CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAU** **XUÑO 2013**	**Código: 25**

FÍSICA

Puntuación máxima: Cuestiones 4 puntos (1 cada cuestión, teórica o práctica). Problemas 6 puntos (1 cada apartado).
No se valorará la simple anotación de un ítem cómo solución a las cuestiones; han de ser razonadas.
Se puede usar calculadora siempre que no sea programable ni memorice texto.
El alumno elegirá una de las dos opciones.

OPCIÓN A

C.1.- Se dispone de varias cargas eléctricas puntuales. Si en un punto del espacio próximo a las cargas el potencial eléctrico es nulo: A) Puede haber campo eléctrico en ese punto. B) Las líneas del campo se cortan en ese punto. C) El campo no es conservativo.

C.2.- Dos focos O_1 y O_2 emiten ondas en fase de la misma amplitud (A), frecuencia (f) y longitud de onda (λ) que se propagan a la misma velocidad, interfiriendo en un punto P que está a una distancia λ m de O_1 y 3 λ m de O_2. La amplitud resultante en P será: A) Nula. B) A. C) 2 A.

C.3.- Se produce efecto fotoeléctrico cuando fotones de frecuencia f, superior a una frecuencia umbral f_0, inciden sobre ciertos metales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?: A) Se emiten fotones de menor frecuencia. B) Se emiten electrones. C) Hay un cierto retraso temporal entre el instante de la iluminación y el de la emisión de partículas.

C.4.- La constante elástica de un muelle se puede medir experimentalmente mediante el método dinámico. Explica brevemente el procedimiento seguido en el laboratorio.

P.1.- Un satélite de 200 kg describe una órbita circular a 600 km sobre la superficie terrestre: a) Deduce la expresión de la velocidad orbital. b) Calcula el período de giro. c) Calcula la energía mecánica.
(Datos: R_T = 6 400 km; g_0 = 9,81 m/s^2)

P.2.- Un rayo de luz pasa del agua (índice de refracción n = 4/3) al aire (n = 1). Calcula: a) El ángulo de incidencia si los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí. b) El ángulo límite. c) ¿Hay ángulo límite si la luz incide del aire al agua?

OPCIÓN B

C.1.- Un planeta describe una órbita plana y elíptica en torno al Sol. ¿Cuál de las siguientes magnitudes es constante? A) El momento lineal. B) La velocidad areolar. C) La energía cinética.

C.2.- Si se desea obtener una imagen virtual, derecha y menor que el objeto, se usa: A) Un espejo convexo. B) Una lente convergente. C) un espejo cóncavo.

C.3.- En la reacción ${}^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{A}_{Z}\text{X} + 3\,{}^{1}_{0}\text{n}$ se cumple que: A) Es una fusión nuclear. B) Se libera energía correspondiente al defecto de masa. C) El elemento X es ${}^{92}_{35}\text{X}$.

C.4.- En la medida experimental de la aceleración de la gravedad g con un péndulo simple, ¿qué precauciones se deben tomar con respecto a la amplitud de las oscilaciones y con respecto a la medida del periodo de oscilación?

P.1.- Un protón con velocidad $\bar{\boldsymbol{v}} = 5\times10^6\ \bar{\boldsymbol{i}}$ m/s penetra en una zona donde hay un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}} = 1\,\bar{\boldsymbol{j}}$ T.
A) Dibuja la fuerza que actúa sobre el protón y deduce la ecuación para calcular el radio de la órbita.
B) Calcula el número de vueltas en un segundo. C) ¿Varía la energía cinética del protón al entrar en esa zona? (Datos: $m_{\text{protón}} = 1{,}67\times10^{-27}$ kg; $q_{\text{protón}} = 1{,}6\times10^{-19}$ C)

P.2.- Una partícula de masa m = 0,1 kg, sujeta en el extremo de un resorte, oscila en un plano horizontal con un M.A.S., siendo la amplitud A = 0,20 m y la frecuencia f = 5 s^{-1}. En el instante inicial la posición es $x = A$. Calcula para $t = T$/8 s: a) La velocidad y aceleración. b) La energía mecánica. c) La frecuencia con que oscilaría si se duplica la masa.

Soluciones

OPCIÓN A

C.1.- Se dispone de varias cargas eléctricas puntuales. Si en un punto del espacio próximo a las cargas el potencial eléctrico es nulo:
A) Puede haber campo eléctrico en ese punto.
B) Las líneas del campo se cortan en ese punto.
C) El campo no es conservativo.

Solución: A

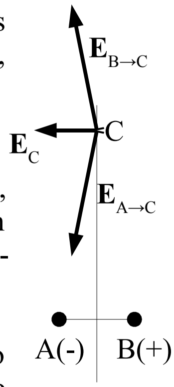
Por ejemplo, en cualquier punto equidistante de dos cargas del mismo valor y distinto signo (dipolo eléctrico).
El potencial electrostático creado por una carga puntual Q en un punto que está a una distancia r de la carga es:

$$V = K\frac{Q}{r}$$

en donde K es la constante electrostática del medio.
Cualquier punto que diste lo mismo de ambas cargas, tendrá un potencial nulo, ya que el potencial en ese punto será la suma de los potenciales creados por cada una de las cargas:

$$V = K\frac{Q}{r} + K\frac{-Q}{r} = 0$$

y las cargas son opuestas y las distancias iguales.
Pero el campo electrostático en el punto no es nulo, pues es la suma vectorial de los vectores campo creados por cada una de las dos cargas que produce una resultante que no es nula, como se puede ver en la figura.

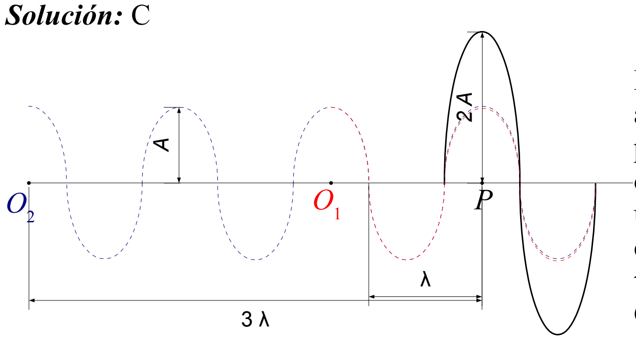


Las otras opciones:
B. Falsa. Una de las propiedades de las líneas de campo es que no se cortan en ningún punto, ya que el campo en cada punto es único en valor y dirección. Las líneas de campo se dibujan de forma que el vector campo es tangente a ellas en cada punto. Si dos líneas se cortasen existirían dos vectores campo tangentes a cada línea en ese punto, lo que contradice la definición.

C. Falsa. El campo electrostático es un campo conservativo. El trabajo de la fuerza del campo cuando una carga de prueba se mueve entre dos puntos es independiente del camino. (O dicho de otra manera, la circulación del vector campo a lo largo de una línea cerrada es nulo).

C.2.- Dos focos O_1 y O_2 emiten ondas en fase de la misma amplitud (*A*), frecuencia (*f*) y longitud de onda (*λ*) que se propagan a la misma velocidad, interfiriendo en un punto P que está a una distancia *λ* m de O_1 y 3 *λ* m de O_2. La amplitud resultante en P será:
A) Nula.
B) *A*.
C) 2 *A*.

Solución: C



Representamos dos ondas que se propagan de izquierda a derecha desde dos puntos O_1 y O_2 de forma que el punto P se encuentre a una distancia λ de O_1 y a una distancia 3 λ de O_2. Como la diferencia de caminos es un número entero de longitudes de onda los máximos coinciden y se amplifican y la interferencia es constructiva.
Como la frecuencia, la fase y amplitud son la misma, la onda resultante será:

$$y = y_1 + y_2 = A\ \text{sen}(\omega\ t - k\ x_1) + A\ \text{sen}(\omega\ t - k\ x_2)$$

$$y = 2\,A\,\text{sen}\left(\omega\,t - k\frac{(x_1 + x_2)}{2}\right)\cos\left(k\frac{(x_1 - x_2)}{2}\right)$$

Como $x_1 - x_2 = 2\ \lambda$ y $k = 2\ \pi / \lambda$, queda

$$y = 2\ A\ \text{sen}(\omega \cdot t - 4\ \pi)\ \cos\ (2\ \pi) = 2\ A\ \text{sen}(\omega \cdot t)$$

una onda de la misma frecuencia, en fase con las iniciales y cuya amplitud es el doble.

C.3.- Se produce efecto fotoeléctrico cuando fotones de frecuencia *f*, superior a una frecuencia umbral f_0, inciden sobre ciertos metales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
A) Se emiten fotones de menor frecuencia.
B) Se emiten electrones.
C) Hay un cierto retraso temporal entre el instante de la iluminación y el de la emisión de partículas.

Solución: B

El efecto fotoeléctrico consiste en la emisión de electrones por un metal cuando se ilumina con luz de frecuencia superior a una determinada frecuencia conocida como frecuencia umbral y que es una característica de cada metal. Su interpretación por Einstein fue la confirmación de la teoría cuántica de Planck. Según esta interpretación la luz no está constituida por ondas, como ya había quedado demostrado, sino por unas partículas a las que denominó fotones, cada una de ellas poseedora de una energía E proporcional a la frecuencia f de la luz, siendo h, la constante de Planck, el factor de proporcionalidad.

$$E = h \cdot f$$

Las otras opciones:
A. Falsa. El fenómeno por el que algunas sustancias emiten radiación de menor frecuencia al ser iluminadas se conoce como fluorescencia, pero no tiene nada que ver con el efecto fotoeléctrico.
C. Falsa. Una de las leyes experimentales del efecto fotoeléctrico dice que la emisión de electrones por el metal es instantánea al ser iluminado con la frecuencia adecuada. No existe ningún retraso.

C.4.- La constante elástica de un muelle se puede medir experimentalmente mediante el método dinámico. Explica brevemente el procedimiento seguido en el laboratorio.

Solución:

En la medida de la constante elástica de un resorte por el método dinámico se tira hacia abajo de una masa de valor conocido que cuelga de un resorte y se deja oscilar, midiendo el tiempo de varias oscilaciones (10, por ejemplo). Se calcula el período dividiendo el tiempo entre el número de oscilaciones.
Se repite el procedimiento para otras masas conocidas.
De la ecuación del período del resorte,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

que puede escribirse cómo:

$$T^2 = 4\ \pi^2\ m / k$$

se determina el valor de constante.
En el método gráfico se representan los cuadrados de los períodos en el eje de ordenadas frente a las masas en el de abscisas. La gráfica debería dar una línea recta de pendiente:

$$\text{pendiente estudio dinámico} = p_d = \Delta T^2 / \Delta m = 4\ \pi^2 / k$$

Determinando la pendiente, se puede calcular el valor de constante:

$$k = 4\ \pi^2 / p_d$$

En el método analítico se calcula la constante del resorte k para cada masa y se halla el valor medio. Este método tiene el problema de que si la masa del resorte no es despreciable frente a la masa colgada, los resultados llevan un error sistemático.

P.1.- Un satélite de 200 kg describe una órbita circular a 600 km sobre la superficie terrestre:
a) Deduce la expresión de la velocidad orbital.
b) Calcula el período de giro.
c) Calcula la energía mecánica.
Datos: R_T = 6 400 km; g_0 = 9,81 m/s²

Rta.: a) $v=\sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_{\text{órb}}}}$; b) T = 1 h 37 min; b) E = -5,74×10⁹ J

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	m = 200 kg
Altura de la órbita	h = 600 km = $6{,}00\times10^5$ m
Radio de la Tierra	R_T = 6 400 km = $6{,}40\times10^6$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,81 m/s²
Incógnitas	
Velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra	v
Período orbital del satélite	T
Energía mecánica del satélite en órbita	E
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M_T
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Ley de Newton de la gravitación universal (aplicada a la fuerza que ejerce la Tierra esférica sobre el satélite puntual)	$F_G=G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N=\frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r (M.C.U.)	$v=\frac{2\pi r}{T}$
Energía cinética	$E_c = ½ m v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) Como la única fuerza sobre del satélite a tener en cuenta es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra,

$$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_G$$

$$m\,a = F_G$$

El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular de radio

$$r_{\text{órb}} = R_T + h = 6{,}40\times10^6 \text{ [m]} + 6{,}00\times10^5 \text{ [m]} = 7{,}00\times10^6 \text{ m}$$

con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$m\frac{v^2}{r_{\text{órb}}}=G\frac{M_T m}{r_{\text{órb}}^2}$$

Despejando la velocidad, queda

$$v=\sqrt{\frac{G M_T}{r_{\text{órb}}}}$$

Como no se tienen los datos de la constante de la gravitación universal ni de la masa de la Tierra, habrá que tener en cuenta que en la superficie de la Tierra el peso de un cuerpo mg_0 es igual a la fuerza gravitatoria

$$m\, g_0 = G \frac{M_T\, m}{R_T^2}$$

$$G\, M_T = g_0\, R_T^2$$

Sustituyendo $G\, M_T$ en la ecuación de la velocidad, queda

$$v = \sqrt{\frac{G\, M_T}{r_{órb}}} = \sqrt{\frac{g_0\, R_T^2}{r_{órb}}} = \sqrt{\frac{9{,}81\ [\text{m/s}^2] \cdot (6{,}40 \times 10^6\ [\text{m}])^2}{7{,}00 \times 10^6\ [\text{m}]}} = 7{,}58 \times 10^3\ \text{m/s} = 7{,}58\ \text{km/s}$$

Análisis: Se espera que un satélite en órbita alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado está dentro del orden de magnitud.
Específicamente el enunciado del problema no pide que se calcule la velocidad, pero mejor es calcularla por si acaso. Además, se va a necesitar en el cálculo del período orbital.

b) El período orbital del satélite es el del movimiento circular uniforme de velocidad $7{,}58 \times 10^3$ m/s. Despejando el período, T, de la expresión de la velocidad del M.C.U.

$$T = \frac{2\pi \cdot r_{órb}}{v} = \frac{2\pi \cdot 7{,}00 \times 10^6\ [\text{m}]}{7{,}58 \times 10^3\ [\text{m/s}]} = 5{,}81 \times 10^3\ \text{s} = 1\ \text{h}\ 37\ \text{min}$$

c) La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial. La energía potencial viene dada por:

$$E_p = -G \frac{M_T\, m}{r_{órb}} = \frac{g_0\, R_T^2\, m}{r_{órb}} = \frac{9{,}81\ [\text{m/s}^2] \cdot (6{,}40 \times 10^6\ [\text{m}])^2 \cdot 200\ [\text{kg}]}{7{,}00 \times 10^6\ [\text{m}]} = -1{,}15 \times 10^{10}\ \text{J}$$

y la energía cinética

$$E_c = 1/2\ m\, v^2 = [200\ [\text{kg}]\ (7{,}58 \times 10^3\ [\text{m/s}])^2] / 2 = 5{,}74 \times 10^9\ \text{J}$$

por lo que la energía mecánica valdrá

$$E = E_c + E_p = 5{,}74 \times 10^9\ [\text{J}] - 1{,}15 \times 10^{10}\ [\text{J}] = -5{,}74 \times 10^9\ \text{J}$$

Análisis: puede comprobarse que la energía potencial vale el doble que la energía cinética, pero es negativa por ser un sistema ligado. La energía mecánica vale lo mismo que la energía cinética, pero es negativa.

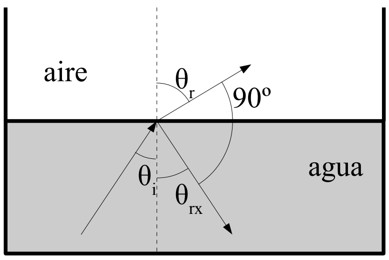
P.2.- Un rayo de luz pasa del agua (índice de refracción *n* = 4/3) al aire (*n* = 1). Calcula:
a) El ángulo de incidencia si los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí.
b) El ángulo límite.
c) ¿Hay ángulo límite si la luz incide del aire al agua?
Rta.: a) $\theta_i = 36{,}9º$; b) $\lambda = 48{,}6º$

Datos	***Cifras significativas: 3***
Índice de refracción del aire	$n = 1{,}00$
Índice de refracción del agua	$n_a = 4 / 3 = 1{,}33$
Ángulo entre el rayo refractado y el reflejado	$\theta_i = 90{,}0º$
Incógnitas	
Ángulo de incidencia	n_v
Ángulo límite	λ
Ecuaciones	
Ley de Snell de la refracción	n_i sen $\theta_i = n_r$ sen θ_r

Solución:

a) Aplicando la ley de Snell de la refracción:

$$1{,}33 \text{ sen } \theta_i = 1{,}00 \text{ sen } \theta_r$$



A la vista del dibujo debe cumplirse que

$$\theta_r + 90° + \theta_{rx} = 180°$$

Como el ángulo de reflexión θ_{rx} es igual al ángulo de incidencia θ_i, la ecuación anterior se convierte en:

$$\theta_i + \theta_r = 90°$$

Es decir, que el ángulo de incidencia θ_i y el de refracción θ_r son complementarios.
Si sabemos que el seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario, entonces la primera ecuación queda:

$$1{,}33 \text{ sen } \theta_i = \text{sen } \theta_r = \cos \theta_i$$

$$tg\, \theta_i = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}75$$

$$\theta_i = \text{arc tg } 0{,}75 = 36{,}9°$$

b) Ángulo límite λ es el ángulo de incidencia tal que el de refracción vale 90º

$$1{,}33 \text{ sen } \lambda = 1{,}00 \text{ sen } 90{,}0°$$

$$\text{sen } \lambda = 1{,}00 / 1{,}33 = 0{,}75$$

$$\lambda = \text{arc sen } 0{,}75 = 48{,}6°$$

c) No. Cuando la luz pasa del aire al agua, el ángulo de refracción es menor que el de incidencia. Para conseguir un ángulo de refracción de 90º el ángulo de incidencia tendría que ser mayor que 90º y no estaría en el aire.
También puede deducirse de la ley de Snell.

$$1{,}00 \text{ sen } \lambda_1 = 1{,}33 \text{ sen } 90°$$

$$\text{sen } \lambda_1 = 1{,}33 / 1{,}00 > 1$$

lo que es absurdo.

OPCIÓN B

C.1.- Un planeta describe una órbita plana y elíptica en torno al Sol. ¿Cuál de las siguientes magnitudes es constante?
A) El momento lineal.
B) La velocidad areolar.
C) La energía cinética.

Solución: B

La velocidad areolar de un planeta es el área que barre el radiovector que une el Sol con el planeta en la unidad de tiempo.
La segunda ley de Kepler puede enunciarse así:
«El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales»
O sea, que la velocidad areolar es constante.

En un sistema de referencia con el Sol en el origen de coordenadas, la velocidad areolar será la derivada del área barrida por el vector de posición del planeta en la unidad de tiempo:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt}$$

El área barrida en un tiempo muy pequeño dt, es la mitad del producto vectorial del vector de posición $\bar{r}$ del planeta por su vector desplazamiento $d\bar{r}$.

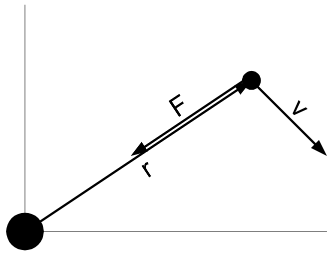
$$d\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r})$$

por lo que la velocidad areolar puede expresarse así:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$$

en el que $\overline{v}$ es el vector velocidad del planeta.
Si derivamos $\overline{\boldsymbol{v}}_A$ respecto al tiempo,

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}\right)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} \ + \ \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{v} \times \vec{v} \ + \ \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$



el resultado es el vector $\overline{\boldsymbol{0}}$ (cero) ya que el producto vectorial de un vector $\overline{v}$ por sí mismo es cero y el vector de posición $\overline{\boldsymbol{r}}$ y el vector fuerza $\overline{\boldsymbol{a}}$ son paralelos, ya que la aceleración tiene la misma dirección que la fuerza de atracción entre el Sol y el planeta.

Las otras opciones:
A. Falsa.
El momento lineal $\overline{\boldsymbol{p}}$ de un objeto de masa *m* que se mueve a una velocidad $\overline{v}$ vale:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{v}$$

La dirección cambia a medida que el planeta se desplaza alrededor del Sol.

C. Falsa. En una órbita elíptica, con el Sol situado en un de los focos, la distancia del planeta al Sol no es constante.
La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

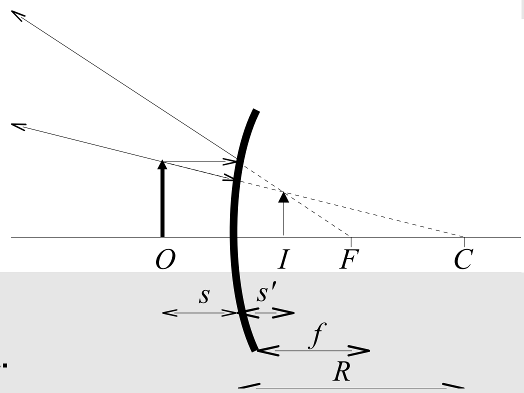
$$E_p = -G\frac{M \cdot m}{r}$$

en la que *M* es la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol), *m* es la masa del objeto situado en él (el planeta), *r* la distancia entre ambas masas y *G* la constante de la gravitación universal.
La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia *r*.
Como la energía mecánica se conserva, pero la energía potencial gravitatoria depende de la distancia, la energía cinética varía con la distancia y no se mantiene constante.

C.2.- Si se desea obtener una imagen virtual, derecha y menor que el objeto, se usa:
A) Un espejo convexo.
B) Una lente convergente.
C) Un espejo cóncavo.

Solución: B

Véase la marcha de los rayos.
La imagen se forma «detrás» del espejo, por lo que es virtual.
El tipo de imagen es independiente de la distancia del objeto al espejo.



C.3.- En la reacción $^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{141}_{56}Ba + ^{A}_{Z}X + 3\,^{1}_{0}n$ se cumple que:
A) Es una fusión nuclear.
B) Se libera energía correspondiente al defecto de masa.
C) El elemento X es $^{92}_{35}X$.

Solución: B

En las reacciones nucleares se libera energía. Esta energía proviene de la transformación de masa en energía que sigue la ley de Einstein.

$$E = \Delta m \cdot c^2$$

en la que Δm es el defecto de masa y c la velocidad de la luz.

Las otras opciones:
A. Falsa. El proceso de fusión nuclear consiste en la reacción entre núcleos ligeros para producir otros más pesados. Esta reacción nuclear consiste en romper un núcleo pesado en otros más ligeros: es una fisión.
C. Por los principios de conservación del número bariónico (nº nucleones = nº de protones + nº neutrones)

$$235 + 1 = 141 + A + 3 \cdot 1$$

$$A = 92$$

y de la carga:

$$92 + 0 = 56 + Z + 3 \cdot 0$$

$$Z = 36 \neq 35$$

C.4.- En la medida experimental de la aceleración de la gravedad *g* con un péndulo simple, ¿qué precauciones se deben tomar con respecto a la amplitud de las oscilaciones y con respecto a la medida del periodo de oscilación?

Solución:

La amplitud de las oscilaciones debe ser pequeña. En teoría una aproximación aceptable es que sean menores de 15º. Como no usamos un transportador de ángulos, separaremos lo menos posible el hilo de la vertical, especialmente cuando la longitud del péndulo sea pequeña.

Se suelen medir 10 o 20 oscilaciones para aumentar la precisión del período, y disminuir el error relativo que daría la medida de una sola oscilación.
Un número demasiado grande de oscilaciones puede dar lugar a que cometamos errores al contarlas.

P.1.- Un protón con velocidad $\overline{v}$ = 5×10⁶ $\overline{\mathbf{i}}$ m/s penetra en una zona donde hay un campo magnético $\overline{B}$ = 1 $\overline{\mathbf{j}}$ T.
a) Dibuja la fuerza que actúa sobre el protón y deduce la ecuación para calcular el radio de la órbita.
b) Calcula el número de vueltas en un segundo.
c) ¿Varía la energía cinética del protón al entrar en esa zona?
(Datos: $m_{\text{protón}} = 1{,}67\times10^{-27}$ kg; $q_{\text{protón}} = 1{,}6\times10^{-19}$ C)

Rta.: a) $R = \dfrac{m\,\text{v}}{q\,B\,\text{sen}\,\varphi}$; b) Media vuelta en $3{,}28\times10^{-8}$ s

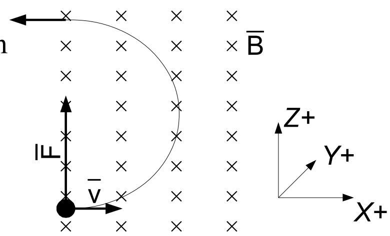
Datos	***Cifras significativas: 3***
Velocidad del protón	$\overline{\boldsymbol{v}} = 5{,}00\times10^{6}\ \overline{\mathbf{i}}\ \text{m·s}^{-1}$
Intensidad del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{B}} = 1{,}00\ \overline{\mathbf{j}}$ T
Carga del protón	$q = 1{,}60\times10^{-19}$ C
Masa del protón	$m = 1{,}67\times10^{-27}$ kg
Incógnitas	
Fuerza magnética sobre el protón	$\overline{\boldsymbol{F}}_B$
Radio de la trayectoria circular	R
Número de vueltas en un segundo	N
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\boldsymbol{v}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_{\text{N}} = \dfrac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$

Solución:

a) La fuerza magnética $\overline{\boldsymbol{F}}_B$ ejercida por el campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ sobre la carga q del protón que se desplaza a la velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ es:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\ (\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = 1{,}60\times10^{-19}\ [\text{C}]\ (5{,}00\times10^{6}\ \overline{\mathbf{i}}\ [\text{m/s}] \times 1{,}00\ \overline{\mathbf{j}}\ [\text{T}]) = 8{,}00\times10^{-13}\ \overline{\mathbf{k}}\ \text{N}$$

y es perpendicular a la dirección del campo magnético y también a la velocidad, y el sentido viene dado por la regla de la mano izquierda, teniendo en cuenta que la carga es negativa. En la figura, las cruces × indican un campo magnético que entra en el papel.



Como sólo actúa la fuerza magnética:

$$\sum\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

el protón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración sólo tiene componente normal a_N,

$$F_B = m\,a = m\,a_N = m\frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q|B\,v\,\text{sen}\,\varphi = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R = \frac{m\cdot v}{q\cdot B\cdot \text{sen}\,\varphi} = \frac{1{,}67\times10^{-27}\ [\text{kg}]\cdot 5{,}00\times10^{6}\ [\text{m/s}]}{1{,}60\times10^{-19}\ [\text{C}]\cdot 1{,}00\ [\text{T}]\cdot \text{sen}\,90^{\circ}} = 5{,}22\times10^{-2}\ \text{m} = 5{,}22\ \text{cm}$$

Análisis: el radio tiene un valor aceptable, unos centímetros.

b) Despejando el período

$$T = \frac{2\pi\cdot R}{v} = \frac{2\pi\cdot 5{,}22\times10^{-2}\ [\text{m}]}{5{,}00\times10^{6}\ [\text{m/s}]} = 6{,}56\times10^{-8}\ \text{s}$$

El número de vueltas en 1 s sería:

$$N = 1{,}00\ [\text{s}]\cdot\frac{1\ \text{vuelta}}{6{,}56\times10^{-8}\ [\text{s}]} = 1{,}52\times10^{7}\ \text{vueltas}$$

Análisis: Si el protón entra en un campo magnético, saldrá de él después de describir media circunferencia, por lo que en realidad sólo daría media vuelta en un tiempo de T / 2 = 3,28×10^{-8} s *y saldría a una distancia de* 2 R = 10,4 cm *del punto de entrada en el campo.*

c) No. La fuerza magnética es perpendicular a la trayectoria en todos los puntos y, por tanto, no realiza trabajo. Si el trabajo de la fuerza resultante es nulo, no hay variación de la energía cinética.

P.2.- Una partícula de masa *m* = 0,1 kg, sujeta en el extremo de un resorte, oscila en un plano horizontal con un M.A.S., siendo la amplitud *A* = 0,20 m y la frecuencia *f* = 5 s^{-1}. En el instante inicial la posición es *x* = *A*. Calcula para *t* = *T* / 8 s:
a) La velocidad y aceleración.
b) La energía mecánica.
c) La frecuencia con que oscilaría si se duplica la masa.
Rta.: a) v = - 4,44 m/s; a = -140 m/s^2 ; b) E = 1,97 J; c) f = 3,54 Hz

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	m = 0,100 kg
Amplitud	A = 0,200 m
Frecuencia	f = 5,00 s^{-1}
Posición inicial	x_0 = A = 0,200 m
Incógnitas	
Velocidad para t = T / 8	v
Aceleración para t = T / 8	a
Energía mecánica	E

Frecuencia si se duplica la masa	f_2
Otros símbolos	
Constante elástica del resorte	k
Período	$T = 1 / f$
Pulsación (frecuencia angular)	$\omega = 2 \pi \cdot f$
Fase inicial	φ_0
Fuerza recuperadora elástica	F
Ecuaciones	
De movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la aceleración a y la elongación x	$a = - \omega^2 \cdot x$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = - k \cdot x$
2ª ley de Newton	$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\, k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\, m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2$

Solución:

a) La ecuación de un M.A.S. es:

$$x = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

La amplitud es un dato: $A = 0{,}200$ m. La frecuencia angular ω se calcula a partir de la frecuencia f:

$$\omega = 2 \pi \cdot f = 2 \pi \text{ [rad]} \cdot 5{,}00 \text{ [s}^{-1}\text{]} = 31{,}4 \text{ rad·s}^{-1}$$

Para calcular la fase inicial φ_0 se usa el dato de la posición inicial: Para $t = 0$, $x_0 = A = 0{,}200$ m

$$A = A \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\operatorname{sen} \varphi_0 = 1$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arc\,sen}(1) = \pi / 2$$

La ecuación queda:

$$x = 0{,}200 \cdot \operatorname{sen}(10 \pi \cdot t + \pi / 2) \text{ [m]}$$

(Si se hubiese elegido la ecuación $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$, la fase inicial sería: $\varphi' = 0$)

Derivando la ecuación de movimiento queda:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}200 \cdot \operatorname{sen}(10\pi \cdot t + \pi/2)\}}{\mathrm{d}\,t} = 0{,}200 \cdot 10 \cdot \pi \cdot \cos(10\pi \cdot t + \pi/2) = 6{,}28 \cdot \cos(10\pi \cdot t + \pi/2) \text{ m/s}$$

Como el tiempo es $t = T / 8$, calculamos el período:

$$T = 1 / f = 1 / (5{,}00 \text{ [s}^{-1}\text{]}) = 0{,}200 \text{ s}$$

y el tiempo

$$t = T / 8 = 0{,}200 \text{ [s]} / 8 = 0{,}0250 \text{ s}$$

por lo que la velocidad en ese instante valdrá:

$$v = 6{,}28 \cdot \cos(10 \pi \text{ [rad/s]} \cdot 0{,}0250 \text{ [s]} + \pi / 2) \text{ [m/s]} = -4{,}44 \text{ m/s}$$

Obtenemos la aceleración derivando la ecuación de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{6{,}28 \cdot \cos(10\pi \cdot t + \pi/2)\}}{\mathrm{d}\,t} = 6{,}28 \cdot 10 \cdot \pi \cdot [\operatorname{sen}(10\pi \cdot t + \pi/2)] = -197 \cdot \operatorname{sen}(10\pi \cdot t + \pi/2) \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo el valor del tiempo:

$$a = -197 \cdot \operatorname{sen}(10 \pi \text{ [rad/s]} \cdot 0{,}0250 \text{ [s]} + \pi / 2) \text{ [m/s}^2\text{]} = -140 \text{ m/s}^2$$

b) La energía mecánica puede calcularse como la energía potencial máxima, la energía cinética máxima o la suma de las energías cinética y potencial en cualquier instante:

$$E = (E_c + E_p) = ½\, k \cdot A^2 = ½\, m \cdot v^2_{\text{máx}} = ½\, k \cdot x^2 + ½\, m \cdot v^2$$

Si se opta por la primera, hay que calcular el valor de la constante elástica k.
Usando la 2ª ley de Newton, teniendo en cuenta que en un M.A.S. la aceleración recuperadora es proporcional a la elongación, $a = -\omega^2 \cdot x$

$$F = m \cdot a = - m \cdot \omega^2 \cdot x$$

Igualando esta con la ley de Hooke, suponiendo que la única fuerza que actúa es la fuerza elástica

$$F = - k \cdot x$$

$$- k \cdot x = - m \cdot \omega^2 \cdot x$$

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}100 \text{ [kg]} \cdot (31{,}4 \text{ rad/s})^2 = 98{,}7 \text{ N/m}$$

Energía mecánica:

$$E = E_{\text{p máx}} = 98{,}7 \text{ [N/m]} (0{,}200 \text{ [m]})^2 / 2 = 1{,}97 \text{ J}$$

Se podría haber calculado la energía mecánica como la energía cinética máxima.
La velocidad tiene un valor máximo cuando el coseno de la fase vale 1.

$$v_{\text{máx}} = 6{,}28 \cos(10 \pi t + \pi / 2) \text{ [m/s]} = 6{,}28 \text{ m/s}$$

$$E = E_{\text{c máx}} = ½ m \cdot v^2_{\text{máx}} = 0{,}100 \text{ [kg]} \cdot (6{,}28 \text{ [m/s]})^2 / 2 = 1{,}97 \text{ J}$$

También se podría haber calculado la energía mecánica como la suma de las energías cinética y potencial, pero sería un proceso más largo ya que habría que calcular el valor de la constante elástica y el de la posición. (Sólo se tenía calculada la velocidad)

c) De la ecuación que relaciona la constante elástica con la frecuencia angular

$$k = m \cdot \omega^2 = m (2 \pi \cdot f)^2 = 4 \pi^2 \cdot f^2 \cdot m$$

se puede despejar la frecuencia f

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{98{,}7 \text{ [N/m]}}{0{,}2 \text{ [kg]}}} = 3{,}54 \text{ s}^{-1}$$

y se ve que la frecuencia es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa. Si la masa se duplica, la frecuencia disminuye en un factor $\sqrt{2}$.

Cuestiones y problemas de las Pruebas de Acceso a la Universidad (P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán, alfbar@bigfoot.com, I.E.S. Elviña, La Coruña
Algunas ecuaciones se han construido con las macros de la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de traducindote, de Óscar Hermida López.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo OpenOffice (o LibreOffice) hecha por Alfonso Barbadillo Marán.