20167
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

P1) a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; calcular **(A + B)^t (2 puntos)** y **(A . B)$^{-1}$ (3 puntos)** (Nota: **A^t** significa la transpuesta de la matriz)

b) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=2+x \\ 2x-y-3z=4x-2 \\ -2x+y=6-z \end{cases}$ **(5 puntos)**

a)

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow (A+B)^t=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 0 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow |A\cdot B|=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 0 & 6\end{vmatrix}=12\neq 0\Rightarrow Existe\,(A\cdot B)^{-1}\Rightarrow (A\cdot B)^{-1}=\frac{1}{|A\cdot B|}adj\left[(A\cdot B)^t\right.$$

$$(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 8 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow adj\left[(A\cdot B)^t\right]=\begin{pmatrix}6 & -8\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow (A\cdot B)^{-1}=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}6 & -8\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{cases} y+z=2 \\ -2x-y-3z=-2 \\ -2x+y+z=6 \end{cases}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ -2 & -1 & -3\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ -2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & 4\end{vmatrix}=-(-2)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=2\cdot(4-2)=4\neq 0\Rightarrow$$

$$Como\ rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & 2\\ -2 & -1 & -3 & -2\\ -2 & 1 & 1 & 6\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & 2\\ -2 & -1 & -3 & -2\\ 0 & 2 & 4 & 8\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & 2\\ -2 & -1 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 4\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & 2\\ -2 & -1 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)\Rightarrow z=2\Rightarrow y+2=2$$

$$y=0\Rightarrow -2x-0-3\cdot 2=-2\Rightarrow -2x-6=-2\Rightarrow -2x=4\Rightarrow x=-2\Rightarrow Solución\Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(-2\ ,\ 0\ ,\ 2)$$

P2) a) Dada la función real de variable real $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, se pide:

a.1) Determinar su dominio y los puntos de corte de la gráfica de con los ejes de coordenadas.
(2 puntos)
a.2) Obtener sus máximos y mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(5 puntos)

b) Calcular la integral siguiente $\int_{\ln 2}^{\ln 4} 3e^{4x}dx$ **(3 puntos)**

Calcular el número entero positivo resultado de la integral anterior.

$a1)$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{0^2+1}{0}=\frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Dom(f)=\forall x\in \Re-\{0\}$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x}=0 \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow No\ hay$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OY \Rightarrow f(0)=\frac{0^2+1}{0}=\frac{1}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow No\ hay\ \ pun\ tos\ de\ corte$$

$a2)$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-\left(x^2+1\right)}{x^2}=\frac{2x^2-x^2+1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} x-1>0 \Rightarrow x>1 \\ x+1>0 \Rightarrow x>-1 \\ x^2>0 \Rightarrow \forall x\in \Re \end{cases}$$

	$-\infty$ -1	-1 0	0 1	1 ∞
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > -1	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(+)**
x > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(-)**	**(+)**

Crecimiento $\forall x\in \Re/(x<-1)\cup(x<1)$
Decrecimiento $\forall x\in \Re/(-1<x<1)-\{0\}$

Máximo relativo $x=-1 \Rightarrow f(-1)=\dfrac{(-1)^2+1}{-1}=-2$

En x = 0 existe una asíntota vertical

Mínimo relativo $x=1 \Rightarrow f(1)=\dfrac{1^2+1}{1}=2$

Continuación del Problema P2

$b)$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} 3e^{4x}dx = 3\int_{\ln 16}^{\ln 256} e^t \frac{dt}{4} = \frac{3}{4}\int_{\ln 16}^{\ln 256} e^t dt = \frac{3}{4}\cdot\left[e^t\right]_{\ln 16}^{\ln 256} = \frac{3}{4}\cdot\left(e^{\ln 256} - e^{\ln 16}\right) = \frac{3}{4}\cdot(256-16) = \frac{3\cdot 240}{4} = 180$$

$$4x = t \Rightarrow 4\,dx = dt \Rightarrow \begin{cases} x = \ln 4 \Rightarrow t = 4\cdot\ln 4 = \ln 4^4 = \ln 256 \\ x = \ln 2 \Rightarrow t = 4\cdot\ln 2 = \ln 2^4 = \ln 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Siendo \begin{cases} e^{\ln 256} = u \Rightarrow \ln\left(e^{\ln 256}\right) = \ln u \Rightarrow \ln u = \ln 256\cdot\ln e \Rightarrow \ln u = \ln 256\cdot 1 \Rightarrow \ln u = \ln 256 \Rightarrow u = 256 \\ e^{\ln 256} = v \Rightarrow \ln\left(e^{\ln 16}\right) = \ln v \Rightarrow \ln v = \ln 16\cdot\ln e \Rightarrow \ln v = \ln 16\cdot 1 \Rightarrow \ln v = \ln 16 \Rightarrow v = 16 \end{cases}$$

P3) a) Dado el plano $\pi \equiv x - y + z = 4$, Determinar la recta r que pasa por el punto **P = (1 , 2 , 4)** y es perpendicular a π. **(4 puntos)**

b) Calcular el punto de intersección de r con π. **(6 puntos)**

a) El vector director de la recta r, al ser perpendicular al plano π, es el director del plano

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,-1\,,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 4+\lambda \end{cases}$$

$b)$

$$1+\lambda-(2-\lambda)+(4+\lambda) = 4 \Rightarrow 1+\lambda-2+\lambda+4+\lambda = 4 \Rightarrow 3\,\lambda+3 = 4 \Rightarrow 3\,\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$Punto\ \text{int}\,er\,\text{sec}\,ción \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1+\frac{1}{3} \\ y = 2-\frac{1}{3} \\ z = 4+\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{4}{3}\,,\frac{5}{3}\,,\frac{13}{3}\right)$$

El problema P4 no se soluciona porque no pertenece a la Matemática para las Ciencias y la Tecnología que es el objeto de este estudio