

MATRIZ INVERSA

Sea A una matriz cuadrada de orden n . Otra matriz cuadrada B de orden n se dice que es la matriz inversa de A si se cumple que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Se escribe entonces $B = A^{-1}$.

Si A y B son dos matrices cuadradas tales que $A \cdot B = I$, automáticamente se cumple $B \cdot A = I$.

$$A^{-1} \text{ inversa de } A \Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Las matrices cuadradas que tienen inversa se llaman matrices **regulares** o invertibles.

Las matrices cuadradas que no tienen matriz inversa se llaman matrices **singulares**.

Propiedades

Si A y B son matrices regulares, se cumple:

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$	$(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$	$(A^{-1})^{-1} = A$	$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$	$I^{-1} = I$
--	---	---------------------	---------------------------	--------------

Cálculo de la matriz inversa mediante determinantes

Una matriz cuadrada A tiene inversa $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

Menor complementario de un elemento

El menor complementario de un elemento a_{ij} de una matriz cuadrada es el determinante de la matriz que obtenemos al suprimir la fila y la columna de dicho elemento. Lo representamos por M_{ij} .

Adjunto de un elemento

El adjunto de un elemento a_{ij} es el menor complementario de dicho elemento multiplicado por 1 ó -1 según que la suma de sus subíndices (fila y columna) sea par o impar. Lo representamos por A_{ij} .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & \text{si } i+j \text{ es par} \\ -M_{ij} & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

Matriz Adjunta

Es la matriz que obtenemos al sustituir cada elemento por su adjunto.

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

EJEMPLOS

1) Calcula la matriz inversa de la

$$\text{matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A_{11} = 7 \quad A_{12} = -2$$

$$A_{21} = -3 \quad A_{22} = 1$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c.q.c.

2) Halla la matriz inversa de la

$$\text{matriz } A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A_{11} = 5 \quad A_{12} = -2$$

$$A_{21} = -6 \quad A_{22} = 3$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c.q.c.

3) Determina la matriz inversa de la

$$\text{matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$$

El determinante de la matriz es nulo.

A no tiene inversa

4) Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 3 + 2 - 1 - 0 + 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculamos los adjuntos:

$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$	$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$	$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$
$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$	$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$	$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$
$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$	$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$	$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c.q.c.

EJERCICIOS

1. Calcula, si existe, la matriz inversa de:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Determina la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Halla las inversas de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

RECUERDA

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$\nexists A^{-1} \Leftrightarrow |A| = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t)$$

SOLUCIONES

1. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

b) No existe B^{-1}

c) $C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

d) No existe D^{-1}

e) $E^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. a) $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -16 & 6 & -8 \\ -3 & 1 & -1 \\ 12 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

b) No existe B^{-1}

c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 2 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $E^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 13 \\ 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -8 \end{pmatrix}$

c) $C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

d) No existe D^{-1}

e) $E^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$