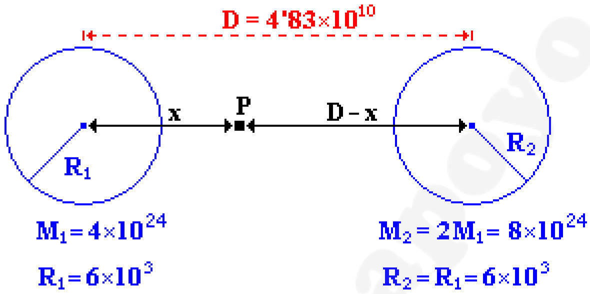
a) La posición del punto P en el que la fuerza neta sobre la nave es cero.

b) La energía cinética con la que llegará la nave a la superficie del segundo planeta.

Datos: Constante de Gravitación Universal G = 6, 67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}

Solución.

a.



Llamemos x a la distancia entre el planeta 1 y el punto P de manera que el módulo de la fuerza que sufre el satélite por la acción de la gravedad de cada planeta es:

$$F_1 = G\frac{M_1 m}{x^2} \qquad F_2 = G\frac{M_2 m}{(D-x)^2}$$

Si ambas se igualan:

$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow \quad G\frac{M_1 m}{x^2} = G\frac{M_2 m}{(D-X)^2}$$

Teniendo en cuenta que $M_2 = 2M_1$, y simplificando la igualdad se obtiene una ecuación de 2º grado.

$$\frac{M_1}{x^2} = \frac{2M_1}{(D-X)^2} \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = (D-x)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2Dx - D^2 = 0$$

$$x = \frac{-2D \pm \sqrt{4D^2 + 4D^2}}{2} = -D \pm \sqrt{2}D : \begin{cases} x = \left(\sqrt{2} - 1\right)D \\ x = \left(-1 - \sqrt{2}\right)D \end{cases}$$

Como es una distancia solo sirve la solución positiva

$$x = D\left(\sqrt{2} - 1\right) = 4{,}83 \times 10^{10}\, m \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = 2 \times 10^{10}\, m$$

b. Si olvidamos la energía potencial que tiene el objeto en un planeta debido a la atracción de otro planeta la energía inicial de la nave será:

$$E_i = Ec_i + Ep_i = \frac{1}{2} m v_0^2 - G\frac{M_1 m}{R_1}$$

Y la energía final

$$E_f = Ec_f + Ep_f = Ec_f - G\frac{M_2 m}{R_2} = \begin{Bmatrix} M_2 = 2M_1 \\ R_2 = R_1 \end{Bmatrix} = Ec_f - G\frac{2M_1 m}{R_1}$$

Como la energía se conserva

$$E_i = E_f \Rightarrow Ec_i - G\frac{M_1 m}{R_1} = Ec_f - G\frac{2M_1 m}{R_1}$$

Despejando la energía cinética final

$$Ec_f = Ec_i + G\frac{2M_1 m}{R_1} - G\frac{M_1 m}{R_1}$$

$$Ec_f = Ec_i + G\frac{M_1 m}{R_1}$$

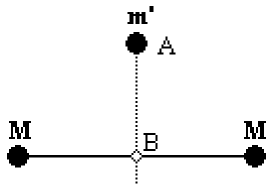
$$Ec_f = \frac{5000kg\times\left(2\times10^{24}\right)^2 \ m/s}{2} + 6{,}67\times10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}\,\frac{4\times10^{24}\,kg\times5000kg}{6\times10^3\,m} = 1\times10^{52}\,J + 2{,}2\times10^{14}\,J$$

$$Ec_f = 10^{52}\,J$$

Datos: Constante de Gravitación Universal G = 6, 67 x 10^{-11} N m^2 kg^{-2}

El problema es absurdo por que no hay ningún objeto que pueda alcanzar la velocidad inicial propuesta.

Septiembre 2005. Cuestión 2.- Dos masas iguales, M = 20 kg, ocupan posiciones fijas separadas una distancia de 2 m, según indica la figura. Una tercera masa, m´=0,2 kg, se suelta desde el reposo en un punto *A* equidistante de las dos masas anteriores y a una distancia de 1 m de la línea que las une (AB=l m). Si no actúan más que las acciones gravitatorias entre estas masas, determine:



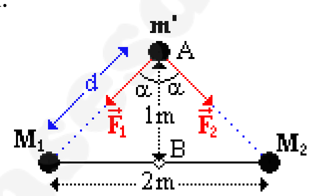
a) La fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la masa m' en la posición A.

b) Las aceleraciones de la masa m' en las posiciones *A* y *B*.

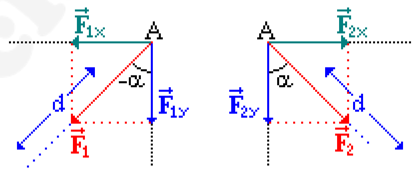
Dato: Constante de Gravitación Universal $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

Solución.

a. La expresión de la fuerza gravitatoria es $F = G\frac{M\cdot M'}{d^2}$, y la dirección es la que une las masas según muestra el esquema de la figura.



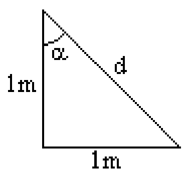
Las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ se descomponen en sus componentes vertical y horizontal.



$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{1y} : \begin{cases} \left|\vec{F}_{1x}\right| = \left|\vec{F}_1\right|\cdot \operatorname{sen}(-\alpha) \\ \left|\vec{F}_{1y}\right| = \left|\vec{F}_1\right|\cdot \cos(-\alpha) \end{cases}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{2y} : \begin{cases} \left|\vec{F}_{2x}\right| = \left|\vec{F}_2\right|\cdot \operatorname{sen}\alpha \\ \left|\vec{F}_{2y}\right| = \left|\vec{F}_2\right|\cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Por otra parte $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = G\frac{M\cdot m}{d^2}$, por lo tanto hay que calcular d y α.



d se halla por el teorema de Pitágoras

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}m$$

α se halla teniendo en cuenta que es un triángulo isósceles rectángulo

$$\alpha = 45º$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{1y} = \left|\vec{F}_{1x}\right|\vec{i} + \left|\vec{F}_{1y}\right|\vec{j} = G\frac{M_1 \cdot m'}{d^2}\cdot \operatorname{sen}(-\alpha)\,\vec{i} + G\frac{M_1 \cdot m'}{d^2}\cdot \cos(-\alpha)\,\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{2y} = \left|\vec{F}_{2x}\right|\vec{i} + \left|\vec{F}_{2y}\right|\vec{j} = G\frac{M_2 \cdot m'}{d^2}\cdot \operatorname{sen}\alpha\,\vec{i} + G\frac{M_1 \cdot m'}{d^2}\cdot \cos\alpha\,\vec{j}$$

Sustituyendo por los valores:

$$\vec{F}_1 = 6'67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}\,\frac{20\,\mathrm{kg}\cdot 0'2\,\mathrm{kg}}{\sqrt{2}^2\,\mathrm{m}^2}\cdot\left(\operatorname{sen}(-45)\,\vec{i} + \cos(-45)\,\vec{j}\right) = 1'33\cdot 10^{-10}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_2 = 6'67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}\,\frac{20\,\mathrm{kg}\cdot 0'2\,\mathrm{kg}}{\sqrt{2}^2\,\mathrm{m}^2}\cdot\left(\operatorname{sen}45\,\vec{i} + \cos 45\,\vec{j}\right) = 1'33\cdot 10^{-10}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

La fuerza gravitatoria total ejercida ejercidas por las masas M sobre la masa m' es la suma vectorial de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

$$\vec{F}_1 = 1'33\cdot 10^{-10}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)\mathrm{N}$$

$$\vec{F}_2 = 1'33\cdot 10^{-10}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)\mathrm{N}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 1'33\cdot 10^{-10}\left(0\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j}\right)\mathrm{N}$$

operando para simplificar

$$\vec{F} = 1'89\cdot 10^{-10}\,\vec{j}\,\mathrm{N}$$

b. Si se aplica la ecuación de Newton en el punto A se obtiene la aceleración a la que se ve sometida la masa m' en dicho punto.

$$\vec{F} = m\cdot\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1'89\cdot 10^{-10}\,\vec{j}\,\mathrm{N}}{0'2\,\mathrm{kg}} = 9'43\cdot 10^{-10}\,\vec{j}\,\mathrm{m/s^2}$$

En el punto B, las fuerzas no tienen componente $\vec{j}$ por lo que la fuerza resultante es nula y por tanto la aceleración en A también es nula.

Septiembre 2005. Problema 1A. Desde la superficie terrestre se lanza un satélite de 400 kg de masa hasta situarlo en una órbita circular a una distancia del centro de la Tierra igual a las 7/6 partes del radio terrestre. Calcule:

- **a)** La intensidad de campo gravitatorio terrestre en los puntos de la órbita del satélite.
- **b)** La velocidad y el periodo que tendrá el satélite en la órbita.
- **c)** La energía mecánica del satélite en la órbita
- **d)** La variación de la energía potencial que ha experimentado el satélite al elevarlo desde la superficie de la Tierra hasta situarlo en su órbita.

Datos: Constante de Gravitación Universal G = 6'67×10^{-11} Nm^2 kg^{-2}

Masa de la Tierra M_T = 5,98×10^{24} kg

Radio de la Tierra R_T = 6,37×10^6 m

Solución.

a. La expresión del campo gravitatorio es:

$$\vec{g} = G\cdot\frac{M}{R^2}\vec{U}_R$$

Donde $\vec{U}_R$ es el vector unitario en la dirección del radio. La intensidad será el modulo de $\vec{g}$.

$$\left|\vec{g}\right| = g = G\cdot\frac{M}{R^2}$$

Teniendo en cuenta que el radio de la órbita es 7/6 del radio terrestre:

$$g = G\cdot\frac{M}{\left(\frac{7}{6}R_T\right)^2} = \frac{36}{49}\cdot G\frac{M_T}{R_T^2} = \frac{36}{49}\cdot g = 7'2\ \mathrm{N/kg}$$

b. En una órbita circular la fuerza centrífuga compensa a la gravitatoria.

$$F_c = F_g \quad\Rightarrow\quad m\frac{v^2}{R} = G\frac{M_T\cdot m}{R^2}$$

Despejando la velocidad:

$$v = \sqrt{G\frac{M}{R}}$$

Teniendo en cuenta que el radio de la órbita es 7/6 del radio terrestre:

$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{\frac{7}{6}R_T}} = \sqrt{6'67\times10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}\,\frac{5'98\times10^{24}\,\mathrm{kg}}{\frac{7}{6}\cdot 6'37\times10^{6}\,\mathrm{m}}} = 7326\ \mathrm{m/s}$$

Por ser un movimiento circular uniforme:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ v &= \omega\cdot R \end{aligned}\right\} : T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi\,\frac{7}{6}\cdot R_T}{v} = \frac{2\pi\cdot\frac{7}{6}\cdot 6'37\times10^{6}\,\mathrm{m}}{7326\ \mathrm{m/s}} = 6374\ \mathrm{s}$$

c. La energía mecánica es la suma de la cinética y la potencial.

$$E_m = E_c + E_p$$

Energía cinética:

$$\left.\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}mv^2 \\ v &= \sqrt{G\frac{M_T}{R}} \end{aligned}\right\} : E_c = \frac{1}{2}m\cdot\sqrt{G\frac{M_T}{R}}^{\,2} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R}$$

Energía potencial

$$E_p = -G\frac{M_T m}{R}$$

Sumando los dos términos se obtiene la energía mecánica del satélite en la órbita.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R} + \left(-\frac{M_T m}{R}\right) = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{\frac{7}{6}R_T}$$

sustituyendo valores

$$E_m = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{\frac{7}{6}R_T} = -\frac{1}{2}6'67\times10^{-11}\mathrm{Mm^2kg^{-2}}\,\frac{5'98\times10^{24}\,\mathrm{kg}\cdot 400\,\mathrm{kg}}{\frac{7}{6}\cdot 6'37\times10^{6}\,\mathrm{m}} = -1'07\times10^{10}\ \mathrm{J}$$

d. La variación de energía potencial es:

$$\Delta E_p = E_p(i) - E_p(f)$$

$$\left.\begin{aligned} E_p(i) &= G\frac{M_T m}{R_T} \\ E_p(f) &= G\frac{M_T m}{R} \end{aligned}\right\} : \Delta E_p = G\frac{M_T m}{R_T} - G\frac{M_T m}{R} = GM_T m\cdot\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R}\right) = GM_T m\cdot\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{\frac{7}{6}R_T}\right)$$

sustituyendo valores

$$\Delta E_p = 6'67\times10^{-11}\cdot 5'98\times10^{24}\cdot 400\cdot\left(\frac{1}{6'37\times10^{6}} - \frac{1}{\frac{7}{6}\cdot 6'37\times10^{6}}\right) = 3'6\times10^{9}\ \mathrm{J}$$

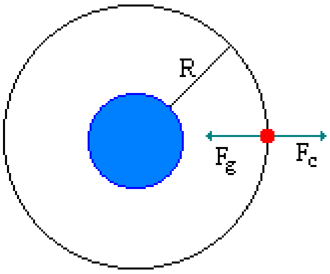
Junio 2005. Cuestión 2.-

a) Deduzca la expresión de la energía cinética de un satélite en órbita circular alrededor de un planeta en función del radio de la órbita y de las masas del satélite y del planeta.

b) Demuestre que la energía mecánica del satélite es la mitad de su energía potencial.

Solución.

a. Para deducir la E_c, primero se calcula la velocidad del satélite en la órbita, para ello se iguala la fuerza centrífuga con la gravitatoria



$$\left|\bar{F}_g\right| = \left|\bar{F}_c\right|$$

$$G\cdot\frac{M\cdot m}{R^2} = m\cdot\frac{v^2}{R} \quad\Rightarrow\quad v^2 = G\cdot\frac{M}{R}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\cdot v^2 = \frac{1}{2}m\cdot G\frac{M}{R} = \frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{R}$$

b. Para calcular la energía mecánica se suman la cinética y la potencial.

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{R} - G\frac{M\cdot m}{R} = -\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{R} = \frac{1}{2}\left(-G\frac{M\cdot m}{R}\right) = \frac{1}{2}E_p$$

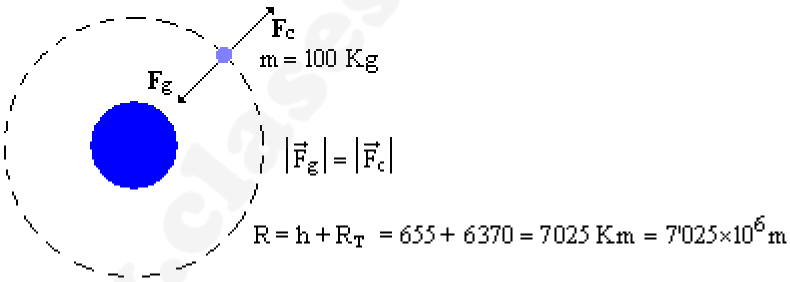
Junio 2005. Problema 1A.- Un satélite artificial de la Tierra de 100 kg de masa describe una órbita circular a una altura de 655 Km. Calcule:

a) El periodo de la órbita.
b) La energía mecánica del satélite.
c) El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.
d) El cociente entre los valores de la intensidad de campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra.

Datos: Masa de la Tierra $M_T = 5'98\times10^{-24}$ *kg*
Radio de la Tierra $R_T = 6'37\times10^{6}$ *m*
Constante de Gravitación Universal $G = 6.67\times10^{-11}$ *N m*^{2} *kg*$^{-2}$

Solución.

a.



Al ser una órbita circular: $\left|\bar{F}_g\right| = \left|\bar{F}_c\right|$

$$G\cdot\frac{M\cdot m}{R^2} = m\cdot\frac{v^2}{R} \quad\Rightarrow\quad v^2 = G\cdot\frac{M}{R}$$

Por otra parte en un movimiento circular se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\pi}{\omega} \\ v = \omega\cdot R \end{array}\right\} : T = \frac{2\pi\cdot R}{v}$$

sustituyendo la velocidad:

$$T = \frac{2\pi\cdot R}{\sqrt{\dfrac{G\cdot M}{R}}} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{R^3}{G\cdot M}} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\left(7'025\times10^6\,m\right)^3}{6'67\times10^{-11}\,Nm^2Kg^{-2}\cdot5'98\times10^{24}\,Kg}} = 5857'8\,s$$

$$T = \frac{5857'8\,s}{3600\,{}^{s}/_{h}} = 1\,h\,37'\,82''$$

b. $$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{M\,m}{R}\right) = \left\{v^2 = G\frac{M}{R}\right\} = -\frac{1}{2}G\frac{M\,m}{R}$$

$$E_m = -\frac{1}{2}6'67\times10^{-11}\cdot\frac{5'98\times10^{24}\cdot100}{7'025\times10^{6}} = -2'8\times10^{9}\,J$$

c. $$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{R}\times\vec{p}\right|\ ;\ \ L = R\cdot p\cdot \text{sen}\,90^\circ = R\cdot mv = R\cdot m\sqrt{G\frac{M}{R}} = m\sqrt{G\cdot M\cdot R}$$

$$L = 100\cdot\sqrt{6'67\times10^{-11}\cdot 5'98\times10^{24}\cdot 7'025\times10^{6}} = 5'3\times10^{12}\,Kg\cdot m^2 s^{-1}$$

d. Igualando el peso con la fuerza gravitacional, se obtiene una expresión de la intensidad de campo gravitatorio en función de la masa del planeta y del radio (distancia al centro)

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

Aplicando esta expresión en la superficie de la tierra y en la orbita del satélite se puede obtener el cociente de las intensidades.

$$\left.\begin{aligned} g_T &= G\frac{M_T}{R_T^2} \\ g_{Sat} &= G\frac{M_T}{R_{Sat}^2}\end{aligned}\right\} : \frac{g_{Sat}}{g_T} = \frac{G\dfrac{M_T}{R_{Sat}^2}}{G\dfrac{M_T}{R_T^2}} \quad \text{Simplificando} \quad \frac{g_{Sat}}{g_T} = \left(\frac{R_T}{R_{Sa}}\right)^2 = \left(\frac{6'37\times10^6}{7'025\times10^6}\right)^2 = 0'82$$

Modelo 2005. Cuestión 1.- Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Un objeto de masa m_1 necesita una velocidad de escape de la Tierra el doble que la que necesita otro objeto de masa $m_2 = m_1/2$

b) Se precisa realizar más trabajo para colocar en una misma órbita un satélite de masa m_1 que otro satélite de masa $m_2 = m_1/2$, lanzados desde la superficie de la Tierra.

Solución.

a. **FALSO.** La velocidad de escape desde la superficie de la tierra se puede deducir sabiendo que la energía a una distancia infinita de la tierra es cero, y por tanto, si la energía que tiene un cuerpo en la superficie terrestre es:

$$E_{Sup} = -G\cdot\frac{M_T\cdot m_1}{R_T}\ \ \text{(Energia potencial gravitatoria)}$$

habrá que imprimirle una energía cinética de escape:

$$E_c(Esc) = \frac{1}{2}m_1\cdot v_{Esc}^2$$

de forma que.

$$E_{Sup} + E_c\,(Esc) = 0$$

sustituyendo las expresiones de ambas energías se despeja la velocidad de escape.

$$-G\cdot\frac{M_T\cdot m_1}{R_T} + \frac{1}{2}m_1\cdot v_{Esc}^2 = 0$$

$$v_{Esc} = \sqrt{2G\cdot\frac{M_T}{R_T}}$$

Expresión que pone de manifiesto que la velocidad de escape de un planeta no depende de la masa del cuerpo, por tanto la velocidad de escape será idéntica para ambos cuerpos.

b. **VERDADERO.** Si consideramos el campo gravitatorio como puramente conservativo:

$$W = -\Delta E_p = Ep_o - Ep_f$$

$$W = -G\cdot\frac{M_T\cdot m_1}{R_T} - \left(-G\cdot\frac{M_T\cdot m_1}{r}\right) \quad ;\quad W = G\cdot M_T\cdot m_1\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_T}\right)$$

$$\text{donde } r > R_T$$

Como vemos, este trabajando si que depende de la masa del cuerpo m_1, (además de ser negativo, lo que indica que el trabajo lo realizamos nosotros "en contra" del campo, gastamos energía)

Según se observa en la formula anterior, si $m_2 = \frac{m_1}{2}$

$$W = G{\cdot}M_T\cdot\frac{m_1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_T}\right)$$

Cuanto mayor es la masa del cuerpo, más trabajo tenemos que realizar, por tanto, el satélite de masa m_1 requiere efectuar mas trabajo que el de masa $m_2 = {}^{m_1}\!/_2$

Septiembre 2004. Cuestión 1. La luz solar tarda 8,31 minutos en llegar a la Tierra y 6,01 minutos en llegar a Venus. Suponiendo que las órbitas descritas por ambos planetas son circulares, determine:

a) el periodo orbital de Venus en torno al Sol sabiendo que el de la Tierra es de 365,25 días

b) la velocidad con que se desplaza Venus en su órbita.

Dato: Velocidad de la luz en el vacío $c = 3\text{x}10^8$ m/s

Solución.

a. El periodo T se define como:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \left\{\omega = \frac{v}{R}\right\} = \frac{2\pi}{v/R} \quad : \quad T = \frac{2\pi R}{v}$$

En el caso de orbitas circulares, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser igual a la fuerza centrípeta igualando la fuerza centrífuga a la gravitatoria se obtiene una expresión para la velocidad en la órbita:

$$F_g = F_c \qquad G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \qquad v^2 = G\frac{M}{R}$$

Operando con las dos expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{2\pi R}{v} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{v^2} \\ v^2 = G\frac{M}{R} \end{array}\right\} : T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{\frac{GM}{R}} = 4\pi^2\frac{R^3}{GM} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}R^3 \rightarrow \text{Ley de Keppler}$$

teniendo en cuenta que G y M(masa de Sol) son constantes, $\frac{T^2}{R^3} = cte$, y aplicando a las orbitas de la Tierra y de Venus

$$\frac{T_t^2}{T_v^2} = \frac{R_t^3}{R_v^3} \rightarrow T_v^2 = T_t^2\,\frac{R_v^3}{R_t^3}$$

Los radios de la Tierra y de Venus se calculan a partir del tiempo que tarda en llegar la luz a cada uno de los planetas en un M.R.U.

$$t_t = 8{,}31\ \min\cdot\frac{60\ \text{seg}}{1\min} = 498{,}6\ \text{seg}$$

$$t_v = 6.01\min\cdot\frac{60\,\text{seg}}{1\min} = 360{,}6\ \text{seg}$$

multiplicando por la velocidad de la luz tenemos la distancia de la tierra al sol y de Venus al Sol.

$$R_T = d_{T-S} = 498'6\ \text{seg}\cdot 3\times 10^8\ {}^{m}\!/_{s} = 1496\times 10^8\,m$$

$$R_V = d_{V-S} = 360'6\ \text{seg}\cdot 3\times 10^8\ {}^{m}\!/_{s} = 1082\text{x}10^8\,m$$

$$T_v = \sqrt{T_t^2 \frac{R_v^3}{R_t^3}} = \sqrt{(365'25\,\text{días})^2 \cdot \left(\frac{1'08\times10^{12}}{1'50\times10^{12}}\right)^3} = 223{,}15\,\text{días}$$

b. La velocidad orbital de Venus será:

$$T = \frac{2\pi R_v}{V} \to V = \frac{2\pi R_v}{T_v} = 2\pi\times\frac{1082\times10^8\,\text{m}}{223{,}15\times24\times3600\,\text{s}} = 35261\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

Septiembre 2004. Problema 1A. Un planeta esférico tiene 3200 km de radio y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6,2 m s^{-2}. Calcule:

a) La densidad media del planeta y la velocidad de escape desde su superficie.

b) La energía que hay que comunicar a un objeto de 50 kg de masa para lanzarlo desde la superficie del planeta y ponerlo en órbita circular alrededor del mismo, de forma que su periodo sea de 2 horas.

Datos: Constante de Gravitación Universal G = 6’67×10–11 N $m^2 kg^{-2}$

Solución.

a. Igualando el peso de los cuerpos en el planeta con la fuerza de atracción gravitacional:

$$m\cdot g = G\frac{M\cdot m}{R^2}$$

se obtiene una expresión de g en función de la masa y radio del planeta

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

La masa de un sólido se puede expresar en función del volumen y la densidad(ρ), y para sólidos esféricos, el volumen se puede expresar en función del radio.

$$\left.\begin{array}{l} M = V\cdot\rho \\ V = \frac{4}{3}\pi\cdot R^3 \end{array}\right\} : M = \frac{4}{3}\pi\cdot R^3\cdot\rho$$

sustituyendo en la expresión de g

$$g = G\frac{\frac{4}{3}\pi\cdot R^3\cdot\rho}{R^2} \quad : \quad g = \frac{4}{3}\pi\cdot G\cdot R\cdot\rho$$

expresión de la que se puede despejar la densidad del planeta en función del radio y gravedad del mismo.

$$\rho = \frac{3g}{4\pi\cdot R\cdot G} = \left\{\begin{array}{c} g = 6'2\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2} \\ R = 3200\,\text{Km} = 3'2\times10^6\,\text{m} \end{array}\right\} = \frac{3\cdot 6'2}{4\pi\cdot 3'2\times10^6\cdot 6'67\times10^{-11}} = 6934'7\ {}^{kg}\!/\!{}_{m^3}$$

La velocidad de escape del planeta se puede calcular por el principio de conservación de la energía, la energía mecánica en la superficie terrestre (suma de cinética y potencial) debe ser igual a la que tendrá cuando escape del campo gravitatorio, que será nula debido a que suponemos que llega con velocidad nula ($E_c = 0$) y que esta a una distancia infinita ($E_p = 0$).

$$\frac{1}{2}m\,v_e^2 - G\frac{M\,m}{R} = 0$$

Simplificando las masas se despeja v.

$$\frac{1}{2}v_e^2 = G\frac{M}{R} \ : \ v_e = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$$

Como se desconoce la masa del planeta, se puede resolver de dos formas diferentes, relacionando M con la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta y el radio, o calculando la masa del planeta con la densidad y el volumen.

Relacionando M con g y R: De la expresión $g = G\frac{M}{R^2}$, se despega el producto $G\cdot M = g\cdot R^2$, sustituyendo en la expresión de la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{2\frac{g \cdot R^2}{R}} = \sqrt{2g \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 6{,}2 \cdot 3{,}2\times10^6} = 6299{,}2\ ^{m}\!/_{s}$$

Calculando la masa con la densidad del planeta: $M = V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$$M = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(3{,}2\times10^6\right)^3 \cdot 6934{,}7 = 9{,}52\times10^{23}$$

Sustituyendo en la expresión de la velocidad de escape:

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 6{,}67\times10^{-11}\frac{9{,}52\times10^{23}}{3{,}2\times10^6}} = 6299{,}8\ ^{m}\!/_{s}$$

b. Por el principio de conservación de energía, la energía mecánica en la superficie es igual a la energía mecánica en la órbita.

$$E_m(\text{superficie}) = E_m(\text{órbita})$$

$$\left(E_c + E_p\right)_{\text{superficie}} = \left(E_c + E_p\right)_{\text{órbita}}$$

$$E_c(\text{superficie}) + \left(-G\frac{Mm}{R_P}\right)_{\text{superficie}} = \frac{1}{2}mv_{\text{órb}}^2 + \left(-G\frac{Mm}{R_{\text{órb}}}\right)$$

La velocidad en la órbita se puede expresar en función de la masa y del radio del planeta. En el caso de orbitas circulares, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser igual a la fuerza centrípeta igualando la fuerza centrífuga a la gravitatoria se obtiene una expresión para la velocidad en la órbita:

$$F_g = F_c \qquad G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \qquad v^2 = G\frac{M}{R}$$

$$E_c(\text{superficie}) + -G\frac{Mm}{R_P} = \frac{1}{2}mG\frac{M}{R_{\text{órb}}} + \left(-G\frac{Mm}{R_{\text{órb}}}\right)$$

$$E_c(\text{superficie}) - G\frac{Mm}{R_P} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R_{\text{órb}}} \qquad E_c(\text{superficie}) = G\frac{Mm}{R_P} - \frac{1}{2}G\frac{Mm}{R_{\text{órb}}}$$

$$E_c(\text{superficie}) = GMm\left(\frac{1}{R_P} - \frac{1}{2R_{\text{órb}}}\right)$$

Para calcular el radio de la órbita se emplea el periodo. Partiendo de la expresión de v en función de M y R $\left(v^2 = G\frac{M}{R}\right)$, y teniendo en cuenta que: $\left.\begin{array}{l} v = \omega R \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \end{array}\right\} : v = \frac{2\pi}{T}R$

$$\left(\frac{2\pi}{T}R\right)^2 = G\frac{M}{R} \ :\ \frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{M}{R^3} \ :\ R = \sqrt[3]{G\frac{MT^2}{4\pi^2}}$$

$$R = \sqrt[3]{6{,}67\times10^{-11}\frac{9{,}52\times10^{23}\cdot(2\cdot3600)^2}{4\pi^2}} = 4{,}37\times10^6\,\text{m}$$

Sustituyendo los valores en la energía cinética:

$$E_c(\text{superficie}) = 6{,}67\times10^{-11}\cdot9{,}52\times10^{23}\cdot50\cdot\left(\frac{1}{3{,}2\cdot10^6} - \frac{1}{2\cdot4{,}37\times10^6}\right) = 6{,}29\times10^8\,\text{J}$$

Junio 2004. Cuestión 2.- Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indique para cada una de las siguientes magnitudes si su valor es mayo, menor o iguala en el afelio (punto más alejado del Sol) comparando con el perihelio (punto más próximo al Sol):

a) Momento angular respecto a la posición del Sol.

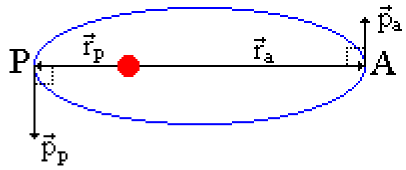
b) Momento lineal.

c) Energía potencial
d) Energía mecánica.

Solución.

a. El momento angular alrededor del sol es constante ya que es una fuerza central.

b. El momento lineal es diferente. Se puede calcular teniendo en cuenta que $\vec{L} = Cte$



Dado que en el afelio y en el perihelio el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{p}$ es de 90º el modulo de L queda

$$L_a = r_a \cdot p_a$$
$$L_p = r_p \cdot p_p$$

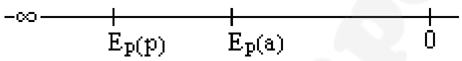
teniendo en cuenta que el momento angular es constante

$$L_a = L_p \quad : \quad r_a p_a = r_p p_p \quad : \quad \frac{p_p}{p_a} = \frac{r_a}{r_p} > 1 (r_a > r_p) \Rightarrow p_p > p_a$$

c. La energía potencial solo depende de la distancia:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

dado que el radio del afelio es mayor que el radio del perihelio,



se puede observar que en modulo $|E_p(p)| > |E_p(a)|$ pero sin módulos $E_p(a) > E_p(p)$ por lo que al conservarse la energía mecánica $E_c(p) > E_c(a)$.

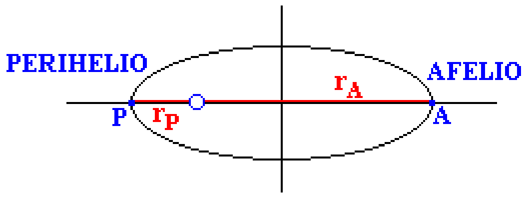
d. La energía mecánica permanece constante ya que no hay fuerzas de rozamiento.

Modelo 2004. Cuestión 1.- La velocidad de un asteroide es de 20 km/s en el perihelio y de 14 km/s en el afelio. Determine en esas posiciones cual es la relación entre:

a) Las distancias al Sol en tomo al cual orbitan.
b) Las energías potenciales del asteroide.

Solución.

a. El asteroide describe una orbita elíptica en torno a su Sol sometido a fuerzas centrales $(\vec{r} \,|\, |\, \vec{F})$, y por tanto $\vec{M} = 0$, lo cual supone que $\vec{L} = cte$. La constancia del momento angular, permite plantear que el momento angula en el perihelio (punto de la órbita más próximo al Sol) es igual al momento angular en el afelio (punto de la órbita más alejado del Sol).



$$\vec{L}_p = \vec{L}_a \quad \text{En módulo} \quad |\vec{r} \times \vec{p}|_p = |\vec{r} \times \vec{p}|_a \quad ; \quad r_p \cdot mv_p \cdot sen\alpha = r_p \cdot mv_p \cdot sen\alpha$$

Simplificando la masa y teniendo en cuenta que el vector velocidad es tangente a la trayectoria, $(\vec{r} \perp \vec{v}) \Rightarrow \alpha$ =90º.

$$r_p \cdot v_p \cdot sen90 = r_a \cdot v_a \cdot sen90 \quad ; \quad r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a \quad ; \quad \frac{r_p}{r_a} = \frac{v_a}{v_p}$$

$$\frac{r_p}{r_a} = \frac{14}{20} = 0{,}7$$

b. La energía potencial gravitatoria que tiene el asteroide en cada punto de la trayectoria, tiene la expresión:

$$E_p = -G \frac{M \cdot m}{r}$$

Si se aplica al afelio y perihelio y se compara:

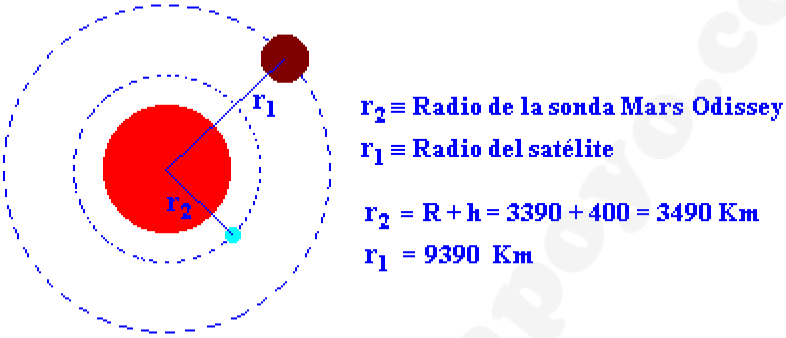
$$\frac{\left(E_p\right)_p}{\left(E_p\right)_a}=\frac{-G\dfrac{M\cdot m}{r_p}}{-G\dfrac{M\cdot m}{r_a}} \quad \text{Simplificando y ordenando:} \quad \frac{\left(E_p\right)_p}{\left(E_p\right)_a}=\frac{r_a}{r_p}=\frac{1}{r_p/r_a}=\frac{1}{0{,}7}=1{,}43$$

Modelo 2004. Problema 1A.- La sonda especial Mars Odissey describe una órbita circular en torno a Marte a una altura sobre su superficie de 400 km. Sabiendo que un satélite de Marte describe órbitas circulares de 9390 km de radio y tarda en cada una de ellas 7’7 h, calcule:

a) El tiempo que tardara la sonda especial en dar una vuelta completa.
b) La masa de Marte y la aceleración de la gravedad en su superficie.

Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6'67\times10^{-11}\,N\,m^2kg^{-2}$
Radio de Marte $R_M = 3390$ km

Solución.



a. Se pide el periodo de la sonda: $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

teniendo en cuenta que se cumple la 3º ley de Kepler:

$$T^2=k\cdot r^3$$

se relaciona el periodo de la sonda con el del satélite:

$$\left.\begin{array}{l} T_{son}{}^2=k\cdot r_2^3 \\ T_{sat}{}^2=k\cdot r_1^3 \end{array}\right\} : \text{son} \equiv \text{Soda; sat} \equiv \text{satélite}$$

Dividiendo ambas expresiones y puesto que la k sólo depende del cuerpo en torno al cual se produce la orbita, el mismo valor en ambos casos:

$$\frac{T_{son}{}^2}{T_{sat}{}^2}=\frac{r_2{}^3}{r_1{}^3}$$

despejando T_{son}:

$$T_{son}=\left(\frac{T_{sat}{}^2\cdot r_2{}^3}{r_1{}^3}\right)^{1/2}$$

sustituyendo los valores del problema y calculando:

$$T_{son} = 7108 \text{ seg.} = 1'97 \text{ H}$$

b. La masa de Marte se puede hallar teniendo en cuenta que para que el satélite describa una órbita circular en torno a Marte, la fuerza de atracción gravitacional debe ser igual a la fuerza centrípeta a la que se ve sometido el satélite. Si M ≡ masa de Marte; m ≡ masa del satélite:

$$G\frac{Mm}{r_1}=m\frac{v^2}{r_1} \qquad G\frac{M}{r_1}=v^2 \qquad \left.\begin{array}{l} v=\omega R \\ \omega=\dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} : v=\frac{2\pi}{T}R$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}R\right)^2=G\frac{M}{R} \qquad M=\frac{4\pi^2 r_1^3}{T^2G}$$

$$M=\frac{4\pi^2\cdot\left(9{,}39\times10^6\right)^3}{(7{,}7\cdot3600)^2\cdot6{,}67\times10^{-11}}=6{,}38\times10^{23}\,\text{kg}$$

Septiembre 2003. Problema 1A. Un satélite artificial de 100 kg de masa se encuentra girando alrededor de la Tierra en una órbita circular de 7100 km de radio. Determine:

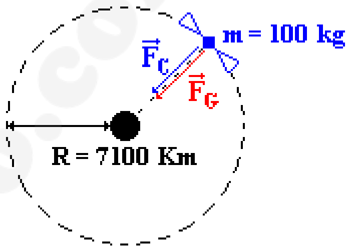
- **a)** El periodo de revolución del satélite.
- **b)** El momento lineal y el momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.
- **c)** La variación de energía potencial que ha experimentado el satélite al elevarlo desde la superficie de la Tierra hasta esa posición.
- **d)** Las energías cinética y total del satélite.

Datos: Masa de la Tierra $M_T = 5'98\times10^{24}$kg
Radio de la Tierra $R_T = 6'37\times10^{6}$m
Constante de Gravitación Universal $G = 6'67\times10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}

Solución.

a. La relación entre el periodo T y la velocidad angular ω es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{-1-}$$



A partir de la igualdad entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria se obtiene la velocidad lineal, de esta la angular y de la angular el periodo.

$$\vec{F}_c = \vec{F}_G$$

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{R^2}$$

despejando la velocidad

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R}}$$

teniendo en cuenta que v = ω · R -2-

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R}}}{R} = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R^3}} = \sqrt{6'67\times10^{-11}\,\frac{5'98\times10^{24}}{\left(7,1\times10^{6}\right)^3}} = 1'056\times10^{-3}\ \text{rad}/\text{s}$$

despejando el periodo de -1- y sustituyendo la velocidad angular obtenida

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1'056\times10^{-3}} = 5951\,\text{s} = 1\,\text{h}\ 39'$$

b. La expresión para el momento lineal es

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

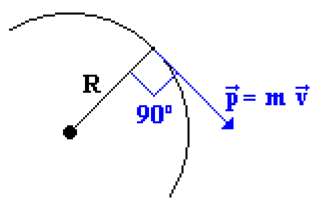
siendo su módulo

$$p = m \cdot v$$

utilizando la relación -2-

$$p = m \cdot \omega \cdot R = 100 \cdot 1'24\times10^{-3} \cdot 7,1\times10^{6} = 7'49\times10^{5}\ \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}$$

la dirección y sentido de $\vec{p}$ es la misma que la de $\vec{v}$, perpendicular al radio en todo punto de la trayectoria circular:



La expresión para el momento angular es

$$\vec{L} = \vec{R} \times m\vec{v}$$

que constituye el momento de la cantidad de movimiento (ó momento lineal). El módulo de $\overline{L}$ es:

$$\left|\vec{L}\right| = R \cdot mv \cdot \text{sen}\,\alpha$$

teniendo en cuenta que el ángulo formado por $\vec{R}$ y $m{\cdot}\vec{v}$ es de 90º en todo momento

$$\left|\vec{L}\right| = R \cdot m{\cdot}v \cdot \text{sen}\,90 = R \cdot m{\cdot}v$$

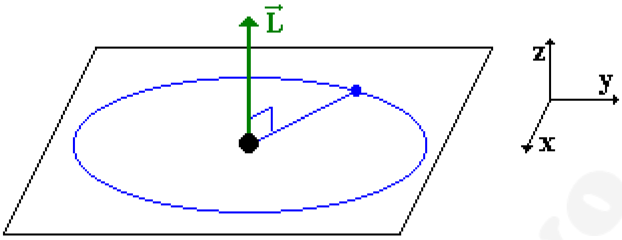
aplicando -2-

$$\left|\vec{L}\right| = R \cdot m{\cdot}v = R \cdot m \cdot \omega R = m \cdot \omega \cdot R^2$$

sustituyendo los valores numéricos:

$$\left|\vec{L}\right| = m \cdot \omega \cdot R^2 = 5'98\times10^{24} \cdot 1'24\times10^{-3} \cdot \left(6'37\times10^{6}\right)^2 = 3\times10^{35}\ \text{kg} \cdot {m^2}/{s}$$

La dirección del vector es perpendicular al plano de la órbita, y en dirección positiva(eje z)



c. La variación de energía potencial que experimenta el satélite al elevarlo desde la superficie de la tierra hasta su posición en la órbita, se obtiene restando la energía potencial que tiene el satélite en la órbita, menos la que tiene en la superficie de la tierra.

$$\Delta E_p = -G \cdot \frac{m \cdot M_T}{R} - \left(-G \cdot \frac{m \cdot M_T}{R_T}\right) = G \cdot m \cdot M_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R}\right)$$

sustituyendo los datos numéricos del problema:

$$\Delta E_p = G \cdot m \cdot M_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R}\right) = 6'67\times10^{-11} \cdot 100 \cdot 5'98\times10^{24}\left(\frac{1}{6'37\times10^{6}} - \frac{1}{7'1\times10^{6}}\right) = 6'44\times10^{8}\ \text{J}$$

d. Energía cinética: $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.

La velocidad se calcula mediante la ecuación -2-

$$v = \omega \cdot R = 1'24\times10^{-3} \cdot 7'1\times10^{6} = 8.804\ {m}/{s}$$

conocida la velocidad, la energía cinética se calcula sustituyendo en su expresión

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 100\ \text{kg} \cdot \left(8.804\ {m}/{s}\right)^2 = 3'88\times10^{9}\ \text{J}$$

La energía total del satélite es la suma de su energía cinética más su energía potencial

$$E_T = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left(-G\frac{m \cdot M_T}{R}\right) = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 8.804^2 - 6'67\times10^{-11}\frac{100 \cdot 5'98\times10^{24}}{7'1\times10^{6}} = -1'74\times10^{9}\ \text{J}$$

Junio 2003. Cuestión 1. Suponiendo un planeta esférico que tiene un radio la mitad del radio terrestre e igual densidad de la Tierra, calcule:

a) La aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta.

b) La velocidad de escape de un objeto desde la superficie del planeta, si la velocidad del escape desde la superficie terrestre es 11,2 km/s.

Datos: Aceleración de la gravedad en la superficie de la tierra g = 9,81 m s^{-2}

Solución.

$$R = \frac{1}{2} R_T \qquad \rho(\text{densidad}) = \rho_T$$

La masa del planeta es: $M = \rho{\cdot}V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 = \rho\frac{4}{3}\pi\frac{R_T^3}{2^3} = \frac{\pi \cdot \rho}{6} R_T^3 = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi R_T^3 \rho = \frac{1}{8} M_T$

a. $g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{M_T/8}{\left(R_T/2\right)^2} = \frac{1}{2}G\frac{M_T}{R_T^2} = \frac{1}{2}g_T = \frac{9'81}{2}\,m/s^2 = 4'905\,m/s^2$

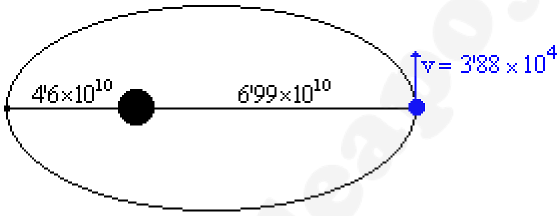
b. $v_e = \sqrt{2gR} = \sqrt{2\frac{1}{2}g_T\frac{1}{2}R_T} = \frac{1}{2}\sqrt{2g_TR_T} = \frac{11,2}{2} = 5,6\,km/s$

Junio 2003. Problema 1A. Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En el afelio su distancia al Sol es de $6,99\times10^{10}$ m, y su velocidad orbital es de $3,88\times10^4$ m/s, siendo su distancia al Sol en el perihelio de $4,60\times10^{10}$m.

a) Calcule la velocidad orbital de Mercurio en el perihelio.
b) Calcule las energías cinética, potencial y mecánica de Mercurio en el perihelio.
c) Calcule el módulo de su momento lineal y de su momento angular en el perihelio.
d) De las magnitudes calculadas en los apartados anteriores, decir cuáles son iguales que en el afilio.

Datos: Masa de Mercurio $M_M = 3,18\times10^{23}\,kg$
Masa del Sol $M_S = 1,99\times10^{30}\,kg$
Constante de Gravitación Universal $G = 6,67\times10^{-11}\,Nm^2kg^{-2}$

Solución.



a. Para hallar la velocidad en el perihelio de Mercurio con los datos del enunciado, se tiene en cuenta que orbita en torno al Sol debido a la acción de fuerzas centrales, y por tanto el momento angular $\left(\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}\right)$ permanece constante $\left(\vec{L}_a = \vec{L}_p\right)$.

Si $\vec{L}_a = \vec{L}_p$, también se cumple que $\left|\vec{L}_a\right| = \left|\vec{L}_p\right|$

$$\left|\vec{L}\right| = r\cdot mv\cdot sen\,\alpha = \{\vec{r}\perp\vec{v}\} = r\cdot mv\cdot sen\,90 = r\cdot mv$$

$$r_{afelio}\cdot m\,v_{afelio} = r_{perihelio}\cdot mv_{perihelio}$$

Simplificando la masa, se despeja la velocidad en el perihelio.

$$v_p = v_a\frac{r_a}{r_p} = 3,88\times10^4\frac{6,99\times10^{10}}{4,6\times10^{10}} = 5,9\times10^4\,m/s$$

b. $E_c = \frac{1}{2}m\cdot v_p^2 = \frac{1}{2}3,18\times10^{23}\cdot\left(5,9\times10^4\right)^2 = 5,53\times10^{32}\,J$

$$E_p = -G\frac{M_SM_M}{r_p} = -6,67\times10^{-11}\cdot\frac{1,99\times10^{30}\cdot3,18\times10^{23}}{4,60\times10^{10}} = -9,18\times10^{32}\,J$$

$$E_M = E_C + E_P = 5,527\times10^{32} - 9,18\times10^{32} = -3,65\times10^{32}\,J$$

c. $\left|\vec{p}_p\right| = m\left|\vec{v}_p\right| = 3,18\times10^{23}\cdot5,9\times10^4 = 1,88\times10^{28}\,kg\,m\,s^{-1}$

$$\left|\vec{L}_p\right| = \left|\vec{r}\times\vec{p}\right| = r_p\cdot p\cdot sen\,90 = r_p\cdot m\cdot v_p = 4,60\times10^{10}\cdot1,88\times10^{28} = 8,65\times10^{38}\,kg\,m^2s^{-1}$$

d. La energía total se conserva durante todo el tiempo, en ausencia de rozamiento, por el principio de conservación de la energía, la energía mecánica permanece constante

El momento angular también se conserva, por estar sometido a fuerzas centrales $(\vec{M}=0)$, y teniendo en cuenta que $\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{L}=cte$

La energía potencial y cinética dependen del radio y de la velocidad respectivamente, como estos valores cambian del afelio al perihelio, las energías potencial y cinética no se conservan

El momento lineal también depende de la velocidad y por tanto tampoco se conserva constante.

Septiembre 2002. Problema 1A. Se pretende colocar un satélite artificial de forma que gire en una órbita circular en el plano del ecuador terrestre y en el sentido de rotación de la tierra. Si se quiere que el satélite pase periódicamente sobre un punto del ecuador cada dos días, calcule:

a) La altura sobre la superficie terrestre a la que hay que colocar el satélite.

b) La relación entre la energía que hay que comunicar a dicho satélite desde el momento de su lanzamiento en la superficie terrestre para colocarlo en esa órbita y la energía mínima de escape.

Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6'67x\ 10^{-11} N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$
Radio de la Tierra $R_t = 6370$ km
Masa de la Tierra $M_t = 5'98x10^{24}$kg

Solución.

El periodo del satélite es T = 2 días. Si lo pasamos a segundos:

$$T = 2\cdot 24\cdot 3600 \qquad T = 172.800 \text{ seg}$$

a. Para calcular la altura h, se establece que la fuerza gravitatoria entre el satélite y la tierra es la fuerza centrípeta del movimiento:

$$G\frac{M_T m_s}{R^2} = m_s\frac{v^2}{R} \qquad G\frac{M_T}{R} = v^2$$

Teniendo en cuenta que $v=\omega\cdot R$ y que $\omega=\frac{2\pi}{T}$

$$G\frac{M_T}{R} = \left(\frac{2\pi}{T}R\right)^2 \quad \text{Ordenando} \quad R^3 = \frac{G\cdot M_T}{4\pi^2}T^2$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{G{\cdot}M_T}{4\pi^2}T^2} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\cdot 5{,}98\times10^{24}}{4\pi^2}\cdot 172800^2} = 67{,}07\times10^6\,\text{m} = 67\,070\,\text{Km}$$

La altura sobre la superficie terrestre, se halla restando al radio de la orbita R (distancia entre los centros de masa), el radio de la tierra R_T.

$$h = R - R_T = 67.070 - 6.370 \qquad h = 60700 \text{ km.}$$

b. La energía mínima del escape (ΔE_e), es aquella que hay que comunicar al satélite en la superficie de la tierra, para que venza la atracción gravitatoria de la tierra, es decir para llevarlo al infinito, donde $E_m = 0$.

$$\Delta E_e + \left(-G\frac{M_T m}{R_T}\right) = 0$$

despejando la energía de escape:

$$\Delta E_e = G{\cdot}\frac{M_T m}{R_T}$$

La energía que hay que comunicarle al satélite para colocarlo en la orbita (ΔE_o) se obtiene de la igualdad:

$$\underbrace{-G\frac{M_T m}{R_T}}_{\text{Energía en la superficie terrestre}} + \Delta E_o = \underbrace{-G\frac{M_T m}{R} + \frac{1}{2}mv^2}_{\text{Energía en la órbita}}$$

Teniendo en cuenta que $v^2 = G\dfrac{M_T}{R}$

$$-G\frac{M_T m}{R_T} + \Delta E_o = -G\frac{M_T m}{R} + \frac{1}{2}m \cdot G\frac{M_T}{R}$$

Operando el segundo miembro, se despeja la energía necesaria para situarlo en la órbita.

$$-G\frac{M_T m}{R_T} + E_{orbita} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R} \qquad \Delta E_o = G\frac{M_T m}{R_T} - \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R}$$

La relación que se pide es:

$$\frac{\Delta E_o}{\Delta E_e} = \frac{G\frac{M_T m}{R_T} - \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R}}{G\frac{M_T m}{R_T}} = \frac{G\frac{M_T m}{R_T}}{G\frac{M_T m}{R_T}} - \frac{\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{R}}{G\frac{M_T m}{R_T}} = 1 - \frac{R_T}{2R}$$

Junio 2002. Cuestión 1. Un planeta esférico tiene un radio de 3000 km, y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6 m/s^2.

a) ¿Cuál es su densidad media?

b) ¿Cuál es la velocidad de escape para un objeto situado en la superficie de este planeta?

Dato: Constante de Gravitación Universal $G = 6'67x10^{-11} Nm^2kg^{-2}$

Solución.

a. Se pide calcular la densidad de un planeta esférico conocido su radio(R = 3000 Km) y la aceleración de la gravedad en su superficie(g = 6 m/s^2)

La expresión de la densidad media de un cuerpo es;

$$\rho = \frac{M}{V} : \begin{cases} M : \text{Masa de el cuerpo} \\ V : \text{volumen} \end{cases} \qquad (1)$$

por tratarse de un objeto esférico;

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{donde R es el radio del planeta.}$$

sustituyendo su valor R = 3000 Km = 3×10^6 m, se obtiene:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(3 \cdot 10^6\right)^3 \qquad Vp = 36\pi \cdot 10^{18} m^3$$

El siguiente paso es hallar la masa del planeta(M) para introducirla en (1) y hallar la densidad. Para ello se utiliza el dato de la gravedad del planeta en la superficie(g = 6 m/s^2)
La expresión para g es;

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

de esta expresión, todos los datos son conocidos salvo M que se despeja;

$$M = \frac{g \cdot R^2}{G}$$

y sustituyendo sus valores numéricos:

$$M = \frac{6\left(3 \cdot 10^6\right)^2}{6'67 \cdot 10^{-11}} \qquad M_p = 8'096 \cdot 10^{23} kg$$

Por tanto, de la expresión (1);

$$\rho = \frac{8'096 \cdot 10^{23} kg}{36\pi \cdot 10^{18} m^3} = 7158'4 \, {kg}/{m^3}$$

b. Para calcular la velocidad de escape para un objeto situado en la superficie de este planeta, se aplica el Principio de Conservación de la energía: $E_i(R_P) = E_f(R = \infty)$

La velocidad de escape, es la que es necesario comunicar al objeto, para que se desplace desde la superficie de la tierra al infinito. Por convenio la $E_f(R=\infty) = 0$. En la superficie terrestre, será la suma de la E_p (gravitatoria) y la Ec que le comunicamos al objeto. Si tienen que ser iguales:

$$E_c + E_p(g) = 0 \qquad \frac{1}{2} m v_e^2 - G\cdot\frac{M_p \cdot m}{Rp} = 0$$

despejando la v_e:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GMp}{Rp}}$$

sustituyendo valores numéricos:

$$V_e = \sqrt{\frac{2 \cdot 6'67\times10^{-11\times} \cdot 8'09\times10^{23}}{3\times10^{6}}} \cong 6000\left(\frac{m}{s}\right)$$

Junio 2002. Problema 1A. La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular en tomo al planeta Venus es $\omega_1 = 1'45\times10^{-4}$ rad/s y su momento angular respecto al centro de la órbita es $L_1 = 2'2\times10^{12}$kg m^2 s^{-1}.

a) Determine el radio r_1 de la órbita del satélite y su masa.

b) ¿Qué energía preciso invertir para cambiar a otra órbita circular con velocidad angular $\omega_2 = 10^{-4}$rad/s?

Datos: Constante de Gravitación Universal $G = 6'67\times10^{-11}$Nm^2 kg^{-2}.
Masa de Venus (Mv) = $4'87\times10^{24}$kg.

Solución.

a. Para hallar el radio r_1 de la orbita del satélite se tendrá en cuenta el hecho de que el satélite describe una trayectoria circular por lo que se la suma de fuerzas que actúan sobre el satélite será igual a la fuerza centrípeta.

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_c$$

Despreciando los efectros de rozamiento, la única fuerza que actúa sobre el satélite es el la fuerza gravitatoria.

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c$$

Trabajando en módulo

$$m_s \frac{{v_s}^2}{R} = G\cdot\frac{M_V \cdot m_s}{R^2}$$

La velocidad orbital lineal del satélite (v_s), se puede expresar en función de ω:

$$v_s = \omega_1 \cdot R$$

sustituyendo en la igualdad anterior:

$$\frac{\omega_1^2 \cdot R^2}{R} = \frac{G\cdot M_V}{R^2}$$

despejando el radio

$$R^3 = \frac{G \cdot M_V}{\omega_1^2} \qquad R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_V}{\omega_1^2}}$$

sustituyendo por los datos del enunciado

$$R = \sqrt[3]{\frac{6'67\times10^{-11}\left(N\cdot m^2 \cdot kg^{-2}\right)\cdot 4'87\times10^{24}(kg)}{\left(1'45\times10^{-4}\right)^2\left(\frac{rad^2}{s^2}\right)}} = 24.906130'7\left(\frac{m}{rad}\right) = 24.906'13(Km)$$

Para hallar la masa del satélite, se puede utilizar el módulo del momento angular orbital del satélite

$$L = R \cdot m_s \cdot v_s$$

Si despejamos el valor de m_s:

$$m_s = \frac{L}{R \cdot v_s}$$

teniendo en cuenta que

$$v_s = \omega_1 \cdot R$$

se obtiene la una expresión de la masa del satélite, en función de los datos conocidos

$$m_s = \frac{L}{R^2\omega_1}$$

sustituyendo

$$m_s = \frac{2'2\times10^{12}\left(kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}\right)}{\left(24'9\times10^6\right)^2\left(m/_{rad}\right)^2 1'45\times10^{-4}\left(rad/_{s}\right)} = 24'47\ kg$$

b. La energía que habrá que suministrar al satélite, para cambiarle a otra órbita con $\omega_2 = 10^{-4}$ rad/s, será igual a la diferencia de energías entre la órbita final y la inicial.

La energía de un satélite en una órbita determinada viene dada por la expresión:

$$E_T = \frac{1}{2} m_s \cdot v_s^2 - G \cdot \frac{M_v \cdot m_s}{R}$$

teniendo en cuenta que $v = \omega \cdot R$

$$E_T = \frac{1}{2} m_s \cdot \omega_s^2 \cdot R_s^2 - G \cdot \frac{M_v \cdot m_s}{R}$$

El incremento de energía que hay que suministrar al satélite por tanto será:

$$E_F - E_i = \left[\frac{1}{2} m_s \cdot \omega_2^2 \cdot R_2^2 - G \cdot \frac{M_V \cdot m_s}{R_2}\right] - \left[\frac{1}{2} m_s \cdot \omega_1^2 R_1^2 - G \cdot \frac{M_V \cdot m_s}{R_1}\right]$$

agrupando:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_s \cdot \left[\omega_2^2 \cdot R_2^2 - \omega_1^2 R_1^2\right] + G \cdot m_s \cdot M_v \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] \quad (1)$$

ecuación de la que únicamente se desconoce R_2.

Conocida la velocidad angular de la 2ª órbita ($\omega_2 = 10^{-4}$ rad·s^{-1}), podemos calcular el radio de la órbita(R_2), aplicando la igualdad de fuerzas $\bar{F}_N = \bar{F}_G$, de modo que:

$$m_s \cdot \frac{v_s^2}{R_2} = G \cdot \frac{M_V \cdot m_s}{R_2^2}$$

expresando v_s en función de ω

$$\frac{\omega_2^2 \cdot R_2^2}{R_2} = \frac{G{\cdot}M_V}{R_2^2}$$

despejando R_2:

$$R_2^3 = \frac{G{\cdot}M_v}{\omega_2^2} \qquad R_2 = \sqrt[3]{\frac{G{\cdot}M_v}{\omega_2^2}}$$

sustituyendo datos:

$$R_2 = \sqrt[3]{\frac{6'67\times10^{-11} \cdot 4'87\times10^{24}}{10^{-4}}} = 31.906.923\ m = 31.906'9\ Km$$

Sustituyendo los valores conocidos en la expresión (1), el incremento de energía es:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot 24'47 \cdot \left[\left(10^{-4}\right)^2 \cdot \left(31'91\times10^6\right)^2 - \left(1'45\times10^{-4}\right)^2\left(24'91\times10^6\right)^2\right] +$$

$$+ 6'67\times10^{-11} \cdot 24'47 \cdot 4'87\times10^{24}\left[\frac{1}{24'91\times10^6} - \frac{1}{31'91\times10^6}\right]$$

$$\Delta E = 3'496\times10^7\ J$$

Modelo 2002. Cuestión 1.-

a) ¿A qué altitud tendrá una persona la mitad del peso que tiene sobre la superficie terrestre? Exprese el resultado en función del radio terrestre.

b) Si la fuerza de la gravedad actúa sobre todos los cuerpos en proporción a sus masas, ¿por qué no cae un cuerpo pesado con mayor aceleración que un cuerpo ligero?

Solución.

a. Si se denomina como p al peso a una altura h y p_o al peso en la superficie terrestre, se pide calcular la altura a la que se cumple:

$$\frac{p}{p_o}=\frac{1}{2} \text{ o lo que es lo mismo: } \frac{mg}{mg_o}=\frac{1}{2} \text{ teniendo en cuenta que la masa no varía: } \frac{g}{g_o}=\frac{1}{2}$$

La intensidad de campo gravitatorio (g) se puede expresar en función de la masa del planeta y de la distancia al centro, teniendo en cuenta que el peso es la fuerza gravitacional con la que el planeta atrae a cualquier masa.

$$p=F_g \quad ; \quad mg=G\frac{Mm}{R^2} \quad ; \quad g=G\frac{M}{R^2}$$

En la superficie terrestre: $g_o=G\dfrac{M_T}{R_T^2}$

A una altura h sobre la superficie terrestre: $g=G\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}$

Comparando: $$\frac{g}{g_o}=\frac{G\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}}{G\dfrac{M_T}{R_T^2}}=\frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{R_T}{R_T+h}=\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad\qquad h=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot R_T$$

b. Porque la intensidad de campo gravitatorio (aceleración de la gravedad), no depende de la masa de los cuerpos, depende de la masa del planeta y de la distancia al centro del planeta.

$$p=F_g \quad ; \quad mg=G\frac{Mm}{R^2} \quad ; \quad g=G\frac{M}{R^2}$$

Modelo 2002. Problema 1A.- Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 se mueve en una órbita circular de radio 10^{11} m y período de 2 años. El planeta 2 se mueve en una órbita elíptica, siendo su distancia en la posición más próxima a la estrella 10^{11} m y en la más alejada, $1,8\times10^{11}$ m.

a) (0,5 puntos) ¿Cuál es la masa de la estrella?
b) (0,5 puntos) Halle el período de la órbita del planeta 2.
c) (1 puntos) Utilizando los principios de conservación del momento angular y de la energía mecánica, hallar la velocidad del planeta 2 cuando se encuentra en la posición más cercana a la estrella.

Datos: Constante de Gravitación Universal G = $6,67\times10^{11}$ N m^2 kg^{-2}

Solución.

a. Si el planeta 1 describe una órbita circular en torno a la estrella, se debe cumplir:

$$F_g=F_c \quad ; \quad G\frac{Mm_1}{R_1^2}=m_1\frac{v^2}{R_1} \quad ; \quad v^2=G\frac{M}{R_1} \quad ; \quad (\omega R_1)^2=G\frac{M}{R_1} \quad ; \quad \frac{4\pi^2}{T^2}R_1^2=G\frac{M}{R_1} \quad ;$$

$$M=\frac{4\pi^2R_1^3}{T^2G}=\frac{4\pi^2\cdot\left(10^{11}\right)^3}{(2\cdot365\cdot3600)^2\cdot6,67\times10^{-11}}=1,49\times10^{29}\,\text{kg}$$

b. Si en vez de despejar la masa se despeja el periodo:

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3$$

Por tratarse de una órbita elíptica, el radio se sustituye por la media aritmética de los radios del perihelio y del afelio.

$$a=\frac{r_p+r_a}{2}=\frac{10^{11}+1,8\times10^{11}}{2}=1,4\times10^{11}\text{m}$$

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}a^3}=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\cdot1{,}49\times10^{29}}\cdot\left(1{,}4\times10^{11}\right)^3}=1{,}044\times10^8\,s=3{,}31\,\text{años}$$

c. Principio de conservación del momento angular: $\vec{L}=cte$, teniendo en cuenta que la velocidad es tangente a la trayectoria en cualquier punto de la órbita $\vec{r}\perp\vec{v}\Rightarrow\left|\vec{L}\right|=r\cdot mv\cdot sen90=r\cdot mv=cte$

$$\vec{L}_a=\vec{L}_p\Rightarrow\left|\vec{L}\right|_a=\left|\vec{L}\right|_p\quad;\quad r_a\cdot mv_a=r_p\cdot mv_p\quad;\quad r_a\cdot v_a=r_p\cdot v_p$$

Principio de conservación de la energía: $E_m=cte$; $E_m(a)=E_m(p)$

$$\left(E_p+E_c\right)_a=\left(E_p+E_c\right)_p\quad;\quad -G\frac{Mm}{r_a}+\frac{1}{2}mv_a^2=-G\frac{Mm}{r_p}+\frac{1}{2}mv_p^2$$

Simplificando m en la igualdad

$$-G\frac{M}{r_a}+\frac{1}{2}v_a^2=-G\frac{M}{r_p}+\frac{1}{2}v_p^2\quad;\quad v_a^2-v_p^2=2GM\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_p}\right)$$

Las dos ecuaciones que se obtienen permiten plantear un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases}r_a\cdot v_a=r_p\cdot v_p\\ v_p^2-v_a^2=2GM\left(\frac{1}{r_p}-\frac{1}{r_a}\right)\end{cases}:\begin{cases}v_a=v_p\frac{r_p}{r_a}\\ v_p^2-v_a^2=2GM\left(\frac{1}{r_p}-\frac{1}{r_a}\right)\end{cases}$$

$$v_p^2-\left(v_p\frac{r_p}{r_a}\right)^2=2GM\left(\frac{1}{r_p}-\frac{1}{r_a}\right)\quad;\quad v_p^2\left(1-\frac{r_p^2}{r_a^2}\right)=2GM\left(\frac{1}{r_p}-\frac{1}{r_a}\right)\quad;\quad v_p=\sqrt{\frac{2GM\left(\frac{1}{r_p}-\frac{1}{r_a}\right)}{1-\frac{r_p^2}{r_a^2}}}$$

Ordenando:

$$v_p=\sqrt{\frac{2GM}{r_a+r_p}\cdot\frac{r_a}{r_p}}=\sqrt{\frac{2\cdot6{,}67\times10^{-11}\cdot1{,}49\times10^{29}}{1{,}8\times10^{11}+10^{11}}\cdot\frac{1{,}8\times10^{11}}{10^{11}}}=11303{,}9\,m/s$$

Septiembre 2001. Cuestión 1.- Un proyectil de masa 10 kg se dispara verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 3200 m/s:

a) ¿Cuál es la máxima energía potencial que adquiere?
b) ¿En qué posición se alcanza?

Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra = 9,8 m s^{-2}; Radio medio de la Tierra = 6,37x 10^6 m

Solución.

a. Suponemos que el campo gravitatorio terrestre es conservativo, es decir, despreciamos todo tipo de rozamiento o fricción con el aire. En este caso, la energía mecánica del sistema (proyectil) se conserva, por tanto:

$E_c + E_p$ (superficie de la tierra) = E_p (Altura máxima) -1-

ya que se supone que cuando llega a su altura máxima, su velocidad es cero.

La energía potencial en la superficie terrestre:

$$g_o=9'8\,m/s^2\qquad E_p=m\cdot g_o\cdot R_T\qquad E_p=-6'24\times10^8\,J$$

Su energía cinética si v = 3200 m/s

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \qquad E_c = 5'12\times10^7\,J$$

Su energía mecánica, suma de la potencial y cinética es:

$$E_m = -5'73\cdot10^8\,J$$

por la ecuación 1: $-5'73\times10^8\,J = -G\cdot\frac{M_T\cdot m}{(R_T+h)} = E_p\,(\text{altura máxima})$ - 2 -

Por tanto, la máxima energía potencial es: $E_p = -5'73\times10^8\,J$

b. La posición h, la despejamos de la ecuación (2):

$$(R_T+h) = \frac{+G\cdot M_T m}{+5'73\cdot10^8\,J} \quad \text{despejando } h \quad h = \frac{g_o\cdot R_T^2\cdot m}{5'73\cdot10^8\,J} - R_T$$

sustituyendo por los datos del problema:

h = 569’9 Km

Altura a la que llega sobre la superficie terrestre.

Junio 2001. Cuestión 1. En el movimiento circular de un satélite en torno a la Tierra, determine:

a) La expresión de la energía cinética en función de las masas del satélite y de la Tierra y del radio de la órbita.

b) La relación que existe entre su energía mecánica y su energía potencial.

Solución.

a. En el movimiento circular de un satélite en torno a la tierra se cumple que:

$$m_s\frac{v^2}{R} = G\frac{M_T m_s}{R^2}$$

simplificando:

$$m_s v^2 = G\cdot\frac{M_T m_s}{R}$$

multiplicando por ½ toda la expresión anterior:

$$\frac{1}{2}m_s v^2 = \frac{1}{2}G\cdot\frac{M_T\cdot m_s}{R}$$

por tanto

$$E_c = \frac{1}{2}G\cdot\frac{M_T m_s}{R} \quad \text{-1-}$$

b. La energía mecánica de un satélite es una constante del movimiento, debido a que el campo gravitatorio es conservativo. Es igual a la suma de E cinética y E potencial.

$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - G\cdot\frac{M_T\cdot m_s}{R}$$

Se puede utilizar la expresión anterior -1-, y se ve que:

$$Ec = \frac{-1}{2}Ep = \frac{1}{2}G\cdot\frac{M_T\cdot m_s}{R}$$

Por tanto:

$$E_m = \frac{1}{2}G\cdot\frac{M_T\cdot m_s}{R} - G\cdot\frac{M_T\cdot m_s}{R} \qquad E_m = \frac{-1}{2}G\cdot\frac{M_T\cdot m_s}{R} \qquad E_m = \frac{E_p}{2}$$

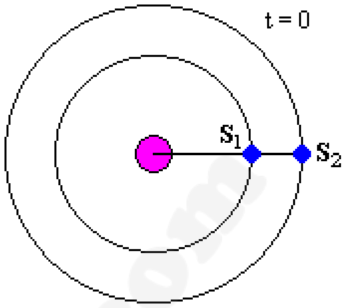
Junio 2001. Problema 1A. Dos satélites artificiales de la Tierra S_1 Y S_2 describen en un sistema de referencia geocéntrico dos órbitas circulares, contenidas en un mismo plano, de radios r_1=8000 km y r_2=9034 km respectivamente.

En un instante inicial dado, los satélites están alineados con el centro de la Tierra y situados del mismo lado:

a) ¿Qué relación existe entre las velocidades orbitales de ambos satélites?
b) ¿Qué relación existe entre los periodos orbitales de los satélites? ¿Qué posición ocupará el satélite S_2 cuando el satélite S_1 haya completado seis vueltas, desde el instante inicial?

Solución.

a. Estableciendo que la fuerza gravitatoria es la fuerza normal del movimiento:



$$m_s \cdot \frac{v^2}{R} = G \cdot \frac{M_T m_s}{R^2}$$

despejando la velocidad (v) se obtiene

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R}}$$

aplicando a cada uno de los satélites está ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para } S_1 : v_1 = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_T}{R_1}} \quad (1) \\ \text{Para } S_2 : v_2 = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_T}{R_2}} \quad (2) \end{array}\right\}$$

dividiendo la ecuación -1- entre la ecuación -2-, se obtiene la relación pedida

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

Sustituyendo los datos numéricos:

$$\frac{v_1}{v_2} = 1'13$$

b. Para hallar la relación entre los periodos orbitales se parte de las ecuaciones:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

sustituyendo en la ecuación del periodo la velocidad angular

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

Aplicando la ecuación anterior para los dos satélites

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \dfrac{2\pi R_1}{v_1} \\ T_2 = \dfrac{2\pi R_2}{v_2} \end{array}\right\}]$$

la relación entre los periodos se obtiene dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{v_2 R_1}{v_1 R_2}$$

Sustituyendo los valores numéricos y teniendo en cuenta que si $\frac{v_1}{v_2} = 1'13 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{1'13}$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1'13} \cdot \frac{8 \times 10^6}{9'034 \times 10^6} = 0'78$$

Los resultados permiten concluir que el satélite más cercano a la Tierra(S_1) se mueve a mayor velocidad y completa una vuelta antes que el satélite más alejado(S_2).

Calculo de T_1:

$$T_1 = \frac{2\pi R_1}{v_1}$$

la velocidad se calcula como

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \sqrt{\dfrac{G{\cdot}M_T}{R_1}} \\ R_1 = 8000\ \text{km} \end{array}\right\} : \quad v_1 = 7061'03\ {}^{m}/_{s}$$

sustituyendo en el periodo

$$T_1 = 7118'7\ \text{s}$$

Después de 6 vueltas, el tiempo transcurrido será:

$$t_1 = \text{nº de vueltas} \times T_1' = 42712'3\ \text{seg.}$$

Mediante la relación entre los periodos se obtiene el periodo de S_2:

$$T_2 = 9126'54\ \text{seg}$$

En el tiempo que S_1 ha recorrido 6 vueltas, el S_2:

$$\text{Nº vueltas} = \frac{T_1'}{T_2} = 4'68$$

la posición de S_2 respecto de S_1 se obtiene expresando la parte decimal del cociente en forma sexagesimal

$$0'68 \times 360 = 244º\ 48'$$

Septiembre 2000. Cuestión 1

a) ¿Con qué frecuencia angular debe girar un satélite de comunicaciones, situado en una órbita ecuatorial, para que se encuentre siempre sobre el mismo punto de la Tierra?

b) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre se encontrará el satélite citado en el apartado anterior?

Datos**:** Gravedad en la superficie de la Tierra = 9,8 m s^{-2}; Radio medio de la Tierra = 6,37 x 10^6 m

Solución.

a. Para que un satélite se encuentre siempre sobre el mismo punto, el periodo del satélite debe ser igual al periodo de la tierra, en su giro de rotación.

$$T = 1\ \text{dia} = 24\ \text{horas} = 86400\ \text{seg}$$

$$\omega_{ROT} = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega_{ROT} = 7'27 \times 10^{-5}\ {}^{rad}/_{s}$$

b. La altura se halla estableciendo que la $F_{gravitatoria}$ es la que mantiene al satélite en su orbita circular:

$$F_G = F_N \quad : \quad G \cdot \frac{M_T \cdot m_s}{R^2} = m_s \cdot \frac{V_s^2}{R}$$

Despejando R:

$$R = \frac{G{\cdot}M_T}{V_s^2} \quad (1)$$

Si la velocidad o frecuencia angular es $\omega = 7'27 \times 10^{-5}\ {}^{rad}/_{s}$ $\qquad V_s = \omega{\cdot}R \quad (2)$

Sustituyendo en (1) la velocidad del satélite:

$$R = \frac{G \cdot M_T}{(\omega \cdot R)^2}$$

despejando el radio de la orbita

$$R = \left[\frac{G{\cdot}M_T}{\omega^2}\right]^{1/3} \quad (3)$$

Ecuación de la que se desconoce la M_{TIERRA}.

El producto G · M_T, se puede obtener de la gravedad terrestre ya que la fuerza de atracción gravitacional en la superficie de la tierra es el peso:

$$m \cdot g_o = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R^2}$$

simplificando

$$g_0 = \frac{G \cdot M_T}{{R_T}^2}$$

despejando el producto $G \cdot M_T$:

$$G \cdot M_T = g_0 {R_T}^2$$

sustituyendo en (3)

$$R = \left[\frac{g_0 {R_T}^2}{\omega^2}\right]^{1/3} = \frac{9'8\left(m/s^2\right) \cdot \left(6'37 \times 10^6 (m)\right)^2}{\left(7'27 \times 10^{-5} \left(rad/s\right)\right)^2} = 4'22 \times 10^7 \text{ m}$$

Al radio de la órbita hay que restarle el radio de la tierra para hallar la altura del satélite sobre la superficie terrestre.

$$\left.\begin{array}{l} R = R_T + h \\ h = R - R_T \end{array}\right\} : h = 3'85 \times 10^7 \text{ m}$$

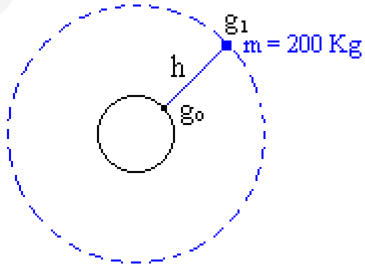
Septiembre 2000. Problema 1A. Un satélite artificial de 200 kg gira en una órbita circular a una altura h sobre la superficie de la Tierra. Sabiendo que a esa altura el valor de la aceleración de la gravedad es la mitad del valor que tiene en la superficie terrestre, averiguar:

a) La velocidad del satélite
b) Su energía mecánica

Datos**:** Gravedad en la superficie terrestre $g = 9'8 \text{ m s}^{-2}$
Radio medio de la Tierra $R = 6'37 \text{x } 10^6 \text{ m}$

Solución.

a. La velocidad de un satélite en una órbita se puede calcular conociendo la altura ó radio de la órbita. Se pide calcular la velocidad de un satélite sabiendo que a esa altura la gravedad se reduce a la mitad



$$g_1 = \frac{1}{2} g_o \quad (1)$$

Calculando los valores de g_1 y g_o, y relacionándolos entre si:

$$g_o = G \frac{M_T}{R_T^2} \text{ y } g_1 = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \quad (2)$$

sustituyendo (2) en (1):

$$G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{1}{2} \cdot G \frac{M_T}{R_T^2}$$

simplificando y ordenando

$$\frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

De (3) se despeja h transformando la expresión en una ecuación de 2º grado:

$$(R_T + h)^2 = 2R_T^2 \qquad R_T^2 + h^2 + 2R_T \cdot h = 2R_T^2 \qquad h^2 + 2R_T h - R_T^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$h = \left(\sqrt{2} - 1\right) R_T \qquad h = 2638540 \text{ m} = 2'64 \times 10^6 \text{ m}$$

Conocida la altura de la órbita, la velocidad del satélite, se halla igualando la fuerza atracción gravitacional con la fuerza centrípeta:

$$\bar{F}_g = \bar{F}_{centrípeta}$$

$$G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R^2} = m \cdot \frac{v^2}{R} \qquad v = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{R}} \quad (4)$$

donde R es la suma de la altura más el radio de la tierra.

$$R = h + R_T = 2.638.540 + 6.370.000 = 9.008.540 \text{ m} \qquad R = 9'01 \times 10^6 \text{ m}$$

El producto $G \cdot M_T$, se obtiene de la expresión de g en la superficie terrestre.

$$g_o = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \Rightarrow G \cdot M_T = g_o \cdot R_T^2 \quad (5)$$

sustituyendo en (4)

$$v = \sqrt{\frac{g_o \cdot R_T^2}{R}}$$

sustituyendo por los valores numéricos

$$v = \sqrt{\frac{9'8 \cdot \left(6'37 \times 10^6\right)^2}{9'01 \times 10^6}} = 6643'4 \; m/s$$

b. La energía mecánica del satélite en la órbita ves la suma de la energía potencial más la energía cinética.

$$E_{mec} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R} + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

teniendo en cuenta la expresión -5-

$$E_{mec} = -\frac{m \cdot g_o \cdot R_T^2}{R} + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

sustituyendo por los datos

$$E_{mec} = -\frac{200 \cdot 9'8 \cdot \left(6'37 \times 10^6\right)^2}{9'01 \times 10^6} + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 6643'4^2 = 4'41 \times 10^9 \; J$$

Junio 2000. Cuestión 1.

- **a)** Enuncie la primera y la segunda ley de Kepler sobre el movimiento planetario.
- **b)** Compruebe que la segunda ley de Kepler es un caso particular del teorema de conservación del momento angular.

Solución.

a. **1ª Ley de Kepler**: Los planetas giran en torno al sol, en órbitas elípticas, teniendo al sol en uno de unos focos.

2ª Ley de Kepler: El radio vector de cualquier planeta, en su movimiento alrededor del sol, barre áreas iguales en tiempos iguales.

b. La 2ª ley de Kepler es consecuencia directa del Teorema de Conservación del Momento Angular

$$\overline{L} = \overline{r} \times m\overline{v}$$

En todo movimiento sometido a fuerzas centrales, como es el caso del movimiento planetario, el momento angular se conserva, ya que:

$$\overline{M} = \overline{r} \times \overline{F} \quad \text{(Momento de la fuerza (gravitatoria))}$$

y puesto que $\vec{r}$ y $\vec{F}$ tienen la misma dirección, el ángulo que forman es cero, por lo que:

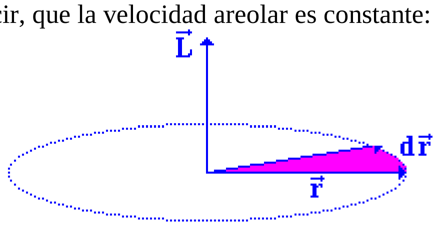
$$\left|\overline{M}\right| = \left|\overline{r}\right| \cdot \left|\overline{F}\right| \text{sen } 0^o = 0$$

teniendo en cuenta esto

$$\begin{cases} \overline{M} = \dfrac{d\overline{L}}{dt} \\ \overline{M} = 0 \end{cases} : \quad \frac{d\overline{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \overline{L} = cte$$

La segunda ley de Kepler es consecuencia directa de esto, ya que dice que el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales, es decir, que la velocidad areolar es constante:

$$V_A = \frac{ds}{dt}$$



Según el dibujo, el diferencial de área (ds) es igual a:

$$ds = \frac{1}{2}\left|\bar{r} \times d\bar{r}\right|$$

si se deriva la expresión anterior respecto del tiempo

$$\frac{ds}{dt} = v_A = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| \qquad v_A = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right|$$

Dividiendo y multiplicando por m: $v_A = \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times m\vec{v}\right| \qquad V_A = \frac{1}{2m}\left|\vec{L}\right|$

Si se tiene en cuenta que el momento angular es constante en este tipo de movimiento

$$\left|\vec{L}\right| = cte \qquad v_A = cte$$

Junio 2000. Problema 1. Se pone en órbita un satélite artificial de 600 kg a una altura de 1200 km sobre la superficie de la Tierra. Si el lanzamiento se ha realizado desde el nivel del mar, calcule:

a) Cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del satélite.

b) Qué energía adicional hay que suministrar al satélite para que escape a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.

Datos: Constante de Gravitación $G = 6'67\times 10^{-11}$ N m^2 kg^2

Masa de la Tierra $M_T = 5'98\times 10^{24}$ kg

Radio medio de la Tienta $R_T = 6{,}37\times 10^6$ m

Solución.

a. Para ver cuanto a aumentado la energía potencial del satélite, se calcula su valor para la superficie de la tierra y para la órbita:

$$Ep_{g(sup)} = -G\cdot\frac{M_T\cdot m_s}{R_T}$$

$$Ep_{g(orbita)} = -G\cdot\frac{M_T\cdot m_s}{R_T + h_{Orb}}$$

El aumento de Ep, será la diferencia entre la final y la inicial:

$$\Delta Ep = Ep_f - Ep_i$$

$$\Delta Ep = -G\cdot\frac{M_T\cdot m_s}{R_T+1200} - \left(-G\cdot\frac{M_T\cdot m_s}{R_T}\right) = -G\cdot\frac{M_T\cdot m_s}{R_T+1200} + G\cdot\frac{M_T\cdot m_s}{R_T} = G\cdot M_T\cdot m_s\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+1200}\right)$$

Sustituyendo valores numéricos en la expresión anterior:

$$\Delta Ep = 6'67\times 10^{-11}\cdot 5'98\times 10^{24}\cdot 600\cdot\left(\frac{1}{6'37\times 10^6} - \frac{1}{6'37\times 10^6 + 1'2\times 10^6}\right) = 5'96\times 10^9\ \text{J}$$

b. Energía adicional para que el satélite escape al campo gravitatorio terrestre:

$$E_{órbita} + E_{escape} = 0 \ ; \quad E_{escape} = -E_{órbita}$$

$$E_{orbita} = E_p + E_c = -G\frac{M_T m_s}{(R_T + 1200)} + \frac{1}{2}mv^2$$

Teniendo en cuenta que $F_g = F_c$; $G\frac{M_T m_s}{(R_T+h)^2} = m_s\frac{v^2}{R_T+h}$; $v^2 = G\frac{M_T}{R_T+h}$

$$E_{orbita} = -G\frac{M_T m_s}{(R_T+1200)} + \frac{1}{2}mG\frac{M_T}{R_T+h} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m_s}{(R_T+1200)}$$

$$E_{escape} = -E_{orbita} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m_s}{R_T+h} = \frac{1}{2}6{,}67\times 10^{-11}\frac{5{,}98\times 10^{24}\cdot 600}{6{,}37\times 10^6 + 1{,}2\times 10^6} = 1{,}58\times 10^9\ \text{j}$$