2011
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Opción A

P1) a) Sean **A** y **B** dos matrices cuadradas de orden 2 x 2 tales que $A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$**.** Si el determinante de la matriz **A** vale **4**, **det (A) = 4** cuánto vale el **det (B)** determinante de la matriz **B**? **(2 puntos)**

Dada la matriz $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ escribe su matriz transpuesta **C^t** **(1 punto)**

Escribe una matriz **X**, que no sea la identidad, de tal manera que **X = X^t** **(1 punto)**

b) Una nación importa 21.000 vehículos mensuales de las marcas **X**, **Y**, **Z** al precio de 1'2, 1'5 y 2 millones de euros respectivamente. Si el total de la importación asciende a 33.200 millones, y de la marca **X** se importa el 40% de la suma de las otras dos marcas, cuántos vehículos de cada marca entran en el país? **(6 puntos)**

a)

$$\det(A\cdot B)=|A\cdot B|=|A|\cdot|B|\Rightarrow\begin{cases}|A\cdot B|=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6\\ |A|=4\end{cases}\Rightarrow 6=4\cdot|B|\Rightarrow|B|=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$C^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow X^t=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\Rightarrow b=c\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a & \lambda\\ \lambda & d\end{pmatrix}$$

b)

Sea **X** la cantidad de coches de la casa **X**, **Y** de la de **Y** y **Z** de la de **Z**

$$\begin{cases}X+Y+Z=21000\\ 1'2X+1'5Y+2Z=33200\\ X=\frac{40}{100}(Y+Z)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X+Y+Z=21000\\ 12X+15Y+20Z=332000\\ 100X=40Y+40Z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X+Y+Z=21000\\ 12X+15Y+20Z=332000\\ 10X-4Y-4Z=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}X+Y+Z=21000\\ 12X+15Y+20Z=332000\\ 5X-2Y-2Z=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 21000\\ 12 & 15 & 20 & 332000\\ 5 & -2 & -2 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 21000\\ 0 & 3 & 8 & 80000\\ 0 & -7 & -7 & -105000\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 21000\\ 0 & 3 & 8 & 80000\\ 0 & 1 & 1 & 15000\end{array}\right)$$

$$\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 21000\\ 0 & 0 & 5 & 35000\\ 0 & 1 & 1 & 15000\end{array}\right)\Rightarrow 5Z=35000\Rightarrow Z=\frac{35000}{5}=7000\Rightarrow Y+7000=15000\Rightarrow Y=8000\Rightarrow$$

$$X+8000+7000=21000\Rightarrow X=6000\Rightarrow Solución\Rightarrow(X\,,Y\,,Z)=(6000\,,8000\,,7000)$$

P2) a) Dada la función $P(t)=180-\frac{165}{0{,}01\,t^2+1}$ que nos da la población, en miles de personas, de una localidad en un instante de tiempo t > 0. Se pide:
a.1) Es siempre creciente la población en cualquier instante **t**? **(2 puntos)**
a.2) Determinar el instante en que la función P '(t) (dicha tasa de crecimiento) es máxima. Cuánto vale la tasa de crecimiento en este punto? **(4 puntos)**

b) Calcular el área de la región acotada por la gráfica de y = -x² + x + 2, el eje de abscisas. Haga un dibujo aproximado del área pedida. **(4 puntos)**

a)

$a.1)$

$$0{,}01\,t^2+1=0 \Rightarrow 0{,}01\,t^2=-1 \Rightarrow t^2=-\frac{1}{0{,}01}=-100 \Rightarrow t=\pm\sqrt{-100} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

$$Dom\,(f)=\forall x\in\Re\,/\,x\geq 0$$

$$P'(t)=-165\cdot\frac{-2\cdot 0{,}01\,t}{\left(0{,}01\,t^2+1\right)^2}=\frac{3{,}3\,t}{\left(0{,}01\,t^2+1\right)^2} \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow P'(t)>0 \Rightarrow \frac{3{,}3\,t}{\left(0{,}01\,t^2+1\right)^2}>0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3{,}3>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ \left(0{,}01\,t^2+1\right)^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \Rightarrow Creciente \Rightarrow x>0 \\ t>0 \end{cases}$$

Es creciente en todo su recorrido

$a.2)$

$$P''(t)=3{,}3\cdot\frac{\left(0{,}01\,t^2+1\right)^2-2\cdot\left(0{,}01\,t^2+1\right)\cdot 2\cdot 0{,}01\cdot t\cdot t}{\left(0{,}01\,t^2+1\right)^4}=3{,}3\cdot\frac{\left(0{,}01\,t^2+1\right)-4\cdot 0{,}01\cdot t^2}{\left(0{,}01\,t^2+1\right)^3}=3{,}3\cdot\frac{0{,}01\,t^2+1-0{,}04\cdot t^2}{\left(0{,}01\,t^2+1\right)^3}$$

$$\Rightarrow P''(t)=3{,}3\cdot\frac{1-0{,}03\cdot t^2}{\left(0{,}01\,t^2+1\right)^3} \Rightarrow P''(t)=0 \Rightarrow 3{,}3\cdot\frac{1-0{,}03\cdot t^2}{\left(0{,}01\,t^2+1\right)^3}=0 \Rightarrow 1-0{,}03\cdot t^2=0 \Rightarrow 0{,}03\cdot t^2=1 \Rightarrow t^2=\frac{1}{0{,}03}$$

$$t^2=\frac{100}{3} \Rightarrow t=\pm\sqrt{\frac{100}{3}} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{10}{\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{3}}{3} \\ t=-\frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow No\ es\ solución \Rightarrow t<0 \end{cases} \Rightarrow t=\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$Tasa\ de\ variación \Rightarrow P'\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3{,}3\cdot\frac{10\sqrt{3}}{3}}{\left[0{,}01\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]^2}=\frac{11\sqrt{3}}{\left(0{,}01\cdot\frac{100}{3}+1\right)^2}=\frac{11\sqrt{3}}{\left(\frac{1}{3}+1\right)^2}=\frac{11\sqrt{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{11\sqrt{3}}{\frac{16}{9}}=\frac{99\sqrt{3}}{16}$$

$b)$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow -x^2+x+2=0 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9\geq 0 \Rightarrow$$

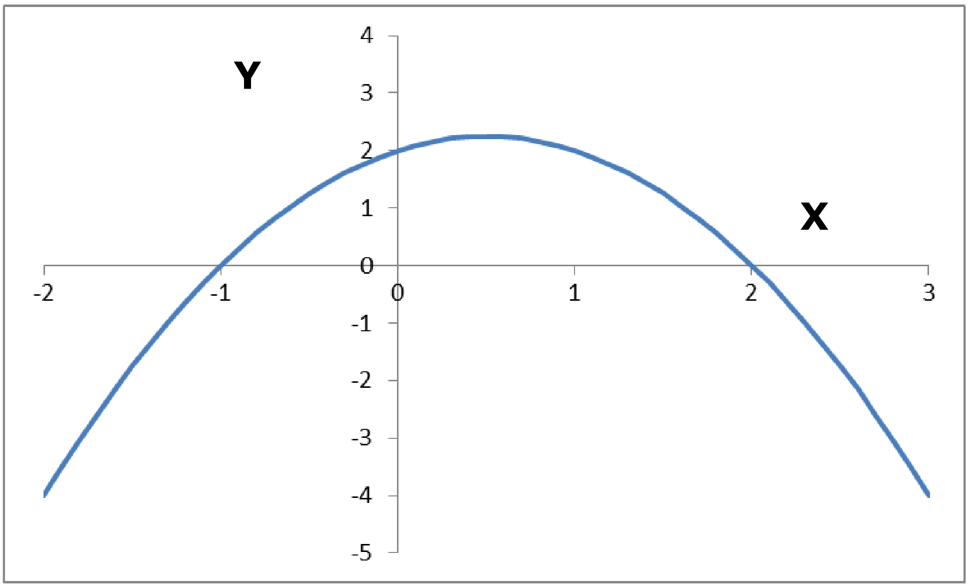
$$x=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1+3}{2}=2 \\ x=\frac{1-3}{2}=-1 \end{cases} \Rightarrow x=0\in(-1\,,\,2) \Rightarrow f(0)=-0^2+0+2=2 \Rightarrow Positivo$$

$$A=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx=-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{2}+\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{2}+2\cdot\left[x\right]_{-1}^{2}=-\frac{1}{3}\cdot\left[2^3-(-1)^3\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[2^2-(-1)^2\right]+2\cdot\left[2-(-1)\right]$$

Continuación del Problema P2 de la opción A

b) Continuación

$$A=-\frac{1}{3}\cdot[8-(-1)]+\frac{1}{2}\cdot[4-1]+2\cdot(2+1)=-\frac{9}{3}+\frac{3}{2}+6=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}\,u^2=$$



P3) Calcular la ecuación implícita del plano que pasa por el punto **P = (2 , 3 , 5)** y es paralela a los vectores $\vec{u}=(-1\,,-2\,,-3)$ y $\vec{v}=(1\,,3\,,5)$. Calcula **n** para que el punto **A = (1 , n , 6)** pertenezca al plano encontrado. **(7 puntos)**

Determinar la ecuación continua de la recta que tiene por vector director el vector normal del plano encontrado y que pasa por el punto **P = (2 , 3 , 5) (3 puntos)**

a) Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y **PG**, en donde **G** es el punto genérico del plano, son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el volumen del tetraedro que forman, calculado por el producto mixto de los tres, es nulo y la ecuación buscada del plano π. Después hallaremos el valor de **n** para que el punto **A** pertenezca al plano

$$\begin{cases} \vec{u}=(-1\,,-2\,,-3)\equiv(1\,,2\,,3) \\ \vec{v}=(1\,,3\,,5) \\ \overrightarrow{PG}=(x\,,y\,,z)-(1\,,3\,,5)=(x-1\,,y-3\,,z-5) \end{cases} \Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$10\cdot(x-2)+3\cdot(y-3)+3\cdot(z-5)-2\cdot(z-5)-5\cdot(y-3)-9\cdot(x-2)=0\Rightarrow(x-2)-2\cdot(y-3)+(z-5)=0\Rightarrow$$

$$\pi\equiv x-2y+z-1=0\Rightarrow 1-2n+6-1=0\Rightarrow 2n=6\Rightarrow n=3\Rightarrow A=(1\,,3\,,6)$$

b) El vector director del plano π es el de la recta **r**, con el punto **P** la definimos

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_\pi}=(1\,,-2\,,1) \\ P(2\,,3\,,5) \end{cases}\Rightarrow r\equiv x-2=\frac{y+2}{3}=z-5$$

El problema P4 no se soluciona porque no pertenece a la Matemática para las Ciencias y la Tecnología que es el objeto de este estudio