CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAU**	**Código: 25**
	SETEMBRO 2014	

FÍSICA

Puntuación máxima: Cuestiones 4 puntos (1 cada cuestión, teórica o práctica). Problemas 6 puntos (1 cada apartado).
No se valorará la simple anotación de un ítem cómo solución a las cuestiones; han de ser razonadas.
Se puede usar calculadora siempre que no sea programable ni memorice texto.
El alumno elegirá una de las dos opciones.

OPCIÓN A

C.1.- Un conductor macizo de forma esférica recibe una carga eléctrica ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?: A) La carga se distribuye por todo el conductor. B) El potencial es cero en todos los puntos del conductor. C) En el interior del conductor no hay campo electrostático.

C.2.- Por dos conductores paralelos e indefinidos, separados una distancia *d*, circulan corrientes en sentido contrario de diferente valor, una el doble de la otra. La inducción magnética se anula en un punto del plano de los conductores situado: A) Entre ambos conductores. B) Fuera de los conductores y del lado del conductor que transporta más corriente. C) Fuera de los conductores y del lado del conductor que transporta menos corriente.

C.3.- Si se duplica la frecuencia de la radiación que incide sobre un metal: A) Se duplica la energía cinética de los electrones extraídos. B) La energía cinética de los electrones extraídos no experimenta modificación. C) No es cierta ninguna de las opciones anteriores.

C.4.- Determina la aceleración de la gravedad a partir de los siguientes datos experimentales.

EXPERIENCIA	1ª	2ª	3ª	4ª
Longitud del péndulo (m)	0,90	1,10	1,30	1,50
Tiempo 10 oscilaciones (s)	18,93	21,14	22,87	24,75

P.1.- Ceres es el planeta enano más pequeño del sistema solar y tiene un periodo orbital alrededor del Sol de 4,60 años, una masa de $9{,}43\cdot10^{20}$ kg y un radio de 477 km. Calcular: a) El valor de la intensidad del campo gravitatorio que Ceres crea en su superficie. b) La energía mínima que ha de tener una nave espacial de 1.000 kg de masa para que, saliendo de la superficie, pueda escapar totalmente de la atracción gravitatoria del planeta. c) La distancia media entre Ceres y el Sol, teniendo en cuenta que la distancia media entre la Tierra y el Sol es de $1{,}50\cdot10^{11}$ m y que el período orbital de la Tierra alrededor del Sol es de un año.
(Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²)

P.2.- Un rayo de luz de frecuencia $5\cdot10^{14}$ Hz incide, con un ángulo de incidencia de 30°, sobre una lámina de vidrio de caras plano-paralelas de espesor 10 cm. Sabiendo que el índice de refracción del vidrio es 1,50 y el del aire 1,00:
a) Enuncia las leyes de la refracción y dibuja la marcha de los rayos en el aire y en el interior de la lámina de vidrio.
b) Calcula la longitud de onda de la luz en el aire y en el vidrio, y la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina. c) Halla el ángulo que forma el rayo de luz con la normal cuando emerge de nuevo al aire. DATO: $c = 3{,}00\cdot10^{8}$ m/s.

OPCIÓN B

C.1.- Un planeta gira alrededor del Sol con una trayectoria elíptica. El punto de dicha trayectoria en el que la velocidad orbital del planeta es máxima es: A) En el punto más próximo al Sol. B) En el punto más alejado del Sol. C) Ninguno de los puntos citados.

C.2.- Un protón y una partícula α ($q_\alpha = 2\,q_p$; $m_\alpha = 4\,m_p$) penetran, con la misma velocidad, en un campo magnético uniforme perpendicularmente a las líneas de inducción. Estas partículas: A) Atraviesan el campo sin desviarse. B) El protón describe una órbita circular de mayor radio. C) La partícula alfa describe una órbita circular de mayor radio.

C.3.- En la formación del núcleo de un átomo: A) Disminuye la masa y se desprende energía. B) Aumenta la masa y se absorbe energía. C) En unos casos sucede la opción A) y en otros casos la B).

C.4.- En el laboratorio trabajas con lentes convergentes y recoges en una pantalla las imágenes de un objeto. Explica lo que sucede, ayudándote del diagrama de rayos, cuando sitúas el objeto a una distancia de la lente inferior a su distancia focal.

P.1.- Se cuelga un cuerpo de 10 kg de masa de un resorte y se alarga 2,0 cm. Después se le añaden otros 10 kg y se le da un tirón hacia abajo, de modo que el sistema comienza a oscilar con una amplitud de 3,0 cm. a) Calcula la constante elástica del resorte y la frecuencia del movimiento. b) Escribe, en función del tiempo, las ecuaciones de la elongación, velocidad, aceleración y fuerza. c) Calcula la energía cinética y la energía potencial elástica a los 2 s de haber empezado a oscilar. ($g = 9{,}8$ m/s²)

P.2.- Dos cargas puntuales iguales de +2 μC se encuentran en los puntos (0, 1) m y (0, -1) m. Calcula: a) El vector campo y el potencial electrostático en el punto (-3, 0) m. b) Halla el trabajo necesario para trasladar una carga de +3 μC desde el infinito al citado punto. Si en el punto (-3, 0) m se abandona una carga de -2 μC y masa l g: c) Calcula su velocidad en el origen de coordenadas. DATO: $K = 9\cdot10^{9}$ N·m²·C⁻²

Soluciones

OPCIÓN A

C.1.- Un conductor macizo de forma esférica recibe una carga eléctrica ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?:
A) La carga se distribuye por todo el conductor.
B) El potencial es cero en todos los puntos del conductor.
C) En el interior del conductor no hay campo electrostático.

Solución: C

La intensidad $\overline{\boldsymbol{E}}$ de campo electrostático en el interior de un conductor metálico en equilibrio es nulo. Si no fuese así, las cargas se desplazarían debido a la fuerza del campo.
Como la diferencia de potencial entre dos puntos $V_A - V_B$ es:

$$V_A - V_B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E}\, \mathrm{d}\,\vec{r}$$

Al ser nula la intensidad del campo, también lo será la diferencia de potencial entre dos puntos,

$$V_A - V_B = 0$$

o sea, el potencial será constante.

$$V_A = V_B$$

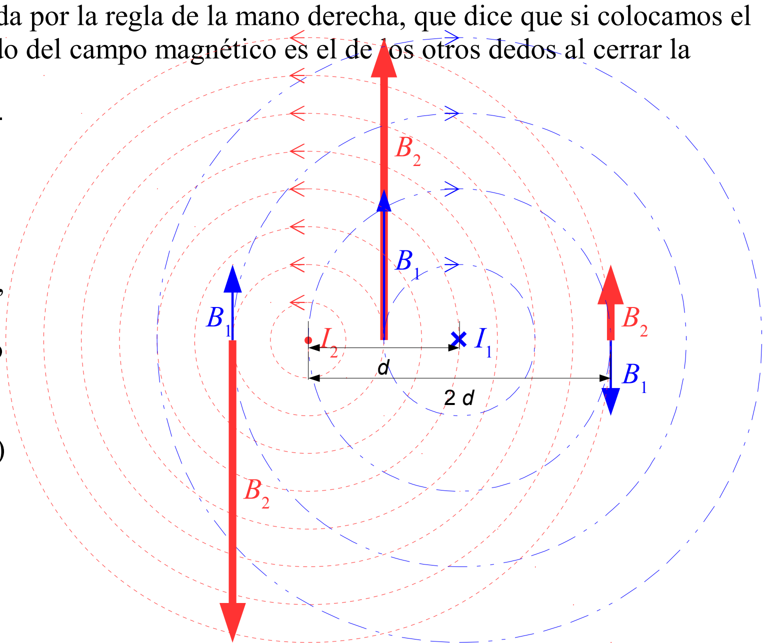
C.2.- Por dos conductores paralelos e indefinidos, separados una distancia *d*, circulan corrientes en sentido contrario de diferente valor, una el doble de la otra. La inducción magnética se anula en un punto del plano de los conductores situado:
A) Entre ambos conductores.
B) Fuera de los conductores y del lado del conductor que transporta más corriente.
C) Fuera de los conductores y del lado del conductor que transporta menos corriente.

Solución: C

La ley de Biot-Savart dice que el campo magnético creado en un punto por un conductor rectilíneo indefinido por el que pasa una intensidad de corriente I, en un punto que se encuentra a una distancia d del conductor es directamente proporcional a la intensidad de corriente e inversamente proporcional a la distancia a la que se encuentra el punto del conductor.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\,\pi\, d}$$

Las líneas del campo magnético son circulares alrededor del conductor.
La dirección del campo magnético viene dada por la regla de la mano derecha, que dice que si colocamos el pulgar en el sentido de la corriente, el sentido del campo magnético es el de los otros dedos al cerrar la mano.
En la figura se representan los campos magnéticos creados por los dos conductores, el que lleva la corriente I_1 hacia dentro y el que lleva la corriente I_2 hacia afuera y del doble de intensidad.
En la zona situada entre ambos conductores, los campos magnéticos creados por las corrientes paralelas de los hilos son del mismo sentido, por lo que el campo resultante nunca será nulo.
En la zona exterior del lado de I_2 (izquierda)



que transporta el doble de corriente, el campo magnético B_2 creado por la corriente de ese conductor siempre será mayor que el creado por el de I_1, que se encuentra más alejado.
En la zona exterior del lado de I_1 (derecha), los puntos se encuentran más cerca del conductor 1 que del conductor 2, y los campos magnéticos de ambos pueden ser del mismo valor, y como son de sentido opuesto, pueden anularse en algún punto.
La distancia x de este punto situado al conductor que lleva I_2 debe cumplir la condición

$$B_2 = B_1$$

$$\frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x-d)}$$

$$(x - d)\ I_2 = x \cdot I_1$$

y como $I_2 = 2\ I_1$, queda

$$(x - d)\ 2\ \cancel{I_1} = x \cdot \cancel{I_1}$$

$$x = 2\ d$$

C.3.- Si se duplica la frecuencia de la radiación que incide sobre un metal:
A) Se duplica la energía cinética de los electrones extraídos.
B) La energía cinética de los electrones extraídos no experimenta modificación.
C) No es cierta ninguna de las opciones anteriores.

Solución: C

En la interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico la luz se pode considerar como un haz de partículas llamadas *fotones*. La energía E_f que lleva un fotón de frecuencia f es:

$$E_f = h \cdot f$$

en la que h es la constante de Planck y tiene un valor muy pequeño: $h = 6{,}63\times10^{-34}$ J·s
El efecto fotoeléctrico se produce cuando cada fotón choca con un electrón y le transmite toda su energía.
La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

en la que E_f representa la energía del fotón incidente, W_e el trabajo de extracción del metal y E_c la energía cinética máxima de los electrones (fotoelectrones) emitidos.
La energía cinética máxima de los electrones emitidos será:

$$E_c = E_f - W_e$$

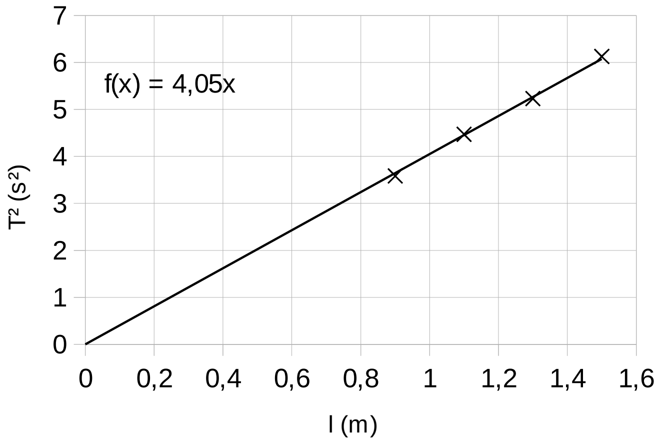
Por lo tanto, si se duplica la frecuencia de la radiación incidente, se duplica la energía de los fotones, y se hace mayor la energía cinética (y la velocidad) de los electrones emitidos.
Por tanto, la opción B es falsa.
Pero como no hay proporcionalidad entre la energía cinética y la energía del fotón, la opción A también es falsa.

C.4.- Determina la aceleración de la gravedad a partir de los siguientes datos experimentales.

EXPERIENCIA	1ª	2ª	3ª	4ª
Longitud del péndulo (m)	0,90	1,10	1,30	1,50
Tiempo 10 oscilaciones (s)	18,93	21,14	22,87	24,75

Solución:

l (m)	t_{10} (s)	T (s)	T^2 (s²)	g (m·s⁻²)
0,90	18,93	1,893	3,59	9,92
1,10	21,14	2,114	4,47	9,72
1,30	22,87	2,287	5,23	9,81
1,50	24,75	2,475	6,13	9,67
			g_m =	9,78



Para obtener una recta hay que representar los cuadrados de los períodos frente a las longitudes: T^2 frente a l.

Si se hace un ajuste por mínimos cuadrados la pendiente queda:

$$T^2 / L = 4\ \pi^2 / g = 4{,}05\ \text{s}^2/\text{m}$$

$$g = 9{,}75\ \text{m·s}^{-2}$$

Si se hace una tabla, calculando el valor de g de la expresión, $g = 4\ \pi^2\ L / T^2$, y se determina el valor medio de g se obtiene un resultado similar (g_m = 9,78 m·s⁻²)

P.1.- Ceres es el planeta enano más pequeño del sistema solar y tiene un periodo orbital alrededor del Sol de 4,60 años, una masa de 9,43×10²⁰ kg y un radio de 477 km. Calcula:

a) El valor de la intensidad del campo gravitatorio que Ceres crea en su superficie.

b) La energía mínima que ha de tener una nave espacial de 1 000 kg de masa para que, saliendo de la superficie, pueda escapar totalmente de la atracción gravitatoria del planeta.

c) La distancia media entre Ceres y el Sol, teniendo en cuenta que la distancia media entre la Tierra y el Sol es de 1,50×10¹¹ m y que el período orbital de la Tierra alrededor del Sol es de un año.

Dato: G = 6,67×10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²

Rta.: a) g_C = 0,277 m/s²; b) E = 1,32×10⁸ J; c) d_C = 4,15×10¹¹ m

Datos	***Cifras significativas: 3***
Período orbital de Ceres	T_C = 4,60 años = 1,45×10⁸ s
Masa de Ceres	M = 9,43×10²⁰ kg
Radio de Ceres	R = 477 km = 4,77×10⁵ m
Masa de la nave espacial	m = 1 000 kg
Distancia de la Tierra al Sol	r_T = 1,50×10¹¹ m
Período orbital de la Tierra	T_T = 1,00 años = 3,16×10⁷ s
Constante de la gravitación universal	G = 6,67×10⁻¹¹ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Ceres	g_C
Energía de la nave espacial en la superficie de Ceres para escapar	ΔE
Distancia media entre Ceres y el Sol	r_C
Otros símbolos	
Masa del Sol	M_T
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce el Sol esférico sobre un planeta puntual)	$F_G = G \dfrac{M_S m}{r_{\text{órb}}^2}$
Intensidad del campo gravitatorio creado por una masa esférica M a una distancia r de su centro	$g = G \dfrac{M}{r^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \dfrac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$

Ecuaciones

Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v=\frac{2\pi r}{T}$
Energía cinética	$E_c = \frac{1}{2} m v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M_T m}{r_{órb}}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) La intensidad del campo gravitatorio creado por la masa esférica M del planeta (enano) Ceres en su superficie, a una distancia R de su centro es:

$$g=G\frac{M}{R^2}=6,67\times10^{-11}\,\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}\frac{9,43\times10^{20}\text{ kg}}{(4,77\times10^5\text{ m})^2}=0,277\text{ m/s}^2$$

a) La energía potencial de la nave espacial en la superficie de Ceres valdrá:

$$E_p=-G\frac{M_C m}{R}=-6,67\times10^{-11}\,\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}\frac{9,43\times10^{20}\text{ kg}\cdot 1\,000\text{ kg}}{4,77\times10^5\text{ m}}=-1,32\times10^8\text{ J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.
La energía potencial de la nave espacial a una distancia muy grande de Ceres será nula.
La energía mínima que ha de tener en la superficie será la que corresponde a una energía cinética nula muy lejos de Ceres.
Por tanto la energía mecánica que tendrá la nave espacial muy lejos de Ceres será nula.
La energía que ha tener será:

$$\Delta E = E_\infty - E_p = 0 - (-1,32\times10^8\text{ J}) = 1,32\times10^8\text{ J}$$

c) Por la segunda ley de Newton, la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza:

$$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$$

Tanto la Tierra como Ceres describen trayectorias aproximadamente circulares alrededor del Sol con velocidades de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N.

$$a_N=\frac{v^2}{r}$$

Como la fuerza resultante es la gravitatoria entre el Sol y el planeta,

$$F_G=G\frac{M_S m}{r_{órb}^2}$$

queda

$$m\frac{v^2}{r_{órb}}=G\frac{M_S m}{r_{órb}^2}$$

Escribiendo la velocidad en función del período

$$v=\frac{2\pi r}{T}$$

y sustituyendo, quedaría

$$\left(\frac{2\pi r_{órb}}{T}\right)^2=\frac{G M_S}{r_{órb}}$$

$$\frac{r_{\text{órb}}^{3}}{T^{2}}=\frac{G M_{\mathrm{S}}}{4 \pi^{2}}$$

Aplicando esta ecuación tanto a la Tierra como a Ceres y dividiendo una entre la otra nos quedaría la tercera ley de Kepler

$$\frac{r_{\mathrm{T}}^{3}}{T_{\mathrm{T}}^{2}}=\frac{r_{\mathrm{C}}^{3}}{T_{\mathrm{C}}^{2}}$$

Aplicando esta ley entre la Tierra y Ceres

$$\frac{\left(1,50 \times 10^{11}\ [\mathrm{m}]\right)^{3}}{(1\ [\text{año}])^{2}}=\frac{r_{\mathrm{C}}^{3}}{(4,60\ [\text{año}])^{2}}$$

$$r_{\mathrm{C}}=1,50 \times 10^{11}\ [\mathrm{m}] \sqrt[3]{4,60^{2}}=4,15 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$$

Análisis: El radio calculado de la órbita de Ceres sale mayor que el de la Tierra, como cabe esperar.
(r_C = 4,15×10^{11} m) > (r_T = 1,50×10^{11} m)

P.2.- Un rayo de luz de frecuencia 5×10^{14} Hz incide, con un ángulo de incidencia de 30°, sobre una lámina de vidrio de caras plano-paralelas de espesor 10 cm. Sabiendo que el índice de refracción del vidrio es 1,50 y el del aire 1,00:

a) Enuncia las leyes de la refracción y dibuja la marcha de los rayos en el aire y en el interior de la lámina de vidrio.

b) Calcula la longitud de onda de la luz en el aire y en el vidrio, y la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina.

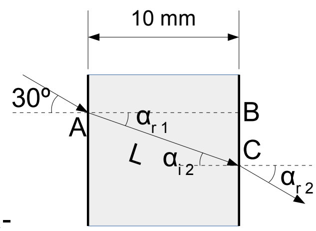
c) Halla el ángulo que forma el rayo de luz con la normal cuando emerge de nuevo al aire.

Dato: *c* = 3,00×10^8 m/s.

Rta.: b) λ_{aire} = 6,00×10^{-7} m; λ_{vidrio} = 4,00×10^{-7} m; L = 10,6 cm; c) $\alpha_{r\,2}$ = 30,0º

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia del rayo de luz	f = 5,00×10^{14} Hz
Ángulo de incidencia	α_i = 30,0º
Espesor de la lámina de vidrio	e = 10,0 cm = 0,100 m
Índice de refracción del vidrio	n_v = 1,50
Índice de refracción del aire	n_a = 1,00
Velocidad de la luz en el vacío	c = 3,00×10^8 m/s
Incógnitas	
Longitud de onda de luz en el aire y en el vidrio	λ_a, λ_v
Longitud recorrida por el rayo de luz en el interior de la lámina	L
Ángulo de desviación del rayo al salir de la lámina	$\alpha_{r\,2}$
Ecuaciones	
Índice de refracción de un medio en el que la luz se desplaza a la velocidad v_{medio}	$n_{\text{medio}}=\frac{c}{v_{\text{medio}}}$
Relación entre la velocidad v, la longitud de onda λ y la frecuencia f	$v = \lambda \cdot f$
Ley de Snell de la refracción	n_i sen α_i = n_r sen α_r

Solución:



a) Las leyes de Snell de la refracción son:
1ª El rayo incidente, el rayo refractado y la normal están en el mismo plano.
2ª La relación matemática entre los índices de refracción n_i y n_r de los medios incidente y refractado y los ángulos de incidencia y refracción α_i y α_r, es:

$$n_i \text{ sen } \alpha_i = n_r \text{ sen } \alpha_r$$

En la figura se puede ver el rayo incidente que forma un primer ángulo de incidencia de 30º, luego el rayo refractado que forma primer ángulo de refracción $\alpha_{r\,1}$, luego el segundo ángulo de incidencia $\alpha_{i\,2}$ y el segundo ángulo de refracción $\alpha_{r\,2}$ al salir el rayo de luz de la lámina.

b) La velocidad de la luz en el aire es:

$$v_{\text{aire}}=\frac{c}{n_{\text{aire}}}=\frac{3{,}00\times10^{8}\ \text{m/s}}{1{,}00}=3{,}00\times10^{8}\ \text{m/s}$$

Por tanto, la longitud de onda de la luz en el aire es:

$$\lambda_{\text{aire}}=\frac{v_{\text{aire}}}{f}=\frac{3{,}00\times10^{8}\ \text{m/s}}{5{,}00\times10^{14}\ \text{s}^{-1}}=6{,}00\times10^{-7}\ \text{m}$$

La velocidad de la luz en el vidrio es:

$$v_{\text{vidrio}}=\frac{c}{n_{\text{vidrio}}}=\frac{3{,}00\times10^{8}\ \text{m/s}}{1{,}50}=2{,}00\times10^{8}\ \text{m/s}$$

Por tanto, la longitud de onda de la luz en el vidrio es:

$$\lambda_{\text{vidrio}}=\frac{v_{\text{vidrio}}}{f}=\frac{2{,}00\times10^{8}\ \text{m/s}}{5{,}00\times10^{14}\ \text{s}^{-1}}=4{,}00\times10^{-7}\ \text{m}$$

Como el espesor de la lámina vele 10 cm, la longitud recorrida por el rayo es la hipotenusa del triángulo ABC.
El primer ángulo de refracción $\alpha_{r\,1}$ se puede calcular aplicando la ley de Snell

$$1{,}00 \cdot \text{sen } 30^{\circ} = 1{,}50 \cdot \text{sen } \alpha_{r\,1}$$

$$\text{sen}\,\alpha_{r\,1}=\frac{1{,}00\cdot\text{sen}\,30^{\circ}}{1{,}50}=0{,}333$$

$$\alpha_{r\,1} = \text{arc sen } 0{,}333 = 19{,}5^{\circ}$$

Por tanto la hipotenusa *L* vale

$$L=\frac{e}{\cos\alpha_{r\,1}}=\frac{10{,}0\ \text{cm}}{\cos 19{,}5^{\circ}}=10{,}6\ \text{cm}$$

c) Como la lámina de vidrio es de caras paralelas, el segundo ángulo de incidencia $\alpha_{i\,2}$ es igual al primer ángulo de refracción:

$$\alpha_{i\,2} = \alpha_{r\,1} = 19{,}5^{\circ}$$

Para calcular el ángulo con el que sale de la lámina, se vuelve a aplicar la ley de Snell entre el vidrio (que ahora es el medio incidente) y el aire (que es el medio refractado):

$$1{,}50 \cdot \text{sen } 19{,}5^{\circ} = 1{,}00 \cdot \text{sen } \alpha_{r\,2}$$

$$\text{sen}\,\alpha_{r\,2}=\frac{1{,}50\cdot\text{sen}\,19{,}5^{\circ}}{1{,}00}=0{,}500$$

$$\alpha_{r\,2} = \text{arc sen } 0{,}500 = 30{,}0^{\circ}$$

Análisis: Este resultado es correcto porque se sabe que el rayo sale paralelo al rayo incidente original.

OPCIÓN B

C.1.- Un planeta gira alrededor del Sol con una trayectoria elíptica. El punto de dicha trayectoria en el que la velocidad orbital del planeta es máxima es:
A) En el punto más próximo al Sol.
B) En el punto más alejado del Sol.
C) Ninguno de los puntos citados.

Solución: A

La velocidad areolar de un planeta es el área que barre el radiovector que une el Sol con el planeta en la unidad de tiempo.

La segunda ley de Kepler puede enunciarse así:
«El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales»
O sea, que la velocidad areolar es constante.

En un sistema de referencia con el Sol en el origen de coordenadas, la velocidad areolar será la derivada del área barrida por el vector de posición del planeta en la unidad de tiempo:

$$\vec{v}_{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

El área barrida en un tiempo muy pequeño dt, es la mitad del producto vectorial del vector de posición $\bar{r}$ del planeta por su vector desplazamiento $d\,\bar{r}$.

$$\mathrm{d}\vec{A}=\frac{1}{2}(\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{r})$$

por lo que la velocidad areolar puede expresarse así:

$$\vec{v}_{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}$$

en el que $\bar{v}$ es el vector velocidad del planeta.
Como la velocidad areolar es constante, la expresión anterior se puede escribir en módulos:

$$|\bar{r}|\cdot|\bar{v}|\operatorname{sen}\varphi=\text{constante}$$

Despreciando las variaciones del ángulo φ, entre el vector de posición y el vector velocidad, cuanto menor sea la distancia r entre el planeta y el Sol, mayor será su velocidad.

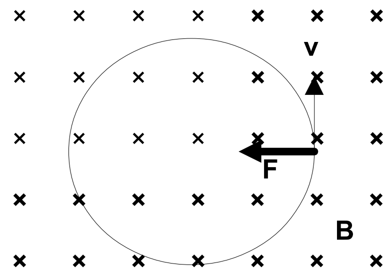
C.2.- Un protón y una partícula α (q_α = 2 q_p; m_α = 4 m_p) penetran, con la misma velocidad, en un campo magnético uniforme perpendicularmente a las líneas de inducción. Estas partículas:
A) Atraviesan el campo sin desviarse.
B) El protón describe una órbita circular de mayor radio.
C) La partícula alfa describe una órbita circular de mayor radio.

Solución: C

La fuerza magnética $\bar{F}_B$ sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\bar{B}$ con una velocidad $\bar{v}$ viene dada por la ley de Lorentz:

$$\bar{F}_B = q\,(\bar{v}\times\bar{B})$$

Esta fuerza es perpendicular en todos los puntos a la dirección de avance de la partícula, por lo que describe trayectoria circular con velocidad de valor constante ya que la aceleración sólo tiene componente normal a_{N}.
Si sólo actúa la fuerza magnética:



$$\sum\bar{F}=\bar{F}_B$$

aplicando la 2ª ley de Newton

$$\sum\bar{F}=m\cdot\bar{a}$$

$$F_B=m\,a=m\,a_{\mathrm{N}}=m\frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q|B\,v\operatorname{sen}\varphi=m\frac{v^2}{R}$$

Si las partículas entran perpendicularmente al campo, sen φ = 1.
Despejando el radio R

$$R=\frac{m\cdot v}{q\cdot B}$$

Como la velocidad es la misma y el campo magnético es el mismo, aplicando esta expresión tanto al protón como a la partícula α y dividiendo una entre la otra queda:

$$\frac{R_\alpha}{R_\text{p}}=\frac{\dfrac{m_\alpha \cdot v}{q_\alpha \cdot B}}{\dfrac{m_\text{p} \cdot v}{q_\text{p} \cdot B}}=\frac{m_\alpha \cdot q_\text{p}}{m_\text{p} \cdot q_\alpha}=\frac{4\, m_\text{p} \cdot q_\text{p}}{m_\text{p} \cdot 2\, q_\text{p}}=2$$

$$R_\alpha = 2\ R_\text{p}$$

El radio de la circunferencia descrita por la partícula alfa es el doble que el de la circunferencia descrita por protón.

C.3.- En la formación del núcleo de un átomo:
A) Disminuye la masa y se desprende energía.
B) Aumenta la masa y se absorbe energía.
C) En unos casos sucede la opción A y en otros casos la B.

Solución: A

La masa del núcleo es siempre inferior a la suma de las masas de los nucleones que lo componen. La diferencia entre la masa del núcleo y los nucleones se llama defecto de masa «Δm».
El proceso hipotético de la formación de un núcleo a partir de la unión de los protones y neutrones que lo forman desprende una gran cantidad de energía que procede de la transformación del defecto de masa «Δm» en energía «E», según la ecuación de Einstein.

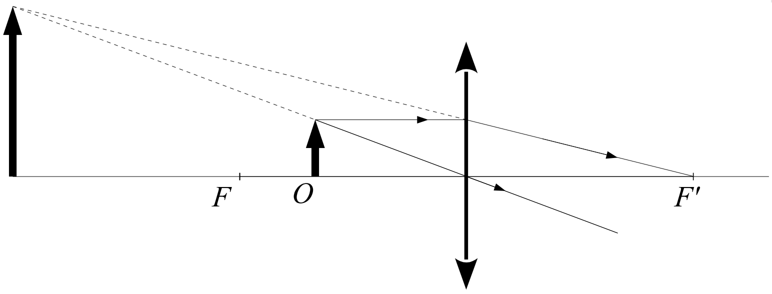
$$E = \Delta m \cdot c^2$$

en la que «c» es la velocidad de la luz.
A esta energía se la conoce como energía de enlace y, dividida por en número de nucleones, como energía de enlace por nucleón.
Esta energía de enlace por nucleón aumenta con el número atómico en los núcleos más ligeros hasta alcanzar un máximo en el hierro, a partir del cual desciendo ligeramente. Esto indica que el núcleo de hierro es el más estable.
En realidad los núcleos de los átomos se forman por reacciones de fusión nuclear o bien en el interior de las estrellas, los anteriores al hierro, o bien en la explosión de supernovas, los posteriores.

C.4.- En el laboratorio trabajas con lentes convergentes y recoges en una pantalla las imágenes de un objeto. Explica lo que sucede, ayudándote del diagrama de rayos, cuando sitúas el objeto a una distancia de la lente inferior a su distancia focal.

Solución:

Si colocamos el objeto a la distancia inferior a la distancia focal, la imagen se forma antes de la lente, es virtual y no se puede recoger en una pantalla.



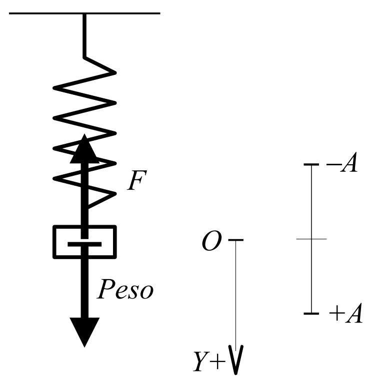
P.1.- Se cuelga un cuerpo de 10 kg de masa de un resorte y se alarga 2,0 cm. Después se le añaden otros 10 kg y se le da un tirón hacia abajo, de modo que el sistema comienza a oscilar con una amplitud de 3,0 cm.
a) Calcula la constante elástica del resorte y la frecuencia del movimiento.
b) Escribe, en función del tiempo, las ecuaciones de la elongación, velocidad, aceleración y fuerza.
c) Calcula la energía cinética y la energía potencial elástica a los 2 s de haber empezado a

oscilar.
Dato: g = 9,8 m/s²

Rta.: a) k = 4 900 N/m; f = 2,49 Hz; b) x = 0,0300 cos(15,7 t) (m); v = -0,470 sen(15,7 t) (m/s); a = -7,35 cos(15,7 t) (m/s²); F = -147 cos(15,7 t) (N); c) E_c = 0,0270 J; E_p = 2,18 J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que se cuelga del muelle	m_0 = 10,0 kg
Alargamiento	Δy = 2,00 cm = 0,0200 m
Masa que realiza el M.A.S.	m = 20,0 kg
Posición inicial	y_0 = 3,00 cm = 0,0300 m
Amplitud (elongación máxima)	$A = y_0$ = 0,0300 m
Tiempo para calcular la energía	t = 2,00 s
Aceleración de la gravedad	g = 9,80 m/s²
Incógnitas	
Constante elástica del resorte	k
Frecuencia del movimiento	f
Ecuaciones del movimiento armónico:	y, v, a, F
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Velocidad máxima	$v_{\text{máx}}$
Aceleración máxima	$a_{\text{máx}}$
Fuerza máxima	$F_{máx}$
Energía cinética cuando t = 2 s	E_c
Energía potencial cuando t = 2 s	E_p
Otros símbolos	
Fuerza recuperadora elástica	F
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$y = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre la aceleración a y la elongación y	$a = -\omega^2 \cdot y$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = -k \cdot y$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot y^2$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2$

Solución:



a) Al colgar la masa de 10,0 kg, en el equilibrio:

$$F = Peso$$

$$k \cdot \Delta y = m_0 \cdot g$$

$$k \cdot 0{,}0200\ [\text{m}] = 10{,}0\ [\text{kg}] \cdot 9{,}80\ [\text{m/s}^2]$$

$$k = 4{,}90 \times 10^3\ \text{N/m}$$

En el movimiento vertical de la masa de 20 kg, la resultante entre la fuerza recuperadora elástica y el peso es una fuerza recuperadora del tipo $F = -k \cdot y$

$$-k \cdot y = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot y)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$4{,}90 \times 10^3\ [\text{N/m}] = 20{,}0\ [\text{kg}]\ \omega^2$$

$$\omega = 15{,}7\ \text{rad/s}$$

Con este valor se calcula la frecuencia f

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{15{,}7\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad}} = 2{,}49\ \text{s}^{-1} = 2{,}49\ \text{Hz}$$

b) S.R. origen O: posición de equilibrio. Eje Y+ vertical en el sentido del alargamiento (hacia abajo)

$$y = 0{,}0300 \cdot \text{sen}(15{,}7 \cdot t + \varphi_0) \text{ [m]}$$

cuando $t = 0$, $y_0 = A = 0{,}0300$ m

$$0{,}0300 = 0{,}0300 \cdot \text{sen } \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \pi /2 \text{ rad}$$

$$y = 0{,}0300 \cdot \text{sen}(15{,}7 \cdot t + \pi /2) \text{ [m]}$$

Como sen $(\varphi + \pi /2) = \cos \varphi$, la ecuación puede escribirse más brevemente:

$$y = 0{,}0300 \cdot \cos(15{,}7 \cdot t) \text{ [m]}$$

La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}0300 \cdot \cos(15{,}7 \cdot t)\}}{\mathrm{d}\,t} = -15{,}7 \cdot 0{,}0300 \cdot \text{sen}(15{,}7 \cdot t) = -0{,}470 \cdot \text{sen}(15{,}7 \cdot t) \quad \text{m/s}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{-0{,}470 \cdot \text{sen}(15{,}7 \cdot t)\}}{\mathrm{d}\,t} = -0{,}470 \cdot 15{,}7 \cdot \cos(15{,}7 \cdot t) = -7{,}35 \cdot \cos(15{,}7 \cdot t) \quad \text{m/s}^2$$

La fuerza elástica es:

$$F = - k \cdot y$$

$$F = -4{,}90\times10^3 \text{ [N/m]} \cdot 0{,}0300 \cdot \cos(15{,}7 \cdot t) \text{ [m]} = -147 \cos(15{,}7 \cdot t) \text{ [N]}$$

b) A los 2,00 s su posición es:

$$y = 0{,}0300 \cdot \cos(15{,}7 \cdot 2{,}00) = 0{,}0298 \text{ m}$$

Energía potencial para $y = 0{,}0298$ m:

$$E_p = ½\, k \cdot y^2 = 4{,}90\times10^3 \text{ [N/m] } (0{,}0298 \text{ [m]})^2 / 2 = 2{,}18 \text{ J}$$

A los 2,00 s su velocidad es:

$$v = -0{,}470 \cdot \text{sen}(15{,}7 \cdot 2{,}00) = 0{,}0520 \text{ m/s}$$

Energía cinética para $v = 0{,}0520$ m/s

$$E_c = E_c = ½\, m \cdot v^2 = 20{,}0 \text{ [kg]} \cdot (0{,}0520 \text{ [m/s]})^2 = 0{,}027 \text{ J}$$

Análisis: Se puede comprobar que la energía mecánica $E = ½\, k \cdot A^2 = 4{,}90\times10^3$ [N/m] $(0{,}0300 \text{ [m]})^2 / 2 =$ 2,21 J *es igual a la suma de las energías cinética y potencial:* 2,21 J = 0,027 J + 2,18 J

P.2.- Dos cargas puntuales iguales de +2 µC se encuentran en los puntos (0, 1) m y (0, -1) m. Calcula:

a) El vector campo y el potencial electrostático en el punto (-3, 0) m.

b) Halla el trabajo necesario para trasladar una carga de +3 µC desde el infinito al citado punto.

Si en el punto (-3, 0) m se abandona una carga de -2 µC y masa 1 g:

c) Calcula su velocidad en el origen de coordenadas.

DATO: *K* = 9×10⁹ N·m²·C⁻²

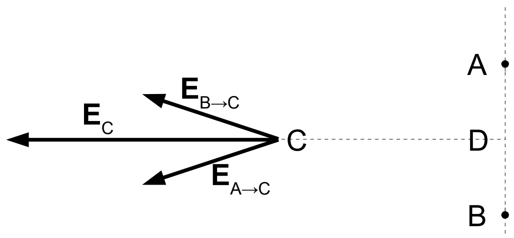
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}} = -3{,}42\times10^3\ \overline{\mathbf{i}}$ N/C; $V = 1{,}14\times10^4$ V; b) $W_{ext} = -W_{campo} = 0{,}0342$ J; c) $\overline{\boldsymbol{v}} = 9{,}92\ \overline{\mathbf{i}}$ m/s

Datos	*Cifras significativas: 3*
Valores de las cargas fijas	$Q = 2{,}00\ \mu\text{C} = 2{,}00\times10^{-6}$ C
Posiciones de las cargas fijas	A (0, 1,00) m
	B (0, -1,00) m
Posición del punto C	C (-3,00, 0) m
Valor de la carga que se traslada desde el infinito	$q_1 = 3{,}00\ \mu\text{C} = 3{,}00\times10^{-6}$ C
Carga que se desplaza hasta el origen	$q_2 = -2{,}00\ \mu\text{C} = -2{,}00\times10^{-6}$ C
Masa de la carga que se desplaza hasta el origen	$m = 1{,}00 \text{ g} = 1{,}00\times10^{-3}$ kg

Datos	***Cifras significativas: 3***
Velocidad inicial en el punto C (se supone)	$v_C = 0$
Punto por el que pasa la carga que se desplaza	D (0, 0) m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^9\ \text{N·m}^2\text{·C}^{-2}$
Incógnitas	
Vector campo electrostático en el punto C	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$
Potencial electrostático en el punto C	V_C
Trabajo necesario para trasladar 3 µC desde el infinito al punto C	$W_{\infty\to C}$
Velocidad que tendrá la carga de -2 µC al pasar por el punto D	v_D
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Ley de Coulomb (aplicada a dos cargas puntuales separadas una distancia *r*)	$\vec{F}=K\frac{Q\,q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{F}_A=\sum\vec{F}_{Ai}$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga *q* desde un punto A hasta otro punto *B*	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual *Q* situada a una distancia *r*	$V=K\frac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$
Energía potencial electrostática de una carga en un punto A	$E_{PA} = q\,V_A$
Energía cinética	$E_c = ½\,m\,v^2$

Solución:

a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores intensidad de campo electrostático y de la suma vectorial que es el campo $\overline{\boldsymbol{E}}_C$ resultante.



Cálculo de distancias:

$$r_{AC}=r_{BC}=\sqrt{(3{,}00\ [\text{m}])^2+(1{,}00\ [\text{m}])^2}=3{,}16\ \text{m}$$

El vector unitario del punto C, $\overline{\boldsymbol{u}}_{AC}$ respecto a A es:

$$\vec{u}_{AC}=\frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|}=\frac{(-3{,}00\,\vec{\mathbf{i}}-1{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\ [\text{m}]}{3{,}16\ [\text{m}]}=-0{,}949\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}316\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto C debido a la carga A es:

$$\vec{E}_{A\to C}=9{,}00\times10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{2\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(3{,}16\ [\text{m}])^2}(-0{,}949\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}343\,\vec{\mathbf{j}})=(-1{,}71\times10^3\,\vec{\mathbf{i}}-5{,}69\times10^2\,\vec{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (-1{,}71\times10^3\ \bar{\mathbf{i}} + 5{,}69\times10^2\ \bar{\mathbf{j}})\ \text{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to C} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (-1{,}71\times10^3\ \bar{\mathbf{i}} - 5{,}69\times10^2\ \bar{\mathbf{j}}\ [\text{N}] + (-1{,}71\times10^3\ \bar{\mathbf{i}} + 5{,}69\times10^2\ \bar{\mathbf{j}})\ [\text{N}] = -3{,}42\times10^3\ \bar{\mathbf{i}}\ \text{N/C}$$

Análisis: Se ve que el campo resultante del cálculo es horizontal hacia la izauierda, coherente con el dibujo que se había hecho.

El potencial en el punto C debido a cada carga vale lo mismo, porque la distancia es la misma (están situadas simétricamente) y el valor de la carga también es el mismo.

$$V_C=V_{A\to C}+V_{B\to C}=2\cdot V_{A\to C}=2\cdot 9{,}00\times10^9\ [\text{N·m}^2\cdot\text{C}^{-2}]\frac{2{,}00\times10^{-6}\ [\text{C}]}{(3{,}16\ [\text{m}])}=1{,}14\times10^4\ \text{V}$$

b) El trabajo realizado por las fuerzas del campo electrostático cuando se mueve una carga q_1 = +3 µC desde el infinito hasta el punto C es la disminución de la energía potencial entre los puntos ∞ y C. Como se toma el infinito como origen de potencial, $V_\infty = 0$, y

$$W_{\infty\to C} = q_1 (V_\infty - V_C) = 3{,}00\times10^{-6} \text{ [C]} \cdot (0 - 1{,}14\times10^4) \text{ [V]} = -0{,}0342 \text{ J}$$

El trabajo necesario para mover una carga $q = +3$ µC desde el infinito hasta el punto C, suponiendo que llegue a C con la misma velocidad que tenía en el infinito, es:

$$W_{\text{exterior}} = -W_{\text{campo}=} = 0{,}0342 \text{ J}$$

c) Como la fuerza electrostática es una fuerza conservativa la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$½\, m\, v_C^2 + q \cdot V_C = ½\, m\, v_D^2 + q \cdot V_D$$

El potencial en el punto D debido a cada carga vale lo mismo, porque la distancia es la misma (están situadas simétricamente) y el valor de la carga también es el mismo.

$$V_D = 2 \cdot V_{A\to D} = 2 \cdot 9{,}00\times10^9 \left[\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}\right] \frac{2{,}00\times10^{-6}\,[\text{C}]}{(1{,}00\,[\text{m}])} = 3{,}60\times10^4 \text{ V}$$

Aplicando el principio de conservación de la energía

$$-2{,}00\times10^{-6} \text{ [C]} \cdot (-1{,}14\times10^4 \text{ [V]}) = (1{,}00\times10^{-3} \text{ [kg]} \cdot v_D^2) / 2 + (-2{,}00\times10^{-6} \text{ [C]}) \cdot (3{,}60\times10^4 \text{ [V]})$$

$$v_D = 9{,}92 \text{ m/s}$$

Como la velocidad es un vector, hay que deducir la dirección y sentido.
Aunque el valor de la intensidad de campo electrostático resultante y la aceleración en el origen es cero, por el valor de la intensidad de campo calculado en el punto C (-3, 0) [m] y el hecho de que pase por el origen, se puede deducir que la aceleración tiene la dirección del eje X en sentido positivo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la línea de la aceleración. Por lo tanto la dirección de la velocidad es la del eje X en sentido positivo

$$\bar{\boldsymbol{v}}_D = 9{,}92\ \bar{\mathbf{i}} \text{ m/s}$$

Cuestiones y problemas de las Pruebas de Acceso a la Universidad (P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo OpenOffice (o LibreOffice) del mismo autor.
Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de traducindote, de Óscar Hermida López.
Se procuró seguir las recomendaciones del Centro Español de Metrología (CEM)