2010
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).

Opción A

P.1.- a) Dada una matriz cuadrada **A**, como se llama una matriz cuadrada **B** tal que **A × B = B × A = I**, donde **I** es la matriz identidad? Qué condición debe satisfacer la matriz cuadrada **A** para que exista la anterior matriz **B**? **(2 puntos)**

b) Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+3y-z=-2 \\ 2x+\lambda y=0 \\ x-2y+z=3 \end{cases}$ **.** Se pide:

b1) Discutir su carácter para todos los valores de $\lambda \in \Re$.
b.2) Resolverlo en los casos en que sea posible. **(8 puntos)**

a) La matriz **B** es la inversa de **A.**
La única condición para que exista **B = A^{-1}** es que el determinante de la matriz **A** sea distinto de cero**.**

$b)$

$b1)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - 2 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\forall \lambda \in \Re - \{1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ \lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow$$

$Sistema\ \ Incompatible$

$b.2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow (\lambda-1)y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{\lambda-1} \Rightarrow 2x + \left(-\frac{1}{\lambda-1}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{1}{\lambda-1} = 1 \Rightarrow 2x = 1 + \frac{1}{\lambda-1} \Rightarrow 2x = \frac{\lambda-1+1}{\lambda-1} \Rightarrow x = \frac{\lambda}{2\,(\lambda-1)} \Rightarrow \frac{\lambda}{2\,(\lambda-1)} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda-1}\right) + z = 3 \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda}{2\,(\lambda-1)} + \frac{2}{\lambda-1} + z = 3 \Rightarrow z = 3 - \frac{\lambda+4}{2\,(\lambda-1)} \Rightarrow z = \frac{6\lambda-6-\lambda-4}{2\,(\lambda-1)} \Rightarrow z = \frac{5\lambda-10}{2\,(\lambda-1)} \Rightarrow z = \frac{5\,(\lambda-2)}{2\,(\lambda-1)} \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = \left(\frac{\lambda}{2\,(\lambda-1)}, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{5\,(\lambda-2)}{2\,(\lambda-1)}\right)$$

P2) a) Calcule y determine los extremos relativos de la función $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$. **(5 puntos)**

b) Calcular el área de la región acotada por la gráfica de y = $2x^2$ - 3x + 2, el eje **X** y las rectas verticales **x = 0** y **x = 2**. Haga un dibujo aproximado del área pedida. **(5 puntos)**

$$x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow Dom(f)=\forall x\in\Re-\{0\}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3\ x^2-2x\cdot\left(x^4+1\right)}{x^4}=\frac{4x^4-2x^4-2}{x^3}=\frac{2x^4-2}{x^3}=\frac{2\left(x^4-1\right)}{x^3}=\frac{2\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{x^3}$$

$$f'(x)=\frac{2\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}{x^3}\Rightarrow Crecimiento\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\frac{2\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}{x^3}>0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ x-1>0\Rightarrow x>1 \\ x+1>0\Rightarrow x>-1 \\ \left(x^2+1\right)>0\Rightarrow\forall x\in\Re \\ x^3>0\Rightarrow x>0 \end{cases}$$

$-\infty$	-1	0	1	∞
2 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x^2 + 1 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**	**(+)**
x > 1	**(-)**	**(-)**	**(-)**	**(+)**
x > 0	**(-)**	**(-)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Crecimiento $\forall x\in\Re/\left(-1<x<0\right)\cup\left(x>1\right)$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re/\left(x<-1\right)\cup\left(0<x<1\right)$

Mínimo relativo en $x=-1\Rightarrow f\left(-1\right)=\dfrac{\left(-1\right)^4+1}{\left(-1\right)^2}=\dfrac{1+1}{1}=2$ **de decrecimiento pasa a crecimiento**

Mínimo relativo en $x=1\Rightarrow f\left(1\right)=\dfrac{1^4+1}{1^2}=\dfrac{1+1}{1}=2$ **de decrecimiento pasa a crecimiento**

En x = 0 no existe función, por lo tanto no hay extremo alguno

$b)$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX\Rightarrow y=0\Rightarrow 2x^2-3x+2=0\Rightarrow\Delta=\left(-3\right)^2-4\cdot 2\cdot 2=-7<0\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow$$
$$No\ hay\ puntos\ de\ corte\ con\ OX$$

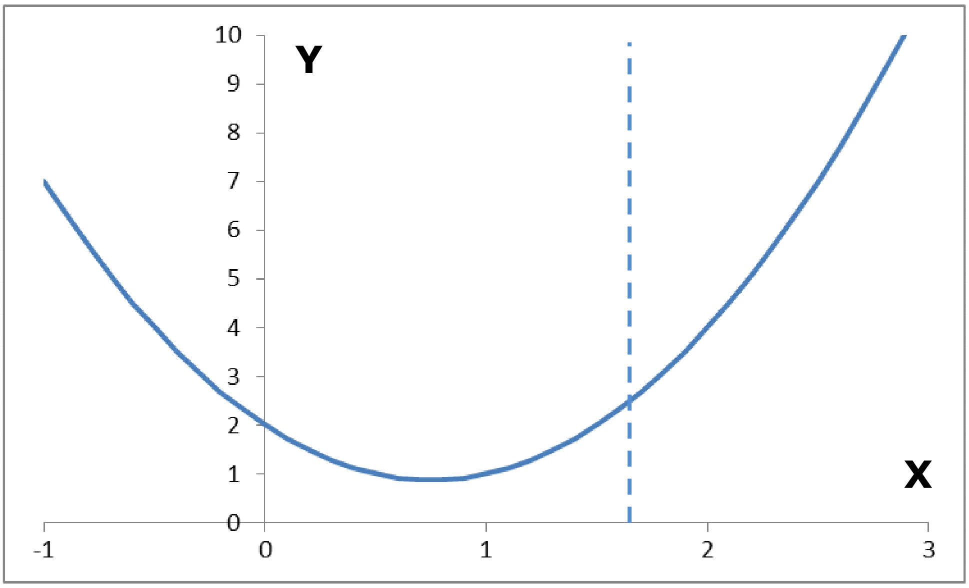
$$f\left(1\right)=2\cdot 1^2-3\cdot 1+2=1>0\Rightarrow Positivo$$

$$A=\int_0^2\left(2x^2-3x+2\right)dx=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^2-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^2+2\cdot\left[x\right]_0^2=\frac{2}{3}\cdot\left(2^3-0^3\right)-\frac{3}{2}\cdot\left(2^2-0^2\right)+2\cdot\left(2-0\right)$$

$$A=\frac{16}{3}-\frac{12}{2}+4=\frac{16}{3}-2=\frac{10}{3}\,u^2$$

Continuación del Problema P2 de la opción A

b) Continuación



P3) Una recta **r** pasa por el punto **(3 , 4 , 7)** y es paralela a la recta **s** de ecuación $s:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-4}{2}$.

Se pide:

a) Determinar las ecuaciones continuas y paramétricas de la recta **r**. **(5 puntos)**

b) Determinar la ecuación de un plano π que es perpendicular a **r** y pasa por el punto **(1 , 1 , 1). (5 puntos)**

a) La recta **r** tiene como vector director el de la recta **s** y con el punto dado queda determinada la recta

$$\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_s}=(2\,,3\,,2)\Rightarrow r:\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-7}{2}\Rightarrow r:\begin{cases}x=3+2\lambda\\ y=4+3\lambda\\ z=7+2\lambda\end{cases}$$

b) El vector director del plano π es el de la recta **r** es perpendicular al vector **QG**, siendo **Q** el punto dado en el apartado b) y **G** el punto genérico del plano pedido, y por ello el producto escalar de ambos es nulo y la ecuación del plano pedido

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_r}=(2\,,3\,,2)\\ \overrightarrow{QG}=(x\,,y\,,z)-(1\,,1\,,1)=(x-1\,,y-1\,,z-1)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{QG}\Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{QG}=0\Rightarrow$$

$$(2\,,3\,,2)\cdot(x-1\,,y-1\,,z-1)=0\Rightarrow 2\,(x-1)+3\,(y-1)+2\,(z-1)=0\Rightarrow \pi\equiv 2x+3y+2z-7=0$$

El problema P4 no se soluciona porque no pertenece a la Matemática para las Ciencias y la Tecnología que es el objeto de este estudio