2014
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Opción A

P1) a) Determinar los valores de a y b de modo que la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$**,** verifique que **A = A² (5 puntos)**

b) Calcular las raíces reales del polinomio $p(x)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6$ **(3 puntos)**. Expresar la descomposición factorial del polinomio anterior. **(2 puntos)**

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-a & 2a+ab \\ -2-b & -a+b^2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 4-a & 2a+ab \\ -2-b & -a+b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 4-a=2\Rightarrow a=2 \\ -2-b=-1\Rightarrow b=-1 \\ 2a+ab=a \\ -a+b^2=b \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\cdot 2+2\cdot(-1)=2 \\ -2+(-1)^2=-1 \end{cases}\Rightarrow Solución\Rightarrow (a\ ,b)=(2\ ,-1)$$

b)

$$p(x)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6\Rightarrow Posibles\ soluciones\Rightarrow \pm 1\ ,2\ ,3\ ,6$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & -3 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -2 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & -5 & 6 & \underline{|0} \end{array}\quad p(x)=(x-1)(x^3-2x^2-x+6)\quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \underline{|0} \end{array}\quad p(x)=(x-1)^2(x^2-x-6)$$

$$x^2-x-6=0\Rightarrow \Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25\geq 0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}\begin{cases} x=\frac{1+5}{2}=3 \\ x=\frac{1-5}{2}=-2 \end{cases}\Rightarrow Raices\begin{cases} x=1\Rightarrow Doble \\ x=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

$$p(x)=(x-1)^2(x-3)(x+2)$$

P2) a) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función **f(x) = $2x^4 - 3x^2$** **(5 puntos)**

b) Calcular el valor de la integral $\int_0^1 \left(\sqrt{x} + x^3\right) dx$

a)

$$f'(x) = 8x^3 - 6x \Rightarrow f''(x) = 24x^2 - 6 = 6\left(4x^2 - 1\right) = 6\,(2x-1)(2x+1) \Rightarrow Concavidad \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ 2x - 1 > 0 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \\ 2x + 1 > 0 \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

	$-\infty$ a $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ a ∞
6 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > $-\frac{1}{2}$	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > $\frac{1}{2}$	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Concavidad $\forall x \in \Re / \left(x < -\frac{1}{2} \right) \cup \left(x > \frac{1}{2} \right)$ **Convexidad** $\forall x \in \Re / -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

b)

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} + x^3\right) dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\, dx + \int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\left[x^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 + \frac{1}{3+1}\cdot\left[x^{3+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\frac{3}{2}}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_0^1$$

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} + x^3\right) dx = \frac{2}{3}\cdot\left(\sqrt{1^3} - \sqrt{0^3}\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(1^4 - 0^4\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$$

P3) a) Determinar el plano π que es perpendicular al vector $\vec{v}=(4\,,-2\,,2)$ y que pasa por el punto $A=(1\,,2\,,4)$ **(5 puntos)**

b) Dado el punto $D=(1\,,1\,,3)$ calcula el vector $\overrightarrow{AD}$ siendo $A=(1\,,2\,,4)$ **(2 puntos)**

¿Está el vector $\overrightarrow{AD}$ contenido en el plano π, determinado en el apartado anterior? **(3 puntos).**

a) El vector $\vec{v}$ es el vector director del plano que es perpendicular al vector **AG** siendo **G** el punto genérico del plano y el producto escalar, de ambos, es nulo y la ecuación del plano π

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=\vec{v}=(4\,,-2\,,2) \\ \overrightarrow{AG}=(x\,,y\,,z)-(1\,,2\,,4)=(x-1\,,y-2\,,z-4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{AG}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{AG}=0\Rightarrow$$

$$(4\,,-2\,,2)\cdot(x-1\,,y-2\,,z-4)=0\Rightarrow 4\,(x-1)-2\,(y-2)+2\,(z-4)=0\Rightarrow 4x-2y+2z-8=0\Rightarrow$$

$$\pi\equiv 2x-y+z-4=0$$

b) El vector **AD** estará contenido en el plano π si es perpendicular al vector director del plano π siendo el producto escalar, de ambos, nulo

$$\overrightarrow{AD}=(1\,,1\,,3)-(1\,,2\,,4)=(0\,,-1\,,-1)\equiv(0\,,1\,,1)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=\vec{v}=(4\,,-2\,,2) \\ \overrightarrow{AD}=(0\,,1\,,1) \end{cases} \Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{AD}=(4\,,-2\,,2)\cdot(0\,,1\,,1)=0-2+2=0\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{AG}$$

$$\textit{El vector } \overrightarrow{AD} \textit{ está contenida en el plano } \pi$$

El problema P4 no se soluciona porque no pertenece a la Matemática para las Ciencias y la Tecnología que es el objeto de este estudio