2012
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Opción A

P1) a) Determinar los valores de **k** para los que la matriz $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$**,** admita inversa

(6 puntos)

b) Determinar las soluciones del sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(4 puntos)**

a) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & k \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix} k-1 & k \\ 1 & k \end{vmatrix}=k\cdot[k\cdot(k-1)-k]=k\cdot(k^2-k-k)=k\cdot(k^2-2k)=k^2\cdot(k-2)\Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow k^2\cdot(k-2)=0\Rightarrow\begin{cases} k^2=0\Rightarrow k=0 \\ k-2=0\Rightarrow k=2 \end{cases}\Rightarrow\forall k\in\Re-\{0\,,\,2\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

b)

$$k=2\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow No\ \ puede\ ser\ un\ sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

Al ser un **Sistema Homogéneo** solo puede ser Compatible Indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow y+2z=0\Rightarrow y=-2z\Rightarrow 2x-2z=0\Rightarrow x=z\Rightarrow$$

$$Solución\Rightarrow(x\,,\,y\,,\,z)=(\lambda\,,-2\lambda\,,\,\lambda)$$

P2) a) Considera la función $f:\Re\to\Re$ dada por $f(x)=\begin{cases} x^2-mx+3 & si \quad x\le 1 \\ x+n & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Determinar los valores de **m** y **n** sabiendo que **f** es continua y que **f(1) = 5**. **(5 puntos)**

b) Determinados los valores de **m** y **n**, calcular el valor de la integral $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ **(5 puntos)**

a)

$$\begin{cases} f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1^2-m\cdot 1+3=4-m \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1+n \end{cases} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow 4-m=1+n\Rightarrow m+n=3$$

$$f(1)=5\Rightarrow 1^2-m\cdot 1+3=5\Rightarrow 4-m=5\Rightarrow m=4-5=-1\Rightarrow -1+n=3\Rightarrow n=4$$

$b)$

$$\int_{-1}^{0}\left(x^2+x+3\right)dx=\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{0}+3\cdot\left[x\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{3}\cdot\left[0^3-(-1)^3\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[0^2-(-1)^2\right]+3\cdot\left[0-(-1)\right]$$

$$\int_{-1}^{0}\left(x^2+x+3\right)dx=\frac{1}{3}\cdot\left[0-(-1)\right]+\frac{1}{2}\cdot(0-1)+3\cdot(0+1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+3=\frac{2-3+18}{6}=\frac{17}{6}$$

P3) a) Calcule el valor de la pendiente de la recta **y = mx + 3** sabiendo que pasa por el punto de intersección de las rectas **y = 2x + 1**, **y = x + 5** **(6 puntos)**

b) Determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos, **A = (2 , 3 , 4)** , **B = (7 , 2 , 5)** y **C = (2 , 3 , 1)** **(4 puntos)**

$a)$

$$2x+1=x+5\Rightarrow x=4\Rightarrow y=2\cdot 4+1=9\Rightarrow Punto\ de\ \mathrm{int}er\sec ción\Rightarrow (4\,,9)\Rightarrow 9=m\cdot 4+3\Rightarrow 4m=6\Rightarrow$$

$$m=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

b) Para determinar el plano π debemos de halla los vectores **AB**, **AC** y **AG**, siendo **G** el punto generador del plano, como los tres son coplanarios y este último es combinación lineal de los otros dos, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(7\,,2\,,5)-(2\,,3\,,4)=(5\,,-1\,,1) \\ \overrightarrow{AC}=(2\,,3\,,1)-(2\,,3\,,4)=(0\,,0\,,-3)\equiv(0\,,0\,,3) \\ \overrightarrow{AC}=(x\,,y\,,z)-(2\,,3\,,4)=(x-2\,,y-3\,,z-4) \end{cases}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$-3\cdot(x-2)-15\cdot(y-3)=0\Rightarrow (x-2)+5\cdot(y-3)=0\Rightarrow \pi\equiv x+5y-17=0$$

El problema P4 no se soluciona porque no pertenece a la Matemática para las Ciencias y la Tecnología que es el objeto de este estudio