FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

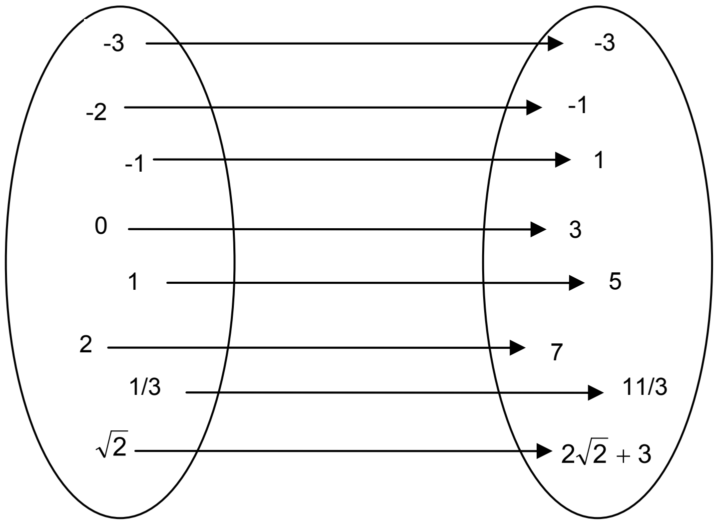
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SS. II
Alfonso González
I.E.S. Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I) CONCEPTO DE FUNCIÓN:

"Una función es una aplicación que hace corresponder a cada elemento –llamado x, o variable independiente- de un conjunto un único elemento a lo sumo –llamado imagen de x, o f(x)- de otro conjunto"

Por ejemplo, la función f(x)=2x+3 se puede representar, utilizando diagramas de conjuntos, así:



Ahora bien, en la práctica, lo anterior se suele indicar más bien mediante tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	1/3	$\sqrt{2}$
f(x)	-3	-1	1	3	5	7	11/3	$2\sqrt{2}+3$

(NOTA: más adelante veremos que para esta función, por tratarse de una recta, basta con dar dos valores…)

Por ejemplo, se dice que la imagen de 2 a través de la función anterior es 7, y se designa como f(2)=7

¡Muy importante!: **Para que una función esté bien definida, un x no puede tener más de una imagen.**

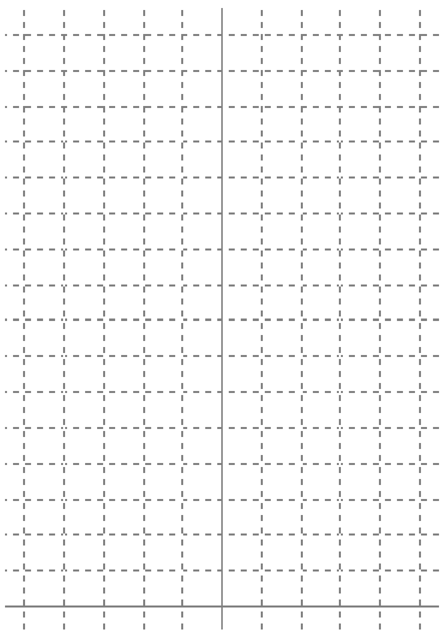
La imagen f(x) también se denota como **y**, y se llama variable dependiente; en el ejemplo anterior, se diría y=2x+3

- El conjunto formado por todos los x posibles, es decir, para los que existe imagen, se llama **Dominio de definición**, y se designa como Dom(f); en el ejemplo anterior, sería lógicamente Dom(f)=IR

- "La gráfica de una función f(x) está formada por todos los puntos (x,y) que satisfacen la expresión y=f(x)"

<u>Ejemplo 1</u>: Construir la gráfica de la función f(x)=x^2 mediante tabla de valores apropiada

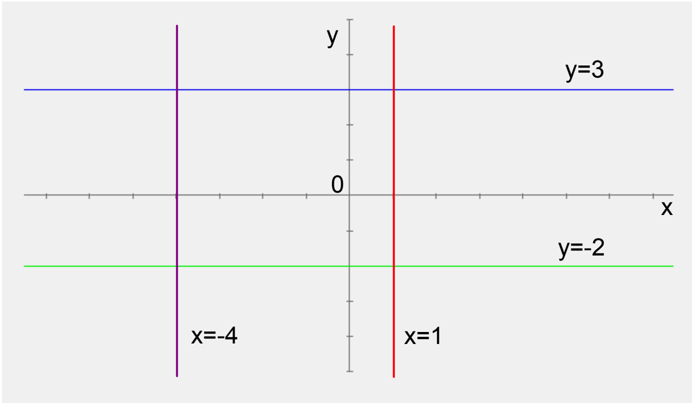
x	
f(x)=x^2	



II) <u>GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES MÁS HABITUALES</u>:

II.1) <u>FUNCIÓN CONSTANTE</u> (y=K)

Su gráfica, lógicamente, es una recta horizontal, que corta al eje vertical a la altura de k unidades; ejemplos:



De forma parecida, x=K representa una recta vertical, la cual corta al eje x a la altura de k unidades; en el gráfico anterior puede verse un par de ejemplos de este caso. ¿Qué ecuación tendrán entonces los ejes de coordenadas?

II.2) <u>FUNCIÓN AFÍN</u> (y=mx+n)

La gráfica de una función de 1<u>er</u> grado es siempre una recta. Ya vimos en el tema de Programación Lineal que la forma más rápida de representarla es dar dos valores: x=0 e y=0, correspondientes a los cortes con los ejes.

II.3) <u>FUNCIÓN CUADRÁTICA</u> ($y=ax^2+bx+c$)

La gráfica de una función de 2<u>º</u> grado es siempre una parábola. Recordar de cursos anteriores que la forma rápida de representarla es hallar los siguientes elementos:

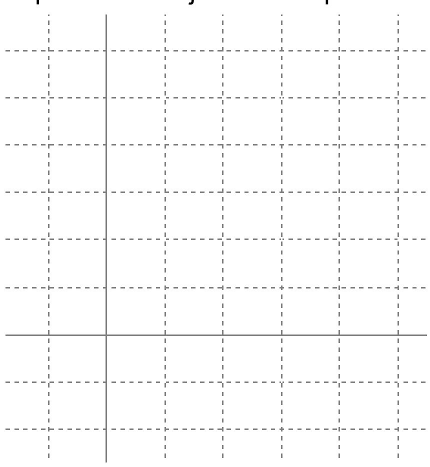
1º) Vértice: Su abscisa viene dada por $x_V = -\frac{b}{2a}$; la ordenada y_v se obtiene sustituyendo x_v en la ecuación de la parábola.

2º) Cortes con los ejes: El corte con el eje x se obtiene haciendo y=0, e decir, resolviendo la ecuación de 2º grado asociada a la parábola; nótese que la parábola no tiene por qué cortar necesariamente a dicho eje.

El corte con el eje y se obtiene simplemente sustituyendo x=0 en la ecuación de la parábola. Siempre se va acortar a dicho eje.

Finalmente, recordar que las ramas de la parábola son simétricas respecto a un eje vertical que pase por su vértice.

<u>Ejemplo 2</u>: Representar la parábola $y=x^2-4x+3$

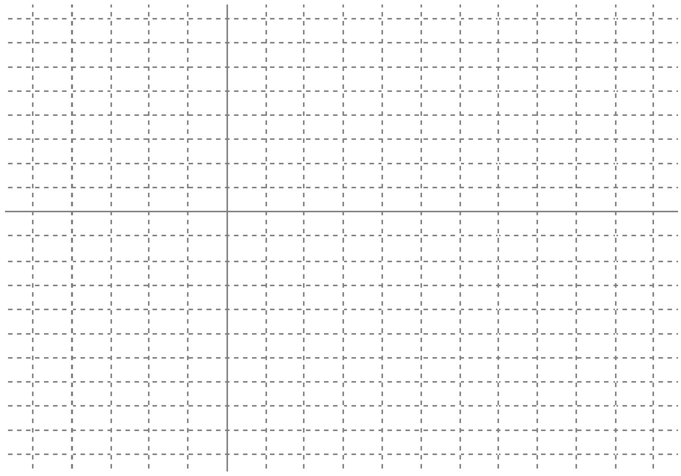


<u>Ejercicios final tema</u>: 1 a 5

II.4) FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Se representan sencillamente dibujando cada rama en su intervalo de definición:

Ejemplo 3: Representar $f(x)=\begin{cases} x+5 & \text{si } x \le -2 \\ 7 & \text{si } -2 < x \le 1 \\ x^2-10x+16 & \text{si } x>1 \end{cases}$



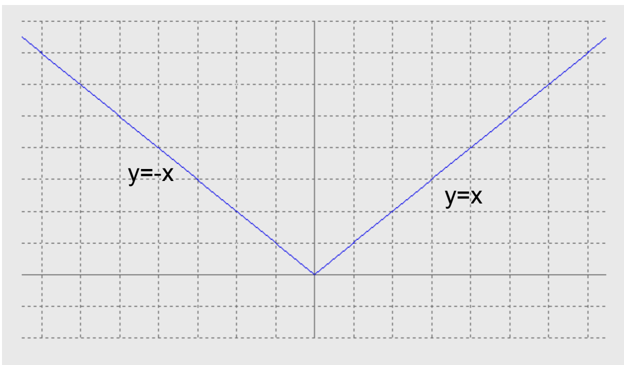
Ejercicio: 6

II.5) FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

En primer lugar, tenemos que recordar la definición de valor absoluto de un número:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, su representación gráfica será:



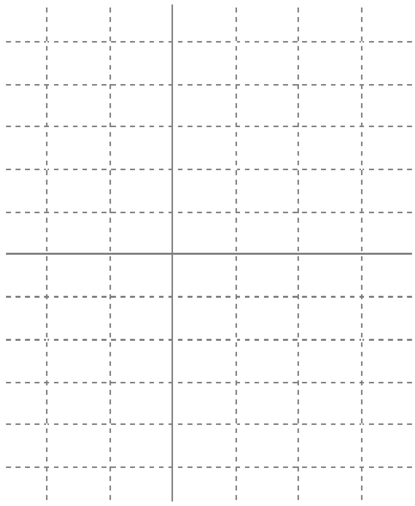
En general, para representar |f(x)|, seguiremos los siguientes pasos:

1º) Representamos la función que figura dentro del valor absoluto, es decir, f(x)

2º) Las partes positivas (es decir, por encima del eje x) de f(x) se dejan igual, mientras que las negativas se reflejan respecto al eje x.

De esta forma, nótese que |f(x)| siempre estará por encima del eje x, es decir, será siempre positiva. Por lo tanto, todo gira en torno a en qué puntos se anula la función que figura dentro del valor absoluto, esto es, f(x). Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4: Representar la función f(x)=|2x-4| y obtener su expresión analítica como función definida por ramas.



NOTA: *En el anexo final de este tema se puede ver una serie de ejemplos de gráficas representativas.*

Ejercicio: 7

III) IDEA INTUITIVA DE $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *(Ver pág. 138 del libro de texto)*

Ejemplo 5: Estudiar el comportamiento de la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \le 1 \\ 2x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

en las proximidades de x=1, completando las siguientes tablas (mediante calculadora), y explicar gráficamente la situación:

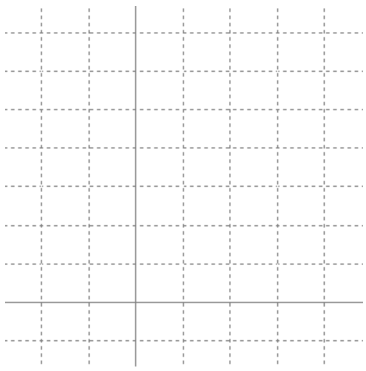
$x \to 1^-$	0,9	0,99	0,999…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$

$x \to 1^+$	1,1	1,01	1,001…
$f(x)\to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) =$



En la práctica, los límites no se suelen calcular de esta forma, sino operando:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \left(x^2+1\right) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} 2x^2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$$

En definitiva, vemos que cuando las x se acercan a 1^- (1ª tabla), las imágenes correspondientes tienden a 2^-, mientras que cuando las x se acercan a 1^+ (2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 2^+. Y todo ello es independiente de que, exactamente en x=1, la función vale 2.

■ **Observaciones**:

1º Para que exista límite han de coincidir los límites laterales (o, dicho al revés, si no coinciden los límites laterales, entonces el límite no existe).

2º **A efectos de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, no hay que tener en cuenta lo que ocurre exactamente en x=a, sino en las proximidades**; de hecho, hay casos en los que en un punto no existe imagen pero sí límite (como en el ejemplo que veremos a continuación), y esta es precisamente la utilidad del concepto de límite.

3º De todos modos, normalmente existen límite e imagen, y ambos coinciden, como en el ejemplo que acabamos de ver.

Ejemplo 6: Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Obtener $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ numéricamente, completando (mediante calculadora) las tablas que figuran a continuación.

b) Obtener analíticamente dicho límite.

c) Explicar gráficamente la situación.

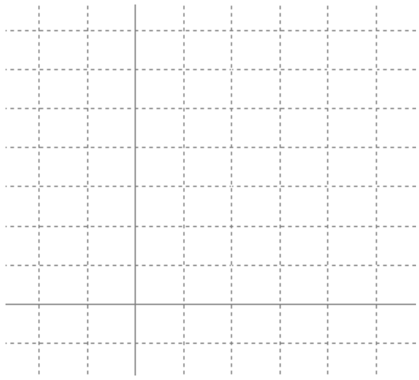
$x \to 2^-$	1,9	1,99	1,999…
$f(x) \to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$

$x \to 2^+$	2,1	2,01	2,001…
$f(x) \to$			

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

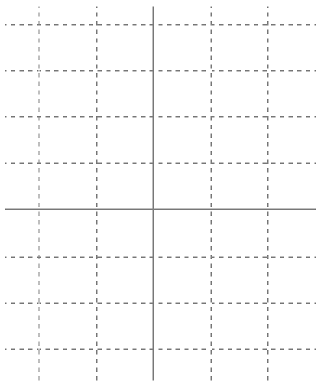


Es decir, cuando las x se acercan a 2^- (1ª tabla), las imágenes correspondientes tienden a 3^-, mientras que cuando las x se acercan a 2^+ (2ª tabla) las imágenes correspondientes tienden a 3^+. En este caso, la función no está definida justo en x=2, pero ello no impide que exista límite. Recordar: **a efectos del límite, no hay que fijarse en lo que hace la función exactamente en el punto, sino en sus proximidades**.

Ejemplo 7: Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Obtener analíticamente $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

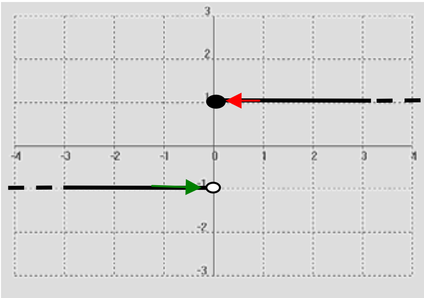
b) Explicar gráficamente la situación.



Vemos que existe límite en x=0, pues los límites laterales coinciden en dicho punto, y dicho límite vale 0. Ahora bien, la imagen en x=0 es distinta del límite, es decir, en este caso el límite no coincide con la imagen, pero ello no impide que exista límite. Recordar: **a efectos del límite, no hay que fijarse en lo que la función hace exactamente en el punto, sino en sus proximidades**.

■ Veamos por último un sencillo ejemplo de función en el que no hay límite:

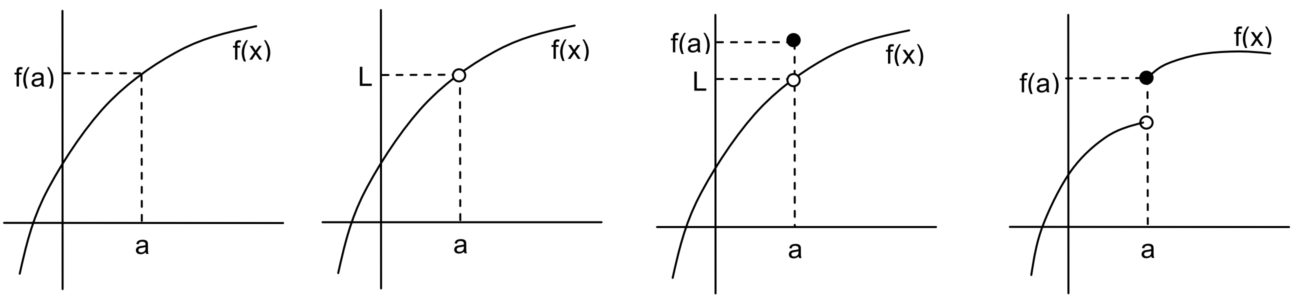
Ejemplo 8: Dada $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ se pide: **a)** Representarla. **b)** Hallar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-1)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} \ 1 \ = \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

En este caso, al acercarnos a x=0⁻ por la rama izquierda (flecha verde), las imágenes tienden exactamente a -1 (aunque precisamente en x=0 no tengan el valor esperado, sino 1; de nuevo, téngase en cuenta que a efectos del límite no hay que tener en cuenta lo que hace la función exactamente en el punto sino en sus proximidades…), mientras que al acercarnos a $x=0^+$ por la rama derecha (flecha roja), las imágenes tienden exactamente a 1. Por lo tanto, **como no coinciden los límites laterales, el límite global no existe**.

■ Podríamos ver más ejemplos, pero todos ellos se resumirían en alguno de los 4 casos del siguiente esquema (que corresponden, respectivamente, a los cuatro ejemplos anteriores); va a existir límite cuando x→a sólo en los tres primeros supuestos:



$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$	$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ [aunque $\nexists f(a)$]	$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq f(a)$	$\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ [aunque $\exists f(a)$]
(Ejemplo 5)	(Ejemplo 6)	(Ejemplo 7)	(Ejemplo 8)

Ejercicios: 8, 9 y 10

IV) <u>CONTINUIDAD</u> *(Ver pág. 141 del libro de texto)*

Intuitivamente, una función es continua cuando se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Más formalmente, se define **función continua en un punto** de la siguiente forma:

$$\boxed{f(x)\text{ continua en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

Es decir: "Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto".

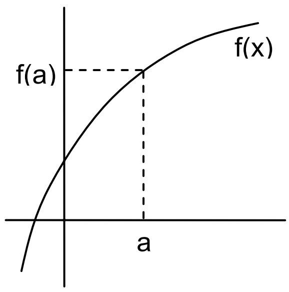
A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:

1) que exista imagen
2) que exista límite
3) y que ambos coincidan

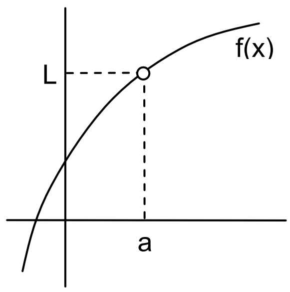
(En caso de no ser continua en un punto, se dice que es discontinua).

Por extensión, diremos que una función es **continua en un intervalo** cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

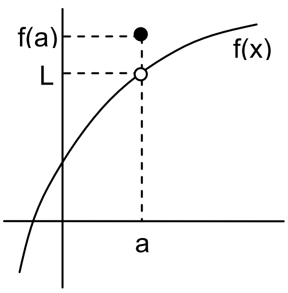
Vamos a recordar de nuevo el esquema-resumen visto en el apartado anterior, e investigar en cada uno de los cuatro casos si la función es continua en x=a, para lo cual aplicaremos los tres requisitos de la continuidad arriba mencionados; observamos que la función es continua en x=a sólo en el primer supuesto:



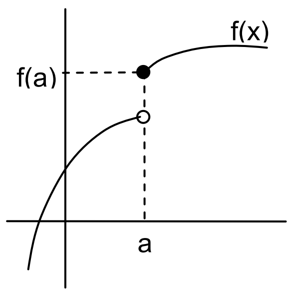
$\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow f(x)$ CONTINUA en x=a



$$\left.\begin{array}{l}\nexists\, f(a)\\ \exists \lim_{x\to a} f(x) = L\end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ DISCONTINUA en } x=a$$



$\exists \lim_{x\to a} f(x) = L \neq f(a) \Rightarrow f(x)$ DISCONTINUA en x=a



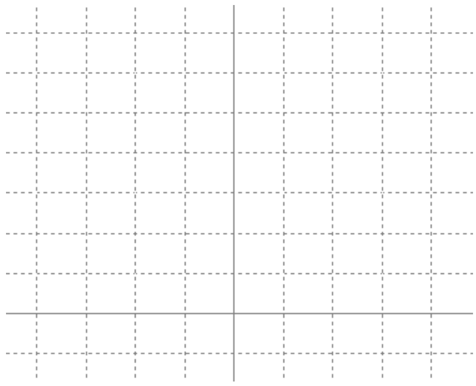
$\nexists \lim_{x\to a} f(x) \Rightarrow f(x)$ DISCONTINUA en x=a

Nótese que en el último caso la función es discontinua, independientemente de que exista o no imagen.

<u>Ejemplo 9</u>: Dada $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+5 & \text{si } x\le -1 \\ -x^2+2x+5 & \text{si } x>-1 \end{cases}$

a) Estudiar su continuidad.

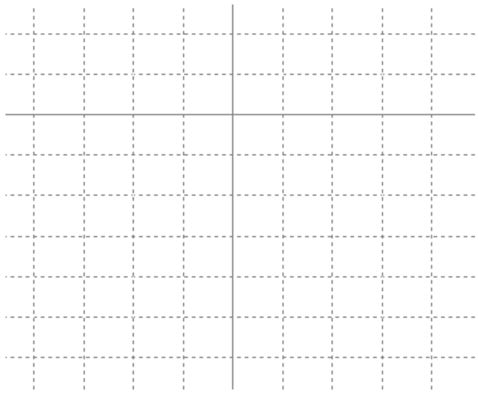
b) Representarla gráficamente.



<u>Ejemplo 10</u>: Dada $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-5 & \text{si } x\in(-\infty,1] \\ x+2 & \text{si } x\in(1,\infty) \end{cases}$

a) Estudiar su continuidad.

b) Representarla gráficamente.



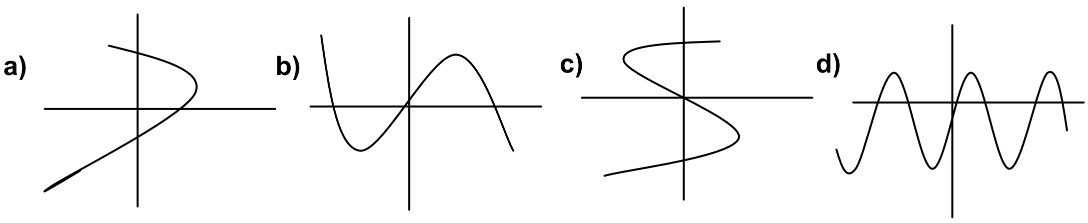
<u>Ejercicios PAU</u>: Cualquiera de los 3A

<u>Ejercicios final tema</u>: 11 y ss.

<u>Ejercicios libro</u>: pág. 148 y ss.:11, 12b, 22, 23, 26 (estudiar continuidad de funciones a trozos)
18, 20a (continuidad con parámetro)
21, 24 (ramas con valor absoluto)

EJERCICIOS

1. ¿Cuáles de estas representaciones corresponden a la gráfica de una función? (Razonar la respuesta):



2. En cada apartado, representar las rectas sobre los mismos ejes:

a) $y=3x$
 $y=3x+2$
 $y=3x-7$

b) $y=-3x$
 $y=-3x+2$
 $y=-3x-7$

c) $y=\frac{1}{3}x$
 $y=\frac{1}{3}x+2$
 $y=\frac{1}{3}x-7$

d) $y=0$
 $y=x$
 $y=-x$

3. Representar sobre los mismos ejes las siguientes parábolas. ¿Qué conclusiones podemos extraer?: **a)** $y=x^2$ **b)** $y=2x^2$ **c)** $y=x^2/2$ **d)** $y=-x^2$ **e)** $y=-4x^2$

4. Dadas las siguientes parábolas, hallar: **i)** Vértice
ii) Puntos de corte con los ejes
iii) Representación gráfica

a) $y=x^2-6x+8$
b) $y=x^2-2x-3$
c) $y=-x^2-4x-3$
d) $y=x^2-4x+7$
e) $y=x^2-6x$
f) $y=x^2+x+1$
g) $y=3x^2+15x+18$
h) $y=-x^2-2x-2$
i) $y=x^2+2x-1$
j) $y=x^2-4$
k) $y=x^2+4$
l) $y=x^2+4x+5$
m) $y=x^2+4x+3$
n) $y=-x^2-8x-4$
o) $y=2x^2+4x+6$
p) $y=-x^2-1$
q) $y=(x+5)^2-8$
r) $y=2(x-1)^2-8$
s) $y=(x-5)^2+8$
t) $y=-2(x-1)^2+8$
u) $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-5$
v) $y=x^2-2x+1$
w) $y=x^2-4x+2$
x) $y=2x^2-8x+6$
y) $y=-3x^2-6x+12$
z) $y=x^2-2x+3$
α) $y=x^2-6x+5$
β) $y=\frac{1}{4}x^2+x-2$
γ) $y=2x^2-10x+8$
δ) $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$
ε) $y=x^2-8x+7$

5. En cada apartado, representar las parábolas sobre los mismos ejes:

a) $y=x^2$
 $y=(x-4)^2$
 $y=(x+5)^2$

b) $y=x^2$
 $y=x^2+4$
 $y=x^2-5$

c) A la vista de lo anterior, ¿cómo sería la parábola $y=(x-4)^2+5$? ¿Cuál es su vértice?

6. Representar las siguientes **funciones definidas a trozos**:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ x & \text{si } x\in[2,\infty) \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<-1 \\ 1-2x & \text{si } -1\le x<1 \\ 3x-1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ x-2 & \text{si } x\in[2,4] \\ 5 & \text{si } x\in(4,\infty) \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 5x-2 & \text{si } x\le 1 \\ -2 & \text{si } x=2 \\ x/2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} -3 & \text{si } -5\le x<0 \\ x^2 & \text{si } 0\le x<2 \\ x+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} x/2 & \text{si } x\in(-\infty,1] \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\in(1,\infty) \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 & \text{si } x<0 \\ -2 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{4}{x-2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{si } x\in(-\infty,2] \\ x^2-4x & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{x-5} & \text{si } x\le 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0<x\le 3 \\ \dfrac{10}{x+2} & \text{si } x>3 \end{cases}$

j) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 3x-x^2 & \text{si } 0\le x<3 \\ x-4 & \text{si } 3\le x<6 \\ 0 & \text{si } x>6 \end{cases}$

7. Dadas las siguientes **funciones valor absoluto** se pide: **i)** Representación gráfica **ii)** Definición analítica por ramas.

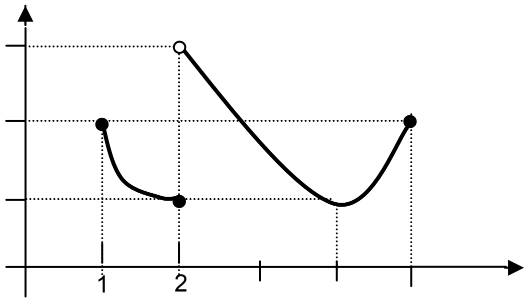
a) $f(x)=|-3x+3|$ **b)** $f(x)=|x^2-4x+3|$ **c)** $f(x)=|x+1|$ **d)** $f(x)=|x^2-5x+6|$

e) $f(x)=|-x^2-4x-5|$ **f)** $f(x)=|3x+6|$ **g)** $f(x)=\left|\frac{1}{2}x^2-x-4\right|$

RECORDAR: • Para que exista límite de una f(x) en un punto han de coincidir los límites laterales en dicho punto.

• A efectos del $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no tenemos en cuenta lo que ocurre exactamente en x=a, sino en las proximidades. De hecho, hay casos en los que no existe f(a) pero sí el lím (de ahí la utilidad de la noción de límite)

8.



Dada la gráfica de la figura, indicar si existe lim f(x) en los siguientes casos:

a) Cuando $x \to 1$
b) Cuando $x \to 2$
c) Cuando $x \to 4$
d) Cuando $x \to 5$

9. Representar la función

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<1 \\ 4-x & \text{si } 1\le x<3 \\ x-2 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$$

y calcular lim f(x) cuando $x \to 1$, $x \to 3$, $x \to 5$

10. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le 1 \\ ax+3 & \text{si } 1<x\le 2 \\ bx^3-2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

calcular los valores de los parámetros **a** y **b** para que existan los límites en x=1 y x=2

(Soluc: a=-1, b=3/8)

RECORDAR:

$$\boxed{f(x) \text{ continua en } x=a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

Es decir: "Una función es continua en un punto si el límite coincide con la imagen en dicho punto".

- A efectos prácticos, para estudiar si una función es continua en un punto, hay que comprobar:
  1) que exista imagen
  2) que exista límite
  3) y que coincidan

11. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\ge 0 \\ x-1 & \text{si } x<0 \end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x=0 \\ 2x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ **c)** $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<2 \\ 2x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x\le 2 \\ 2x-6 & \text{si } x>2 \end{cases}$ **e)** $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

(Soluc: a) discont. en x=0; b) discont. en x=0; c) discont. en x=2; d) continua $\forall\Re$; e) discont. en x=0 y x=1)

12. Dada $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x\ne 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$ se pide: **a)** Representación gráfica.
b) Estudiar analíticamente la continuidad lateral en x=0
c) A la vista del apartado anterior, ¿es continua en x=0?

13. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<3 \\ x^2 & \text{si } 3\le x<4 \\ 0 & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$$

(Soluc: discontinua en x=3 y x=4)

14. Representar la siguiente función e indicar si tiene algún punto de discontinuidad:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\le 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1<x\le 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

(Soluc: discontinua en x=2)

15. Calcular cuánto debe valer **a** para que la siguiente función sea continua $\forall\Re$:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\le 2 \\ 3-ax^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

(Soluc: a=0)

16. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } 0\le x<1 \\ 2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

hallar **a** y **b** para que la función sea continua y dibujar la gráfica de la función. *(Soluc: a=3 y b=-1)*

17. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x\le 1 \\ mx+n & \text{si } 1<x\le 3 \\ -x^2+10x-11 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

hallar los valores de **m** y **n** para que f(x) sea continua (puede ser útil dibujar la gráfica).
(Soluc: m=3, n=1)

18. Ídem:

$$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & \text{si } x\le -2 \\ ax+2 & \text{si } -2\le x\le 2 \\ x^2+b & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

(Soluc: a=-1/2, b=-3)

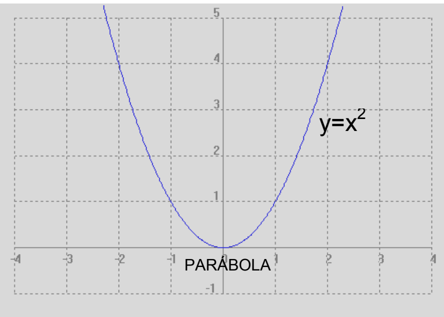
19. Ídem:

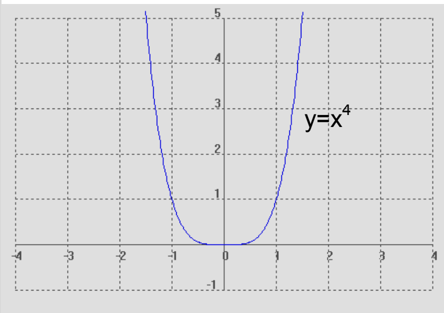
$$f(x)=\begin{cases} ax+2 & \text{si } x< -1 \\ b/x^2 & \text{si } -1\le x<3 \\ cx & \text{si } 3\le x<5 \\ 10 & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$$

(*Soluc: a=-52, b=54, c=2)*

ANEXO: GRÁFICAS MÁS REPRESENTATIVAS

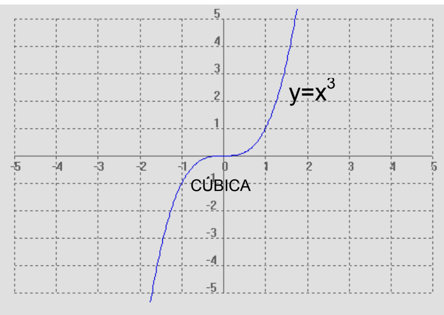
GRÁFICAS MÁS REPRESENTATIVAS

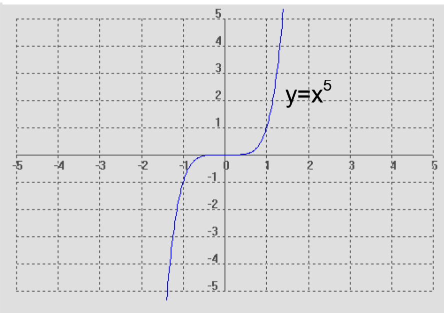




En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo par, tienen esta forma.

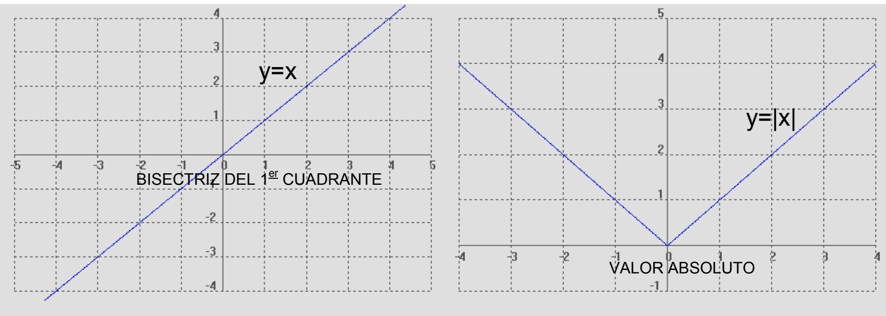
(cuanto mayor es n, más acusada es la curvatura)



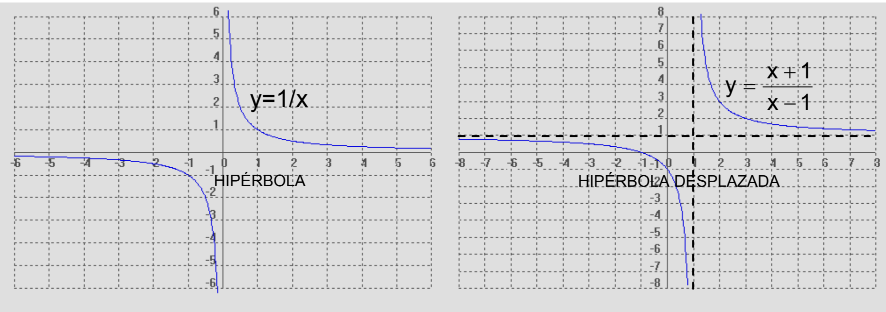


En general, las curvas $y=x^n$, siendo n positivo impar ($\neq 1$), tienen esta forma.

(cuanto mayor es n, más acusada es la curvatura)



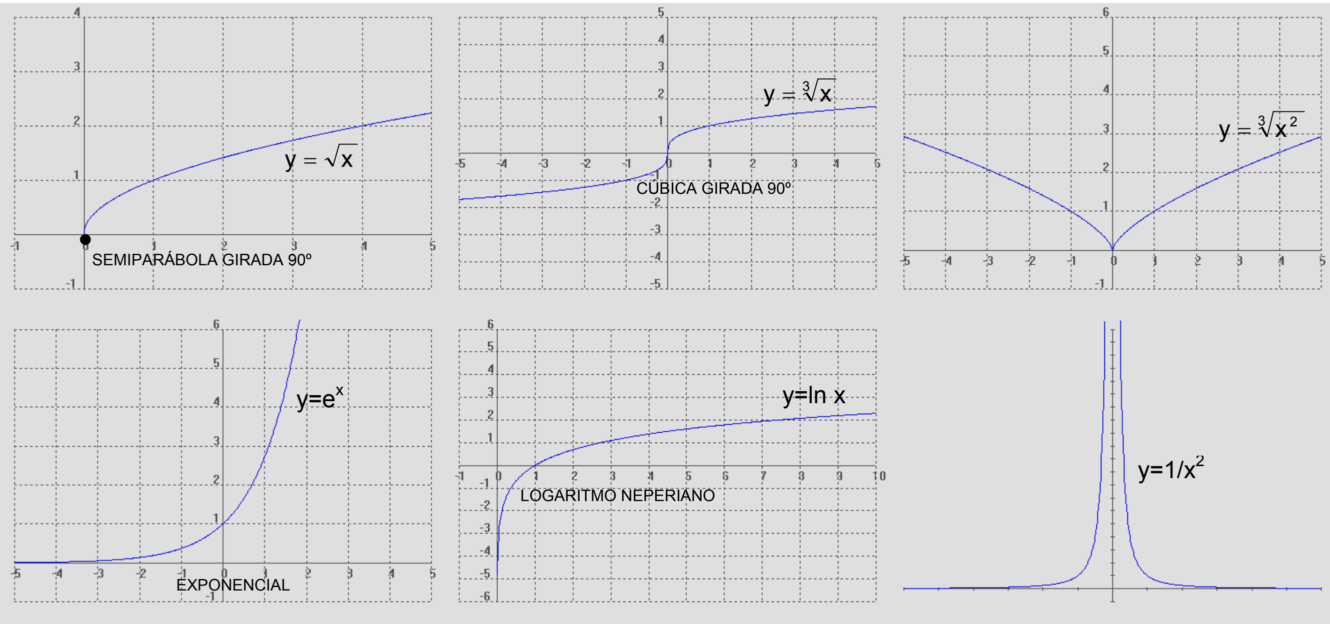
En general, la gráfica de y=|f(x)| se obtiene reflejando la de f(x) respecto al eje OY en el semiplano superior.

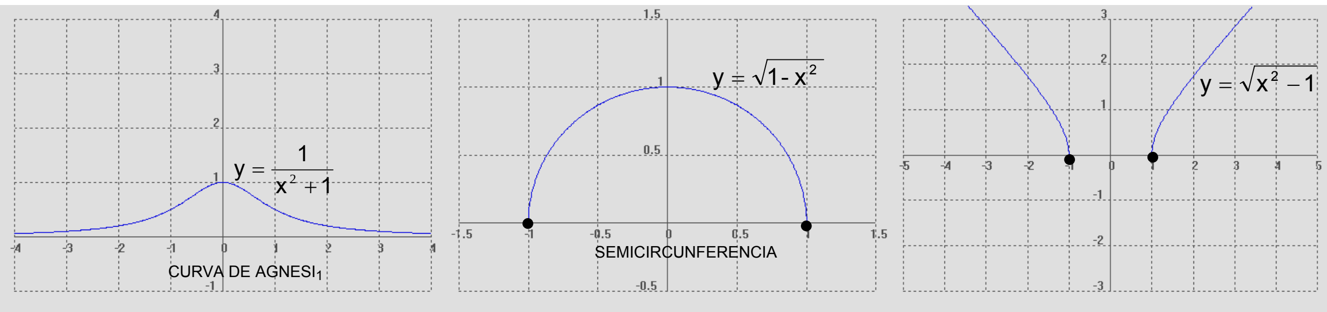


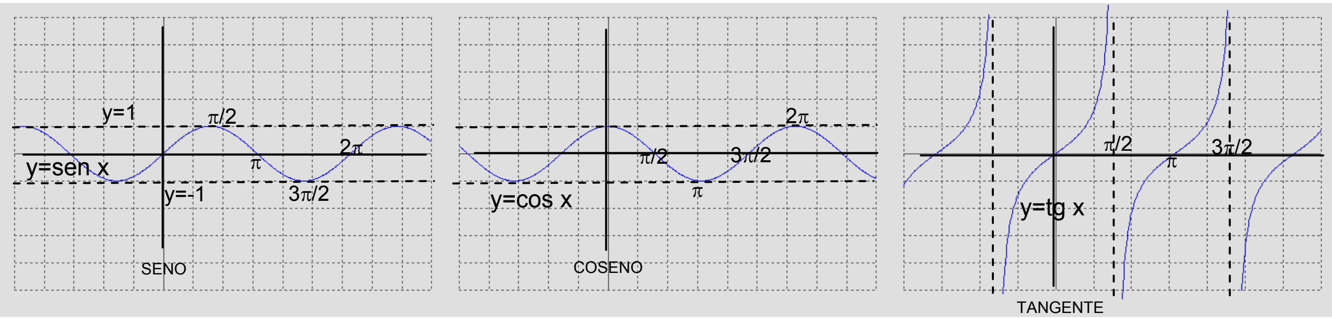
En general,

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

donde c≠0, es una hipérbola.






y=1
π/2
y=sen x
π
2π
y=-1
3π/2
SENO
2π
π/2
3π/2
y=cos x
π
COSENO
π/2
3π/2
π
y=tg x
TANGENTE