CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAU**	**Código: 25**
	SETEMBRO 2012	

FÍSICA

Puntuación máxima: Cuestiones 4 puntos (1 cada cuestión, teórica o práctica). Problemas 6 puntos (1 cada apartado).
No se valorará la simple anotación de un ítem cómo solución a las cuestiones; han de ser razonadas.
Se puede usar calculadora siempre que no sea programable ni memorice texto.
El alumno elegirá una de las dos opciones.

OPCIÓN A

C.1.- Un punto material describe un movimiento armónico simple de amplitud A. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?: A) La energía cinética es máxima cuando la elongación es nula. b) La energía potencial es constante. c) La energía total depende de la elongación x.

C.2.- La energía relativista total de una masa en reposo: A) Relaciona la longitud de onda con la cantidad de movimiento. B) Representa la equivalencia entre materia y energía. C) Relaciona las incertidumbres de la posición y del momento.

C.3.- Una espira está situada en el plano xy y es atravesada por un campo magnético constante B en dirección del eje z. Se induce una fuerza electromotriz: A) Si la espira se mueve en el plano xy. B) Si la espira gira alrededor de un eje perpendicular a la espira. C) Si se anula gradualmente el campo B.

C.4.- Explica brevemente las diferencias en el procedimiento utilizado para medir la constante elástica k_e de un resorte por los dos métodos: estático y dinámico.

P.1.- La luz del Sol tarda 5×10^2 s en llegar a la Tierra y $2{,}6\times10^3$ s en llegar a Júpiter. Calcula: a) El período de Júpiter orbitando alrededor del Sol. b) La velocidad orbital de Júpiter. c) La masa del Sol. (Se suponen las órbitas circulares). Datos: T_{Tierra} alrededor del Sol: $3{,}15\times10^7$ s; $c = 3\times10^8$ m/s; $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻²)

P.2.- Una lente convergente proyecta sobre una pantalla la imagen de un objeto. El aumento es de 10 y la distancia del objeto a la pantalla es de 2,7 m. a) Determina las posiciones de la imagen y del objeto. b) Dibuja la marcha de los rayos. c) Calcula la potencia de la lente.

OPCIÓN B

C.1.- Según la hipótesis de De Broglie, se cumple que: A) Un protón y un electrón con la misma velocidad tienen asociada la misma onda. B) Dos protones a diferente velocidad tienen asociada la misma onda. C) La longitud de la onda asociada a un protón es inversamente proporcional a su momento lineal.

C.2.- Un campo magnético constante B ejerce una fuerza sobre una carga eléctrica: A) Si la carga está en reposo. B) Si la carga se mueve perpendicularmente a B. C) Si la carga se mueve paralelamente a B.

C.3.- Dos satélites idénticos, A y B, describen órbitas circulares de diferente radio en torno a la Tierra ($R_A < R_B$). Por lo que: A) B tiene mayor energía cinética. B) B tiene mayor energía potencial. C) Los dos tienen la misma energía mecánica.

C.4.- En la práctica de la medida de g con un péndulo, ¿cómo conseguirías que el péndulo duplique el número de oscilaciones por segundo?

P.1.- Una masa de 10 g está unida a un resorte y oscila en un plano horizontal con un movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es $A = 20$ cm, y la elongación en el instante inicial es $x = -20$ cm. Si la energía total es 0,5 J, calcula: a) La constante elástica del resorte. b) La ecuación del movimiento. C) la energía cinética en la posición $x = 15$ cm.

P.2.- Dos cargas eléctricas de +8 μC están situadas en A (0, 0,5) y B (0, -0,5) (en metros). Calcula: a) El campo eléctrico en C(1, 0) y en D(0, 0). b) El potencial eléctrico en C y en D. c) Si una partícula de masa $m = 0{,}5$ g y carga $q = -1$ μC se sitúa en C con una velocidad inicial de 10^3 m/s, calcula la velocidad en D. Nota: sólo intervienen fuerzas eléctricas. (Datos $K = 9\times10^9$ N·m²·C⁻²; 1 μC = 10^{-6} C)

Soluciones

OPCIÓN A

C.1.- Un punto material describe un movimiento armónico simple de amplitud *A*. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?:
A) La energía cinética es máxima cuando la elongación es nula.
B) La energía potencial es constante.
C) La energía total depende de la elongación *x*.

Solución: A

La ecuación de un movimiento armónico simple es:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

donde x es la elongación (separación de la posición de equilibrio), A es la amplitud (máxima elongación), ω es la constante armónica, t es el tiempo y φ_0 es la fase inicial.
Derivando se obtiene la expresión de la velocidad:

$$v=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\,A\,\text{sen}\left(\omega\,t+\varphi_0\right)}{\mathrm{d}t}=A\,\omega\cos\left(\omega\,t+\varphi_0\right)$$

La velocidad es máxima cuando el $\cos(\omega\ t + \varphi_0) = 1$.
Como la energía cinética es

$$E_c = ½\ m\ v^2$$

también será máxima en ese caso.
Cuando el coseno de un ángulo es 1, el seno de ese ángulo vale 0.
Si el seno del ángulo vale 0, la elongación también vale 0. Por tanto la energía cinética es máxima cuando la elongación x es nula

Las otras opciones:
B: Falsa. La fuerza que produce un movimiento armónico simple es una fuerza conservativa (el trabajo que realiza entre dos puntos es independiente del camino seguido) y da lugar a una energía potencial en cada punto de elongación x cuya expresión es:

$$E_p = ½\ k \cdot x^2$$

que depende del valor de la elongación.
C: Falsa. Al ser una fuerza conservativa, la energía mecánica vale lo mismo en cualquier elongación: es constante.

C.2.- La energía relativista total de una masa en reposo:
A) Relaciona la longitud de onda con la cantidad de movimiento.
B) Representa la equivalencia entre materia y energía.
C) Relaciona las incertidumbres de la posición y del momento.

Solución: B

La ecuación

$$E = m \cdot c^2$$

en la que m es la masa en reposo de la partícula, representa la energía en reposo de una partícula. Establece la relación entre masa y energía.
Esta ecuación permite expresar la masa de las partículas en unidades de energía. Por ejemplo, la masa de un protón es de 938 MeV, o la del electrón 0,511 MeV.

Las otras opciones:
A. Falsa. La ecuación que relaciona la longitud de onda λ con la cantidad de movimiento p es la ecuación de Luis de Broglie, de la dualidad onda-partícula.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m v}$$

que permite calcular la longitud de onda asociada a una partícula de masa m que se mueve con una velocidad v.
C. Falsa. El principio de indeterminación (antes conocido como principio de incertidumbre) de Heisenberg podía interpretarse como la imposibilidad de conocer con precisión absoluta dos magnitudes cuyo producto tuviese las unidades de energía · tiempo («acción»). El error en la posición de una partícula Δx multiplicado por el error de su momento (cantidad de movimiento) Δp_x era superior a la constante h de Planck entre 4 π.

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \frac{h}{4\pi}$$

C.3.- Una espira está situada en el plano *xy* y es atravesada por un campo magnético constante *B* en dirección del eje *z*. Se induce una fuerza electromotriz:
A) Si la espira se mueve en el plano *xy*.
B) Si la espira gira alrededor de un eje perpendicular a la espira.
C) Si se anula gradualmente el campo *B*.

Solución: C

La ley de Faraday – Lenz dice que se inducirá una corriente que se oponga a la variación de flujo a través de la espira. La f.e.m. de esa corriente será igual a la variación de flujo magnético respecto al tiempo.

$$\varepsilon = \frac{-\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

El flujo magnético es el producto escalar del vector $\overline{\boldsymbol{B}}$ campo magnético por el vector $\overline{\boldsymbol{S}}$ perpendicular a la superficie delimitada por la espira.

$$\Phi = \overline{\boldsymbol{B}} \cdot \overline{\boldsymbol{S}} = B\,S \cos \varphi$$

Si se anula gradualmente el campo magnético B, se produce una variación de flujo magnético Φ y una fuerza electromotriz inducida, que, por la ley de Lenz, se opondrá a la disminución del flujo magnético que atraviesa la espira.

Las otras opciones:
A: Falsa. Si la espira se mueve en el plano *XY* que la contiene, no se produce variación de campo magnético ni de la superficie atravesada por él (a no ser que la espira salga de la zona del campo). Si el el flujo magnético a través de la espira no varía, no se producirá ninguna f.e.m. Inducida.
C: Falsa. Si la espira gira alrededor del eje *Z*, el flujo magnético no varía, puesto que la superficie atravesada es siempre la misma.

C.4.- Explica brevemente las diferencias en el procedimiento utilizado para medir la constante elástica k_e de un resorte por los dos métodos: estático y dinámico.

Solución:

En el método estático, basado en la ley de Hooke:

$$F = -k \cdot x$$

se cuelgan masas conocidas, pesas de una balanza, de un muelle y se miden los alargamientos producidos.
La constante se determina numéricamente de la media de los cocientes $m \cdot g / \Delta L$
En el método dinámico, basado en la ecuación que relaciona la constante del muelle k con la la constante armónica ω^2 :

$$k = m \cdot \omega^2$$

se aparta una masa que cuelga de un muelle de la posición de equilibrio y se deja oscilar, midiendo el tiempo de 10 oscilaciones, calculando el período de oscilación, T, la constante armónica $\omega^2 = 4\,\pi^2 / T^2$, y la constante del muelle k. Se repite con varias masas conocidas y se halla el valor medio.

P.1.- La luz del Sol tarda 5×10^2 s en llegar a la Tierra y 2,6×10^3 s en llegar a Júpiter. Calcula:
a) El período de Júpiter orbitando alrededor del Sol.
b) La velocidad orbital de Júpiter.
c) La masa del Sol.
Datos: T_{Tierra} alrededor del Sol: 3,15×10^7 s; c = 3×10^8 m/s; G = 6,67×10^{-11} N·m^2·kg^{-2}. (Se suponen las órbitas circulares)

Rta.: a) $T_J = 3{,}74\times10^8$ s; $v = 1{,}31\times10^4$ m/s; b) $M = 2{,}01\times10^{30}$ kg

Datos	***Cifras significativas: 3***
Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra	$t_T = 5{,}00\times10^2$ s = 500 s
Tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a Júpiter	$t_J = 2{,}60\times10^3$ s
Período orbital de la Tierra alrededor del Sol	$T_T = 3{,}15\times10^7$ s
Velocidad de la luz	$c = 3{,}00\times10^8$ m/s
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}
Incógnitas	
Período orbital de Júpiter	T_J
Velocidad orbital de Júpiter	v
Masa del Sol	M
Otros símbolos	
Masa de Júpiter o la Tierra	m
Distancia de un planeta al Sol	r
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce el Sol esférico sobre un planeta puntual)	$F_G = G\dfrac{M_S\, m}{r_{\text{órb}}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N = \dfrac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v = \dfrac{2\pi r}{T}$

Solución:

c) Primero se calculan las distancias de la Tierra al Sol y de Júpiter al Sol, teniendo en cuenta la velocidad de la luz.

$$r_T = c \cdot t_T = 3{,}00\times10^8\ [\text{m/s}] \cdot 5{,}00\times10^2\ [\text{s}] = 1{,}50\times10^{11}\ \text{m}$$

$$r_J = c \cdot t_J = 3{,}00\times10^8\ [\text{m/s}] \cdot 2{,}60\times10^3\ [\text{s}] = 7{,}80\times10^{11}\ \text{m}$$

La velocidad, v, de la Tierra alrededor del Sol es

$$v_T = \frac{2\pi \cdot r_T}{T} = \frac{2\pi \cdot 1{,}50\times10^{11}\ [\text{m}]}{3{,}15\times10^7\ [\text{s}]} = 2{,}99\times10^4\ \text{m/s}$$

Como la única fuerza que actúa sobre la Tierra es la fuerza gravitatoria que ejerce el Sol

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\, a = F_G$$

Suponemos que la Tierra describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v_T^2}{r_T} = G\frac{M\, m}{r_T^2}$$

Despejando la masa M del Sol:

$$M_S = \frac{v_T^2 \cdot r_T}{G} = \frac{(2{,}99\times10^4\ [\text{m/s}])^2 \cdot 1{,}50\times10^{11}\ [\text{m}]}{6{,}67\times10^{-11}\ [\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]} = 2{,}01\times10^{30}\ \text{kg}$$

b) Aplicando la ecuación anterior para calcular la velocidad de Júpiter,

$$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r_J}}=\sqrt{\frac{6{,}67\times 10^{-11}\ [\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}]\cdot 2{,}01\times 10^{30}\ [\mathrm{kg}]}{7{,}80\times 10^{11}\ [\mathrm{m}]}}=1{,}31\times 10^4\ \mathrm{m/s}=13{,}1\ \mathrm{km/s}$$

a) El período se calcula a partir de la velocidad:

$$T_J=\frac{2\,\pi\cdot r_J}{v}=\frac{2\,\pi\cdot 7{,}80\times 10^{11}\ [\mathrm{m}]}{1{,}31\times 10^4\ [\mathrm{m/s}]}=3{,}74\times 10^8\ \mathrm{s}$$

Análisis: La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los radiovectores que unen al Sol con los planetas. A mayor distancia al Sol, mayor período. Si se hubiese aplicado este método, daría $T_J=T_T\sqrt{\frac{r_J^3}{r_T^3}}=3{,}15\times 10^7\ [\mathrm{s}]\cdot\sqrt{\frac{(7{,}8\times 10^{11}\ [\mathrm{m}])^3}{(1{,}5\times 10^{11}\ [\mathrm{m}])^3}}=3{,}74\times 10^8\ \mathrm{s}$

P.2.- Una lente convergente proyecta sobre una pantalla la imagen de un objeto. El aumento es de 10 y la distancia del objeto a la pantalla es de 2,7 m.
a) Determina las posiciones de la imagen y del objeto.
b) Dibuja la marcha de los rayos.
c) Calcula la potencia de la lente.
Rta.: a) s = -0,245 m; s' = 2,45 m; c) P = 4,48 dioptrías

Datos (convenio de signos DIN)	***Cifras significativas: 3***
Aumento de la lente	A_L = 10,0
Distancia entre el objeto y su imagen	d = 2,70 m
Incógnitas	
Posición del objeto y de la imagen	s, s'
Potencial de la lente	P
Otros símbolos	
Distancia focal de la lente	f
Ecuaciones	
Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en las lentes	$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}$
Aumento lateral en las lentes	$A_L=\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}$
Potencia de una lente	$P=\frac{1}{f}$

Solución:

a) Del aumento lateral podemos establecer la relación matemática entre las distancias s del objeto a la lente y s' de la imagen a la lente.

$$A_L=\frac{s'}{s}$$

$$s' = 10{,}0\ s$$

La distancia del objeto a la pantalla (donde se forma la imagen) es la suma de esas dos distancias (sin tener en cuenta los signos):

$$|s| + |s'| = 2{,}70\ \mathrm{m}$$

Teniendo en cuenta que, por el criterio de signos, la distancia del objeto a la lente es negativa, $s < 0$, pero la distancia de la imagen, cuando es real, a la lente es positiva $s' > 0$, queda

$$-s + s' = 2{,}70\ \mathrm{m}$$

Aunque nos dicen que el aumento es 10, el signo correcto es -10, por lo que, la relación con el signo adecuado entre las dos distancias es:

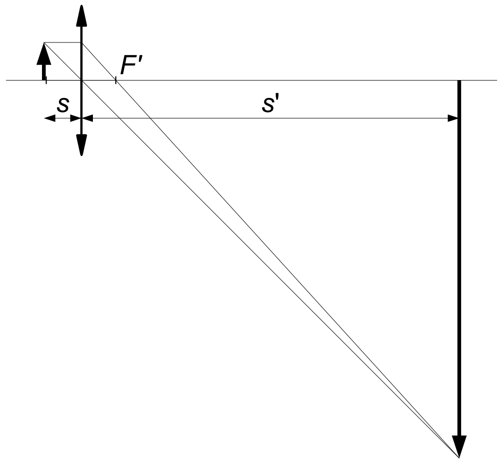
$$s' = -10{,}0\ s$$

Sustituyendo *s*' y despejando *s*, queda

$$-s - 10{,}0\, s = 2{,}70 \text{ m}$$

$$s = \frac{2{,}70\ [\text{m}]}{-11{,}0} = -0{,}245 \text{ m}$$

$$s' = -10{,}0\, s = 2{,}45 \text{ m}$$



b)

c) $\dfrac{1}{2{,}45\ [\text{m}]} - \dfrac{1}{-0{,}245\ [\text{m}]} = \dfrac{1}{f'} = P$

$$P = 4{,}48 \text{ dioptrías}$$

OPCIÓN B

C.1.- Según la hipótesis de De Broglie, se cumple que:
A) Un protón y un electrón con la misma velocidad tienen asociada la misma onda.
B) Dos protones a diferente velocidad tienen asociada la misma onda.
C) La longitud de la onda asociada a un protón es inversamente proporcional a su momento lineal.

Solución: C

De Broglie propuso que en algunos casos el comportamiento de ciertas partículas podría interpretarse como el de ondas cuya longitud de onda asociada λ vendría dada por la expresión:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

en la que *h* es la constante de Planck y *m* la masa de la partícula y *v* su velocidad.
Como *h* es una constante y *m v* es la expresión del momento lineal o cantidad de movimiento, la longitud de la onda asociada a un protón es inversamente proporcional a su momento lineal.

Las otras opciones.
A. Falsa. De la expresión anterior se deduce que la longitud de onda depende de la masa además de la velocidad. Como la masa de un protón es mucho mayor que la del electrón, la longitud de onda asociada a un protón que se mueve a la misma velocidad que un electrón es mucho menor.
B. Falsa. El protón más rápido tendrá menor longitud de onda.

C.2.- Un campo magnético constante *B* ejerce una fuerza sobre una carga eléctrica:
A) Si la carga está en reposo.
B) Si la carga se mueve perpendicularmente a *B*.
C) Si la carga se mueve paralelamente a *B*.

Solución: B

La fuerza $\overline{\boldsymbol{F}}$ sobre una carga eléctrica *q* en movimiento se rige por la ley de Lorentz

$$\overline{\boldsymbol{F}} = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

en la que $\overline{\boldsymbol{v}}$ es la velocidad de la carga y $\overline{\boldsymbol{B}}$ la inducción magnética (intensidad del campo magnético).
El módulo del producto vectorial de los vectores velocidad e inducción magnética es

$$|\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}| = |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{B}}| \cdot \text{sen}\,\varphi$$

donde φ es el ángulo que forman esos vectores. Si son perpendiculares, sen $\varphi = 1$

Las otras opciones.
A. Falsa. Si está en reposo, la velocidad es nula y el producto vectorial también.
C. Falsa. Si son paralelos, el sen $\varphi = 0$ y el producto vectorial es nulo. No hay fuerza.

C.3.- Dos satélites idénticos, A y B, describen órbitas circulares de diferente radio en torno a la Tierra ($R_A < R_B$). Por lo que:
A) B tiene mayor energía cinética.
B) B tiene mayor energía potencial.
C) Los dos tienen la misma energía mecánica.

Solución: B

La energía potencial gravitatoria para un satélite de masa *m* que gira alrededor de la Tierra en una órbita de radio *R*

$$E_p = -G\frac{M_T m}{R}$$

es inversamente proporcional al radio de la órbita, pero como es negativa, cuanto mayor sea el radio de la órbita, mayor será la energía potencial.

$$E_{p\,B} > E_{p\,A}$$

Las otras opciones:
A. Falsa.
La única fuerza que actúa sobre los satélites es la gravitatoria que ejerce la Tierra. Al ser una trayectoria circular, sólo tienen aceleración normal (centrípeta). Por la 2ª ley de Newton:

$$\left|\sum \vec{F}\right| = |\vec{F}_G| = m|\vec{a}| = m\,a_N = m\frac{v_{órb}^2}{r}$$

$$m\frac{v_{órb^2}}{R} = G\frac{M_T m}{R^2}$$

$$v_{órb}^2 = G\frac{M_T}{R}$$

La energía cinética de un satélite de masa *m* que gira alrededor de la Tierra con velocidad *v*

$$E_c = ½\, m\, v^2$$

es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad.
Por tanto, la energía cinética de cada satélite es inversamente proporcional al radio de su órbita: a mayor radio, menor energía cinética.

C. Falsa. La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\cdot v_{órb}^2 + \left(-G\frac{M_T m}{r}\right)$$

Como ya vimos

$$m\frac{v_{órb}^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2}$$

Sustituyendo $m\,v_{órb}^2$ en la expresión de la energía mecánica:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m v_{órb}^2 - G\frac{M_T m}{R} = \frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r} - G\frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{r}$$

donde se ve que la energía mecánica de un satélite en una órbita es inversamente proporcional al radio de la órbita. No pueden ser iguales porque los satélites tienen la misma masa.

C.4.- En la práctica de la medida de *g* con un péndulo ¿cómo conseguirías que el péndulo duplique el número de oscilaciones por segundo?

Solución:

Para conseguir duplicar la frecuencia, o lo que es lo mismo, disminuir a la mitad el período, habría que hacer la longitud del péndulo 4 veces menor, ya que el período de un péndulo ideal viene dado por la ecuación:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Si $l' = l / 4$

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{l/4}{g}}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=\frac{T}{2}$$

P.1.- Una masa de 10 g está unida a un resorte y oscila en un plano horizontal con un movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es A = 20 cm, y la elongación en el instante inicial es x = -20 cm. Si la energía total es 0,5 J, calcula:
a) La constante elástica del resorte.
b) La ecuación del movimiento.
c) La energía cinética en la posición x = 15 cm.
Rta.: a) k = 25 N/m; b) ω = 50 rad/s; c) E_c = 0,219 J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que oscila	m = 10,00 g = 0,0100 kg
Amplitud	A = 20,0 cm = 0,200 m
Posición inicial	x_0 = -20,0 cm = -0,200 m
Energía mecánica	E = 0,500 J
Posición para calcular la energía cinética	x = 15,0 cm = 0,150 m
Incógnitas	
Constante elástica del resorte	k
Ecuación del movimiento (frecuencia angular y fase inicial)	ω, φ_0
Energía cinética en la posición x = 15 cm	E_c
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la frecuencia angular y el período	$\omega = 2\pi / T$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = - k \cdot x$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Relación entre la aceleración a y la elongación x	$a = - \omega^2 \cdot x$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2$

Solución:

a) De la ecuación de la energía mecánica:

$$E = ½\, k \cdot A^2$$

$$k=\frac{2\cdot E}{A^2}=\frac{2\cdot 0{,}500\ [\text{J}]}{(0{,}200\ [\text{m}])^2}=25\ \text{N/m}$$

b) Como sólo actúa la fuerza elástica:

$$-k \cdot x = m \cdot a = m\,(-\omega^2 \cdot x)$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{25\ [\text{N/m}]}{0{,}01\ [\text{kg}]}}=50\ \text{rad/s}$$

Usamos el dato de la posición inicial (x_0 = -0,200 m cuando t = 0) para calcular la fase inicial:

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$-0{,}200\ [\text{m}] = 0{,}200\ [\text{m}]\ \text{sen}(50\ [\text{rad/s}] \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$-1 = \text{sen}\ \varphi_0$$

$$\varphi_0 = \text{arc sen } -1 = 3\ \pi / 2$$

$$x = 0{,}200 \cdot \text{sen}(50 \cdot t + 3\ \pi / 2)\ [\text{m}]$$

c) Teniendo en cuenta que la única fuerza (elástica) es conservativa,

$$E_p = ½\ k \cdot x^2 = 25\ [\text{N/m}] \cdot (0{,}150\ [\text{m}])^2 / 2 = 0{,}281\ \text{J}$$

$$E = E_c + E_p$$

$$E_c = 0,\ 500\ [\text{J}] - 0{,}281\ [\text{J}] = 0{,}219\ \text{J}$$

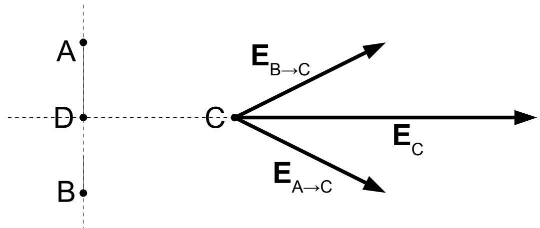
P.2.- Dos cargas eléctricas de +8 μC están situadas en A (0; 0,5) y B (0; -0,5) (en metros). Calcula:
a) El campo eléctrico en C (1,0) y en D (0,0);
b) El potencial eléctrico en C y en D.
c) Si una partícula de masa *m* = 0,5 g y carga *q* = -1 μC se sitúa en C con una velocidad inicial de 10^3 m/s, calcula la velocidad en D.
Nota: sólo intervienen fuerzas eléctricas. Datos *K* = 9×10^9 N·m²·C⁻²; 1 μC = 10^{-6} C

Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}}_C = 1{,}03\times10^5\ \overline{\mathbf{i}}$ N/C; $\overline{\boldsymbol{E}}_D = \overline{\mathbf{0}}$ N/C; b) $V_C = 1{,}29\times10^5$ V; $V_D = 2{,}88\times10^5$ V c) $\overline{\boldsymbol{v}}_D = -1{,}00\times10^3\ \overline{\mathbf{i}}$ m/s

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valor de la carga situada en el punto A: (0, 0,500) m	$Q_{A} = 8{,}00\ \mu C = 8{,}00\times10^{-6}$ C
Valor de la carga situada en el punto B: (0, -0,500) m	$Q_B = 8{,}00\ \mu C = 8{,}00\times10^{-6}$ C
Coordenadas del punto C	$\overline{\boldsymbol{r}}_C = (1{,}00,\ 0{,}00)$ m
Coordenadas del punto D	$\overline{\boldsymbol{r}}_D = (0{,}00,\ 0{,}00)$ m
Masa de la partícula que se desplaza	$m = 0{,}500\ \text{g} = 5{,}00\times10^{-4}$ kg
Carga de la partícula que se desplaza	$q = -1{,}00\ \mu C = -1{,}00\times10^{-6}$ C
Velocidad inicial en el punto C	$v_C = 1{,}00\times10^3$ m/s
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\times10^9\ \text{N·m}^2\text{·C}^{-2}$
Incógnitas	
Intensidades del campo electrostático en los puntos C(1, 0) y D(0, 0)	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$, $\overline{\boldsymbol{E}}_D$
Potenciales electrostáticos en los puntos C y D	V_C, V_D
Velocidad que tendrá al pasar por el punto D	v_D
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Intensidad del campo electrostático en un punto creado por una carga puntual *Q* situada la una distancia *r*	$\vec{E} = K \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{E}_A = \sum \vec{E}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual *Q* situada la una distancia *r*	$V = K \frac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$
Energía potencial electrostática de una carga *q* en un punto A	$E_{PA} = q\ V_A$

Solución:

a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores intensidad de campo electrostático y de la suma vectorial que es el vector $\overline{\boldsymbol{E}}_D$ intensidad de campo resultante.



Cálculo de distancias:

$$r_{AC} = r_{BC} = \sqrt{(0{,}500\ [\text{m}])^2 + (1{,}00\ [\text{m}])^2} = 1{,}12\ \text{m}$$

El vector unitario del punto C (1, 0), $\overline{\boldsymbol{u}}_{AC}$ respecto al punto A es:

$$\vec{u}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|} = \frac{(1{,}00\ \vec{\mathbf{i}} - 0{,}500\ \vec{\mathbf{j}})\ [\text{m}]}{1{,}12\ [\text{m}]} = 0{,}894\ \vec{\mathbf{i}} - 0{,}447\ \vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático debido a la carga de A en el punto C es:

$$\vec{E}_{A\to C}=9{,}00\times 10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^{2}\cdot C^{-2}}]\cdot\frac{8{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}12\ [\mathrm{m}])^{2}}(0{,}894\ \vec{\mathbf{i}}-0{,}447\ \vec{\mathbf{j}})=(5{,}15\times 10^{4}\ \vec{\mathbf{i}}-2{,}58\times 10^{4}\ \vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

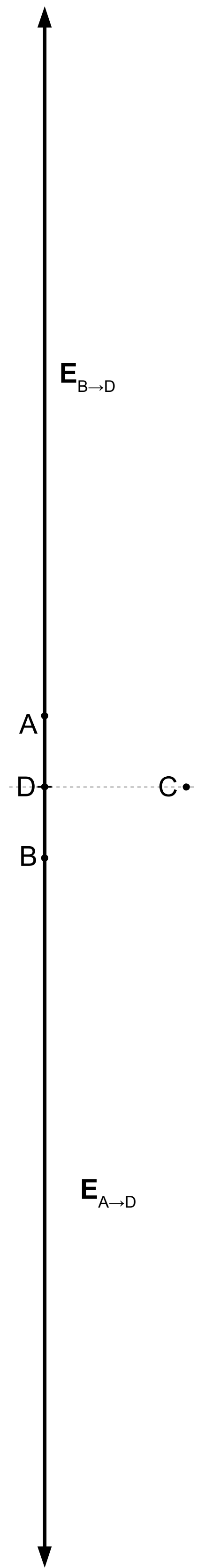
Por simetría, la intensidad de campo electrostático debido a la carga de B en el punto C es:

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (5{,}15\times 10^{4}\ \overline{\mathbf{i}} + 2{,}58\times 10^{4}\ \overline{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición, el campo electrostático en el punto C es

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{C} = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to C} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = 1{,}03\times 10^{5}\ \overline{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: Se ve que el vector intensidad de campo resultante del cálculo es horizontal hacia derecha, coherente con el dibujo que hicimos previamente.



La intensidad de campo electrostático en el punto D (0, 0) debido a la carga en A es:

$$\vec{E}_{A\to D}=9{,}00\times 10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^{2}\cdot C^{-2}}]\cdot\frac{8{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}500\ [\mathrm{m}])^{2}}(-\vec{\mathbf{j}})=-2{,}88\times 10^{5}\ \vec{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

Por simetría, el campo en el punto D debido a la carga situada en B es

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} = 3{,}88\times 10^{5}\ \overline{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{D} = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to D} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to D} = \overline{\mathbf{0}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: Como las distancias y las cargas son iguales, y están situadas simétricamente, la resultante tiene que ser nula.

b) Los potenciales en el punto C debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to C}=V_{B\to C}=9{,}00\times 10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^{2}\cdot C^{-2}}]\frac{8{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(1{,}12\ [\mathrm{m}])}=6{,}44\times 10^{4}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático en el punto C es la suma de ambos:

$$V_C = V_{A\to C} + V_{B\to C} = 2\cdot 6{,}44\times 10^{4}\ [\mathrm{V}] = 1{,}29\times 10^{5}\ \mathrm{V}$$

Los potenciales en el punto D debidos a cada carga valen:

$$V_{A\to D}=V_{B\to D}=9{,}00\times 10^{9}\ [\mathrm{N\cdot m^{2}\cdot C^{-2}}]\frac{8{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}]}{(0{,}500\ [\mathrm{m}])}=1{,}44\times 10^{5}\ \mathrm{V}$$

El potencial electrostático en el punto D es:

$$V_D = V_{A\to D} + V_{B\to D} = 2\cdot 1{,}44\times 10^{5}\ [\mathrm{V}] = 2{,}88\times 10^{5}\ \mathrm{V}$$

c) Como la fuerza electrostática es una fuerza conservativa la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$½\ m\ v_C^2 + q\cdot V_C = ½\ m\ v_D^2 + q\cdot V_D$$

El potencial en el punto D vale:

$$(5{,}00\times 10^{-4}\ [\mathrm{kg}] / 2)\cdot(1{,}00\times 10^{3}\ [\mathrm{m/s}])^2 + (-1{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}])\cdot 1{,}29\times 10^{5}\ [\mathrm{V}] =$$
$$= (5{,}00\times 10^{-4}\ [\mathrm{kg}] / 2)\cdot v_D^2 + (-1{,}00\times 10^{-6}\ [\mathrm{C}])\cdot 2{,}88\times 10^{5}\ [\mathrm{V}]$$

$$v_D = 1{,}00\times 10^{3}\ \mathrm{m/s}$$

Análisis: La velocidad es prácticamente la misma pero un poco mayor ya que la carga negativa es acelerada en sentido contrario al campo eléctrico.
Como la velocidad es un vector, tenemos que deducir la dirección y sentido.
Por la dirección y sentido del vector intensidad de campo entre los puntos C y D, se puede deducir que la aceleración está en la dirección del eje X y en sentido positivo (las cargas negativas sufren una fuerza de sentido opuesto al campo). La única posibilidad de que la

carga que sale del punto C pase por el punto D es que inicialmente se estuviese moviendo en el sentido negativo del eje X. Por lo tanto la dirección de la velocidad es la del eje X y el sentido negativo

$$\overline{\boldsymbol{v}}_{\text{D}} = -1{,}00 \times 10^3\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{m/s}$$

Cuestiones y problemas de las Pruebas de Acceso a la Universidad (P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán, alfbar@bigfoot.com, I.E.S. Elviña, La Coruña
Algunas ecuaciones se han construido con las macros de la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de traducindote, de Óscar Hermida López.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo OpenOffice (o LibreOffice) hecha por Alfonso Barbadillo Marán.