OPCIÓN A

A.1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda x + 4y + 12z = 0 \\ 2x + y + 4z = \lambda \\ \lambda x + y + 6z = 0 \end{cases}$

a) ***(1 punto)*** Determine los valores de λ para los que el sistema de ecuaciones tiene solución única.
b) ***(1,5 puntos)*** Resuelva el sistema, si es posible, cuando $\lambda = 4$ y cuando $\lambda = 0$.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 4 & 12 \\ 2 & 1 & 4 \\ \lambda & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3\lambda & 0 & -12 \\ 2-\lambda & 0 & -2 \\ \lambda & 1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} -3\lambda & -12 \\ 2-\lambda & -2 \end{vmatrix} = 6\lambda + 12\cdot(2-\lambda) = 6\lambda + 24 - 12\lambda = -6\lambda + 24$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow -6(\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 4$$

$$\forall \lambda \in \Re - \{4\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ \lambda = 4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 12 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -24 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow$$

$$Sistema.\ Incompatible$$

$b)$

$$Si\ \lambda = 4 \Rightarrow Sistema.\ Incompatible \Rightarrow No\ tiene\ solución$$

$$Si\ \lambda = 0 \Rightarrow Ecuación\ \hom ogénea$$

$$Como\ |A| = -6\cdot 0 + 24 = 24 \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Solución\ trivial \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (0\ ,\ 0\ ,\ 0)$$

A. 2. a) *(1,25 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos: $\pi : 2x + 3y - z = 1$ y

$$\pi' : \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = -1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$

b) *(1,25 puntos)* Encuentre la recta que pasa por el punto **P = (0 , 1 , 1)** y es perpendicular al plano π'. Escriba la ecuación de la recta como intersección de dos planos.

a) Los planos pueden cortarse, sus vectores directores no son iguales ni proporcionales, o ser paralelos o coincidentes, sus vectores directores son iguales o proporcionales y si, además, tienen un punto común entonces serán coincidentes sino paralelos.
El vector directos de π' es igual al producto vectorial de los vectores que la generan.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{1\pi'}} = (1\,,\,0\,,\,2) \\ \overrightarrow{v_{2\pi'}} = (1\,,\,-1\,,\,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi'}} = \overrightarrow{v_{1\pi'}} \wedge \overrightarrow{v_{2\pi'}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} - \vec{j} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi}} = (2\,,\,3\,,\,-1) \\ \overrightarrow{v_{\pi'}} = (2\,,\,1\,,\,-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2} \neq \frac{3}{1} \Rightarrow Se\ cor\tan\ según\ una\ recta\ r$$

b) El vector director de la recta **r** es el del plano π', y además tenemos el punto para determinarlo. La ecuación de la recta en continua nos dará las ecuaciones pedidas en el problema.

$$\begin{cases} P(0\,,\,1\,,\,1) \\ \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_{\pi'}} = (2\,,\,1\,,\,-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ -x = 2z - 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

A.3. Sea la función: $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x^2+4x+3}$

a) *(0,5 puntos)* Determine su dominio de definición.

b) *(1 punto)* Encuentre las asíntotas que tenga esa función.

c) *(1 punto)* Considere ahora la función: $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{x+3}$ Encuentre sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos, si existen.

$a)$

$$x^2+4x+3=0 \Rightarrow \Delta=4^2-4\cdot 1\cdot 3=4\geq 0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-4+2}{2}=-1 \\ x=\dfrac{-4-2}{2}=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(-1)=\dfrac{(-1+2)^2}{(-1)^2+4\cdot(-1)+3}=\dfrac{1^2}{0}=\dfrac{1}{0}\Rightarrow Sin\ solución \\ f(-3)=\dfrac{(-3+2)^2}{(-3)^2+4\cdot(-3)+3}=\dfrac{(-1)^2}{0}=\dfrac{1}{0}\Rightarrow Sin\ solución \end{cases} \Rightarrow Dom\,(f)=\forall x\in\Re-\{-3\,,-2\}$$

$b)$

$$Asíntotas\ verticales \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$$

Asíntota horizontal

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+4\frac{x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{1+\frac{4}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{1+\frac{4}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=\frac{1+0+0}{1+0+0}=1\Rightarrow$$

$Existe\ una\ asíntota\ horizontal,\ y=1,\ cuando\ x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^2+4\cdot(-x)+4}{(-x)^2+4\cdot(-x)+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-4\frac{x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{1-\frac{4}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{1-\frac{4}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=\frac{1-0+0}{1-0+0}=1\Rightarrow$$

$Existe\ una\ asíntota\ horizontal,\ y=1,\ cuando\ x\to-\infty$

Continuación del Problema A.3. de la opción A

$a)$*Continuación*

Asíntota oblicua

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+4}{x^3+4x^2+3x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+4\frac{x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{1+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\infty}+\frac{4}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{1+\frac{4}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=\frac{0+0+0}{1+0+0}=0\Rightarrow \textit{No existe una asíntota oblicua cuando } x\to\infty$$

$$m=\lim_{x\to´-\infty}\frac{\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+4}{x^3+4x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^2+4\cdot(-x)+4}{(-x)^3+4\cdot(-x)^2+3\cdot(-x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{-x^3+4x^2-3\cdot}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}-4\frac{x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{-\frac{x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}-\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{-1+\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{4}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{-1+\frac{4}{\infty}-\frac{3}{\infty}}=\frac{0-0+0}{1+0-0}=0\Rightarrow$$

No existe una asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$

$b)$

$$f'(x)=\frac{2(x+2)(x+3)-(x+2)^2}{(x+3)^2}=\frac{2(x^2+5x+6)-x^2-4x-4}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+8}{(x+3)^2}$$

$$x^2+6x+8=0\Rightarrow\Delta=6^2-4\cdot1\cdot8=4\ge0\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-6+2}{2}=-2\\ x=\frac{-6-2}{2}=-4\end{cases}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}>0\Rightarrow\begin{cases}x+2>0\Rightarrow x>-2\\ x+4>0\Rightarrow x>-4\\ (x+3)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

$-\infty$ **-4** **-2** ∞

x > -4	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > -2	**(-)**	**(-)**	**(+)**
(x + 3)^2 > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**

Crecimiento $\forall x\in\Re/(x<-4)\cup(x>-2)$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re/-4<x<-2$

Máximo relativo en $x=-4\Rightarrow f(-4)=\frac{(-4+2)^2}{-4+3}=\frac{(-2)^2}{-1}=-4$ De crecimiento pasa a decrecimiento

Mínimo relativo en $x=-2\Rightarrow f(-2)=\frac{(-2+2)^2}{-2+3}=\frac{0^2}{1}=0$ De decrecimiento pasa a crecimiento

A.4. a) *(1,25 puntos)* Calcule: $\int_2^3 \frac{1}{2x^2-4x+2}\,dx$

b) *(1,25 puntos)* Determine el límite: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+2\cdot\ln(x)+[\ln(x)]^2}{x\,[1+\ln(x)]}$

$a)$

$$2x^2-4x+2=2\left(x^2-2x+1\right)\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot1=0\Rightarrow x=\frac{2-\sqrt{0}}{2\cdot1}=1\Rightarrow Sol\ doble$$

$$2x^2-4x+2=2\left(x^2-2x+1\right)=2\,(x-1)^2$$

$$\int_2^3 \frac{1}{2x^2-4x+2}\,dx=\int_2^3\frac{1}{2\,(x-1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{2}\int_1^2 t^{-2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-1)}\cdot\left[t^{-1}\right]_1^2=-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{t}\right]_1^2=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)=\frac{1}{4}$$

$$x-1=t\Rightarrow dx=dt\Rightarrow\begin{cases}x=3\Rightarrow t=2\\ x=2\Rightarrow t=1\end{cases}$$

$b)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2\cdot\ln(x)+[\ln(x)]^2}{x\,[1+\ln(x)]}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}+2\ln(x)\frac{1}{x}}{[1+\ln(x)]+x\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{2}{x}\ln(x)}{1+\ln(x)+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}(1+\ln(x))}{2+\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,(1+\ln(x))}{x\,[2+\ln(x)]}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{[2+\ln(x)]+x\cdot\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{2+\ln(x)+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3+\ln(x)}==\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x\,(3+\ln(x))}=\frac{2}{\infty}=0$$

OPCIÓN B

B.1. Sean **A** y **B** las dos matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix}$

a) *(1 punto)* ¿Para qué valores de **a** existe la inversa de **AB**? ¿Y la de **BA**?

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la inversa de la matriz: $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Compruebe que cuando la matriz encontrada se multiplica por la izquierda por **C**, se obtiene la identidad

a) Existe la matriz inversa a una dada cuando su determinante es distinto de cero

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2a & a-1 \\ 3 & a-1 \end{pmatrix}\Rightarrow |A\cdot B|=\begin{vmatrix} -2a & a-1 \\ 3 & a-1 \end{vmatrix}=(a-1)\cdot\begin{vmatrix} -2a & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$|A\cdot B|=(a-1)\cdot(-2a-3)=-(a-1)\cdot(2a+3)\Rightarrow Si\ |A\cdot B|=0\Rightarrow -(a-1)\cdot(2a+3)=0\Rightarrow$$

$$(a-1)\cdot(2a+3)=0\Rightarrow\begin{cases} a-1=0\Rightarrow a=1 \\ 2a+3=0\Rightarrow 2a=-3\Rightarrow a=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow \end{cases}$$

$$\forall a\in\Re-\left\{-\frac{3}{2},1\right\}\Rightarrow |A\cdot B|\neq 0\Rightarrow Existe\ (AB)^{-1}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2a & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3a & 3+a & a \end{pmatrix}\Rightarrow |B\cdot A|=\begin{vmatrix} -2a & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3a & 3+a & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2a & 3 & 1 \\ -2a & 2 & 0 \\ 2a^2+3a & 3-2a & 0 \end{vmatrix}$$

$$|B\cdot A|=1\cdot\begin{vmatrix} -2a & 2 \\ a\,(2a+3) & 3-2a \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2a+3 & 3-2a \end{vmatrix}=2a\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2a+3 & 3-2a \end{vmatrix}=2a\cdot(-3+2a-2a-3)=-12a$$

$$Si\ |B\cdot A|=0\Rightarrow -12a=0\Rightarrow a=0\Rightarrow \forall a\in\Re-\{0\}\Rightarrow |B\cdot A|\neq 0\Rightarrow Existe\ (BA)^{-1}$$

$b)$

$$|C|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow Existe\ C^{-1}\Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{|C|}\cdot\left(adj\ C^t\right)\Rightarrow C^t=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\ C^t=\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Continuación del Problema B.1 de la opción B

$b)Continuación$

$$CC^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&3\\2&4&3\\2&3&4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-2&2&0\\-2&0&2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&3&3\\2&4&3\\2&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-2&2&0\\-2&0&2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

B.2.- Dadas las rectas: $r:\dfrac{x-1}{k}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}\quad con\ k\neq 0\quad y\quad s:\begin{cases}x-y-z=0\\2x-y=1\end{cases}$

a) *(2 puntos)* Estudie las posiciones relativas de las rectas según los diferentes valores de **k**.
b) *(0,5 puntos)* ¿Existen valores de **k** para los que las rectas son perpendiculares?

a) Analizaremos si las rectas, en ecuaciones paramétricas, tienen un punto común, si el sistema que resulta es compatible determinado son secantes, si es compatible indeterminado las rectas coinciden.
Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio.

$$\begin{cases}r:\begin{cases}x=1+k\mu\\y=2+2\mu\\z=-\mu\end{cases}\\x+z=1\Rightarrow x=1-z\Rightarrow 2(1-z)-y=1\Rightarrow y=2-1-2z\Rightarrow s:\begin{cases}x=1-\lambda\\y=1-2\lambda\\z=\lambda\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+k\mu=1-\lambda\\2+2\mu=1-2\lambda\\-\mu=\lambda\end{cases}$$ Com

o el sistema tiene dos incógnitas el rango de la matriz de los coeficientes ampliada debe de ser nula para que el sistema sea compatible determinado y siempre que haya un menor de grado 2, de ahí sacaremos los valores de **k** en donde las rectas se cortan en un punto. Si el rango del menor es 1 entonces son rectas coincidentes
Para los valores de **k** que no anulan el determinante de la matriz de los coeficientes ampliada el sistema es incompatible, de ahí se deducirá si son paralelas o se cruzan dependiendo de la igualdad o proporcionalidad de sus vectores directores.

$$\begin{cases}k\mu+\lambda=0\\2\mu+2\lambda=-1\\\mu-\lambda=0\end{cases}\Rightarrow|A/B|=\begin{vmatrix}k&1&0\\2&2&-1\\1&-1&0\end{vmatrix}=-1-k\Rightarrow Si\ |A/B|=0\Rightarrow -1-k=0\Rightarrow k=-1\Rightarrow$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&1\\2&2\end{vmatrix}=-2-2=-4\neq 0\Rightarrow Cuando\ k=-1\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2=Número\ incognitas$$

$$\forall k\in\Re-\{-1\}\Rightarrow|A/B|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3\Rightarrow Sistema\ Incompatible\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(k\ ,2\ ,-1)\\\overrightarrow{v_r}=(-1\ ,-2\ ,1)\end{cases}\Rightarrow\frac{k}{-1}=\frac{2}{-2}=\frac{-1}{1}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{k}{-1}=\dfrac{2}{-2}\Rightarrow -2k=-2\Rightarrow k=1\\\dfrac{k}{-1}=\dfrac{-1}{1}\Rightarrow k=1\end{cases}$$

Continuación del Problema B.2 de la opción B

$a)Continuación$

$\forall k \in \Re - \{-1\ ,1\} \Rightarrow Las\ rectas\ se\ cruzan\ en\ el\ espacio$

$Si\ k = 1 \Rightarrow Las\ rectas\ son\ paralelas$

b) Al ser las rectas perpendiculares los son sus vectores directores y el producto escalar tiene que ser nulo, además tienen que cortarse por lo tanto **k = -1**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (k\ ,2\ ,-1) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1\ ,-2\ ,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (k\ ,2\ ,-1)\cdot(-1\ ,-2\ ,1) = -k - 4 - 1 \Rightarrow$$

$$-k - 5 = 0 \Rightarrow k = -5 \neq -1 \Rightarrow No\ existe\ una\ recta\ perpendicular$$

B. 3. a) Considere las funciones: **f(x) = x^2 + 1** y **g(x) = 3 - x**.
(0,5 puntos) Determine los puntos de corte de esas dos funciones.
(1 punto) Determine el área encerrada entre esas dos funciones.

b)*(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:
h(x) = x^6 – 2

$a)$

$$x^2 + 1 = 3 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1 + 8 = 9 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1^2 + 1 = 2 \\ g(1) = 3 - 1 = 2 \end{cases} \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5 \\ g(1) = 3 - (-2) = 5 \end{cases} \end{cases}$$

$$x = 0 \in (-2\ ,1) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0^2 + 1 = 1 > 0 \\ g(0) = 3 - 0 = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) > f(x) \Rightarrow$$

$$A = \int_{-2}^{1} (3 - x)\,dx - \int_{-2}^{1} (x^2 + 1)\,dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\,dx = 2\cdot[x]_{-2}^{1} - \frac{1}{2}\cdot[x^2]_{-2}^{1} - \frac{1}{3}\cdot[x^3]_{-2}^{1}$$

$$A = 2\cdot[1 - (-2)] - \frac{1}{2}\cdot\left[1^2 - (-2)^2\right] - \frac{1}{3}\cdot\left[1^3 - (-2)^3\right] = 2\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot(1 - 4) - \frac{1}{3}\cdot[1 - (-8)] = 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3}$$

$$A = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}\,u^2$$

Continuación del Problema B.3 de la opción B

b)

$h'(x)=6x^5 \Rightarrow h'(x)=0 \Rightarrow 6x^5=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \textit{Posible máximo o mínimo relativo}$

$h''(x)=30x^4 \Rightarrow h''(x)=0 \Rightarrow 30x^4=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \textit{Posible punto de inflexión}$

$h'''(x)=120x^3 \Rightarrow h'''(x)=0 \Rightarrow 120x^3=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \textit{Posible máximo o mínimo relativo}$

$h^{IV}(x)=360x^2 \Rightarrow h^{IV}(x)=0 \Rightarrow 360x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \textit{Posible punto de inflexión}$

$h^{V}(x)=720x \Rightarrow h^{V}(x)=0 \Rightarrow 720x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \textit{Posible máximo o mínimo relativo}$

$h^{VI}(x)=720>0 \Rightarrow \textit{Al ser la derivada de orden par} \Rightarrow \textit{Mínimo relativo}$

$\textit{Mínimo relativo} \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=0^6-2=-2$

B.4. a) *(1,25 puntos)* Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcule: $\int \frac{e^x}{1-e^{-x}}\,dx$

b)*(1,25 puntos)* Calcule: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{x}}$

$a)$

$$I = \int \frac{e^x}{1-e^{-x}}\,dx = \int \frac{dt}{1-t^{-1}} = \int \frac{dt}{1-\frac{1}{t}} = \int \frac{dt}{\frac{t-1}{t}} = \int \frac{t\,dt}{t-1} = \int \left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt = \int dt + \int \frac{dt}{t-1} = t + \int \frac{du}{u}$$

$$e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow e^{-x} = e^{x\cdot(-1)} = \left(e^x\right)^{-1}$$

$$\begin{array}{r|l} t & t-1 \\ \hline -t+1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$t-1 = u \Rightarrow dt = du$$

$$I = e^x + \ln u = e^x + \ln(t-1) = e^x + \ln\left(e^x - 1\right) + K$$

$b)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{x}} = 1^{\infty} \Rightarrow Siendo\ A = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln A = \ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{x}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{x}}$$

$$\ln A = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \infty\cdot\ln 1 = \infty\cdot 0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\ln 1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} =$$

$$\ln A = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}\cdot\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{(x-1)(x+1)}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x\sqrt{x}}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(-4)\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}x}{2x} = \lim_{x\to+\infty}(-2)\frac{\frac{2x+x}{2\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}(-4)\frac{3x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-12}{\sqrt{x}} = -\frac{12}{\infty} = 0 \Rightarrow$$

$$\ln A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\sqrt{x}} = 1$$