2015
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Opción A

P1) a) Determinar los valores de a y b para los cuales la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, no admite inversa **(5 puntos)**

b) Determinar si el sistema $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es o no compatible (determinado o no) cuando **a = 1** y **a = -2 (5 puntos)**.

a) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a^2 & 1-a & 0 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 1-a & a-1 \\ 1-a^2 & 1-a \end{vmatrix}=(1-a)^2-(a-1)\left(1-a^2\right)=(1-a)^2-(a-1)(1-a)(1+a)$$

$$|A|=(1-a)^2+(1-a)(1-a)(1+a)=(1-a)^2+(1-a)^2\ (1+a)=(1-a)^2\ (1+1+a)=(1-a)^2(2+a)\Rightarrow$$

$$Si\ A=0\Rightarrow(1-a)^2(2+a)=0\Rightarrow\begin{cases} 1-a=0\Rightarrow a=1 \\ 2+a=0\Rightarrow a=-2 \end{cases}\Rightarrow\forall a\in\Re-\{-2\,,1\}\Rightarrow A\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

b)

$$Si\ a=1\Rightarrow|A|=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=1<Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Compat.\ In\det er.$$

$$x+y+z=1\Rightarrow x=1-y-z\Rightarrow Solución\Rightarrow(x\,,y\,,z)=(1-\alpha-\beta\,,\alpha\,,\beta)$$

$$Si\ a=-2\Rightarrow|A|=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3\Rightarrow$$

$$Sistema\ Incompatible$$

P2) a) Determinar el valor de **p** en la función **f(x) = x³- px² + 8x** para que la recta tangente a esta función en el punto x = 1 sea paralela a la recta **y = -x**. **(5 puntos)**

b) Calcular el valor de la integral $\int_{-1}^{0}\left(x^3-6x^2+8x\right)dx$ **(5 puntos)**

$a)$

$$f'(x)=3x^2-2px+8 \Rightarrow Si\ f'(1)=m=-1 \Rightarrow 3\,(1)^2-2p\cdot 1+8=-1 \Rightarrow 3-2p+8=-1 \Rightarrow 2p=12 \Rightarrow p=6$$

$b)$

$$\int_{-1}^{0}\left(x^3-6x^2+8x\right)dx=\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_{-1}^{0}-6\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{0}+8\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{4}\cdot\left[0^4-(-1)^4\right]-2\cdot\left[0^3-(-1)^3\right]+4\cdot\left[0^2-(-1)^2\right]$$

$$\int_{-1}^{0}\left(x^3-6x^2+8x\right)dx=\frac{1}{4}\cdot(0-1)-2\cdot[0-(-1)]+4\cdot(0-1)=-\frac{1}{4}-2-4=-6-\frac{1}{4}=-\frac{25}{4}$$

P3) a) Determinar el punto de intersección de la recta $\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=4+6\lambda \end{cases}$ con el plano $x-3y+5z+11=0$ **(6 puntos)**

b) Calcula **b** en el punto $(5\,,-3\,,b)$ para que sea un punto de plano $x-3y+5z+11=0$ **(4 puntos).**

$a)$

$Siendo\ P\ el\ punto\ de\ \text{int}er\text{sec}ción$

$$(3-2\lambda)-3\,(1-\lambda)+5\,(4+6\lambda)+11=0 \Rightarrow 3-2\lambda-3+3\lambda+20+30\lambda+11=0 \Rightarrow 31\lambda+31=0 \Rightarrow 31\lambda=-31 \Rightarrow$$

$$\lambda=-1 \Rightarrow P\begin{cases} x=3-2\cdot(-1) \\ y=1-(-1) \\ z=4+6\,(-1) \end{cases} \Rightarrow P(5\,,2\,,-2)$$

$b)$

$$5-3\cdot(-3)+5b+11=0 \Rightarrow 5+9+5b+11=0 \Rightarrow 5b+25=0 \Rightarrow 5b=-25 \Rightarrow b=-\frac{25}{5}=-5$$

El problema P4 no se soluciona porque no pertenece a la Matemática para las Ciencias y la Tecnología que es el objeto de este estudio