2016
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

<u>Opción A</u>

P1) a) El padre, la madre y un hijo ganan 16250 euros. La madre gana el doble que el hijo. El padre gana $\frac{2}{3}$ de lo que gana la madre. Hallar un sistema de ecuaciones que se ajuste al problema y resolverlo, determinando lo que gana cada uno **(5 puntos)**

b) Determinar los valores de **x** para los que la matriz siguiente $\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ no admita inversa.

¿Para que valores de **x** la matriz tiene rango 3? **(5 puntos)**

a) Siendo **P** lo que gana el padre, **M** lo que gana la madre y **H** lo que gana el hijo

$$\begin{cases} P+M+H=16250 \\ M=2H \\ P=\frac{2}{3}M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P+M+H=16250 \\ M-2H=0 \\ 3P=2M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P+M+H=16250 \\ M-2H=0 \\ 3P-2M=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16250 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16250 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -48750 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16250 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -48750 \end{array}\right) \Rightarrow -13H=-48750 \Rightarrow$$

$$H=\frac{48750}{13}=3750\text{ €} \Rightarrow M-2\cdot 3750=0 \Rightarrow M=7500\text{ €} \Rightarrow P+7500+3750=16250 \Rightarrow$$

$$P=16250-11250=5000\text{ €} \Rightarrow Solución \Rightarrow (P\,,M\,,H)=(5000\,,7500\,,3750)\text{ €}$$

b) Una matriz no admite inversa si su determinante es nulo, y en caso contrario, y si es de orden **3** tendrá rango igual a **3**
Llamando **A** a la matriz dada

$$|A|=\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & x+2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(x-1)\cdot\begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=(x-1)\cdot(x+2-2)=x\,(x-1) \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow$$

$$x\,(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow Cuando \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow A\ no\ tiene\ inversa$$

$$\forall x \in \Re-\{0\,,1\} \Rightarrow rang\,(A)=3$$

P2) a) Calcule los valores de **a**, **b** y **c** tal que la función **f(x) = ax² + bx + c** corta al eje **OX** en los puntos $x_1 = 0 \;\; y \;\; x_2 = 5$ y, además, posee una recta tangente de pendiente 1 en el punto $x_3 = 2$. Hallar la función que satisface todas las condiciones **(6 puntos)**

b) Calcular la integral siguiente $\int \frac{e^{4x}+e^{2x}}{e^x}\,dx$ **(4 puntos)**

$a)$

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f(5) = 0 \Rightarrow a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 0 = 0 \Rightarrow 25a + 5b = 0 \Rightarrow \\ f'(2) = 1 \Rightarrow 2a \cdot 1 + b = 1 \Rightarrow 2a + b = 1 \end{cases} \begin{cases} 5a + b = 0 \\ -2a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow 3a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + b = 1 \Rightarrow b = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x \Rightarrow f(x) = \frac{-x^2 + 5x}{3}$$

$b)$

$$\int \frac{e^{4x}+e^{2x}}{e^x}\,dx = \int \frac{e^{4x}}{e^x}\,dx + \int \frac{e^{2x}}{e^x}\,dx = \int e^{4x} \cdot e^{-x}\,dx + \int e^{2x} \cdot e^{-x}\,dx = \int e^{4x-x}\,dx + \int e^{2x-x}\,dx =$$

$$\int \frac{e^{4x}+e^{2x}}{e^x}\,dx = \int e^{3x}\,dx + \int e^x\,dx = \int e^t\,\frac{dt}{3} + e^x = \frac{1}{3}\int e^t\,dt + e^x = \frac{1}{3}e^t + e^x = \frac{1}{3}e^{3x} + e^x + K$$

$$3x = t \Rightarrow 3\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

P3) a) Determinar la intersección de la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ con el plano $\pi \equiv x - y + z = 7$ **(7 puntos)**

b) Determinar la ecuación del plano que es paralelo al plano π y que pasa por el punto de intersección obtenida en el apartado anterior. **(3 puntos).**

$a)$ *Sea P el punto de intersección buscado*

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow 1 + 4\lambda - (-3 + 2\lambda) + (-2 + 3\lambda) = 7 \Rightarrow 1 + 4\lambda + 3 - 2\lambda - 2 + 3\lambda = 7 \Rightarrow 5\lambda + 2 = 7 \Rightarrow$$

$$5\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow Punto\ intersección \Rightarrow P \begin{cases} x = 1 + 4 \cdot 1 \\ y = -3 + 2 \cdot 1 \Rightarrow P(5, -1, 1) \\ z = -2 + 3 \cdot 1 \end{cases}$$

b) El plano buscado es de la forma $x - y + z + D = 0$, y pasa por $P(5, -1, 1)$

$5 - (-1) + 1 + D = 0 \Rightarrow 5 + 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -7$, coincide con el plano π

El problema P4 no se soluciona porque no pertenece a la Matemática para las Ciencias y la Tecnología que es el objeto de este estudio