

1.- ÁLGEBRA**OPCIÓN A**

a) (1'5 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de orden 2. Hallar la relación entre a , b , c para que se verifique $A^{-1} = 2I - A$

$$A \cdot A^{-1} = A(2I - A) \Rightarrow I = 2AI - A^2 \Rightarrow I = 2A - A^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ 2b & 2c \end{pmatrix} \\ A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2a \\ 2b & 2c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4-4-ab & 2a-2a-ac \\ 2b-2b-bc & 2c-ab+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -ab & -ac \\ -bc & 2c-ab+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ab = 1 \\ -ac = 0 \\ -bc = 0 \\ 2c-ab+c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2c - (-1) + c^2 = 1 \Rightarrow 2c + c^2 = 0 \Rightarrow c \cdot (c+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c+2 = 0 \Rightarrow c = -2 \end{cases}$$

$$\text{Si } c = 0 \Rightarrow \begin{cases} ac = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow \text{Im posible porque } ab = -1 \\ a \neq 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{a} \end{cases} \\ bc = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \Rightarrow \text{Im posible porque } ab = -1 \\ b \neq 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{b} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Si } c = -2 \Rightarrow \begin{cases} ac = 0 \Rightarrow a = 0 \\ bc = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

b) (1 punto) Calcular, en función del parámetro k , el rango de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{pmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{vmatrix} = k - 30 - 1 - 5 + 3 + 2k = 3k - 33 \Rightarrow \text{Si } |B| = 0 \Rightarrow 3 \cdot (k - 11) = 0 \Rightarrow k - 11 = 0 \Rightarrow k = 11$$

$$\text{Si } k \neq 11 \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(B) = 3$$

$$\text{Si } k = 11 \Rightarrow |B| = 0 \Rightarrow \text{adj}(B) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(B) = 2$$

OPCIÓN B

a) (1'25 puntos) Resolver el siguiente determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a+c & -b-a & -c+b \\ a+c & b-a & c+b \end{vmatrix}$ sin utilizar la

regla de Sarrus

$$\text{Sumando } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \text{ fila} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & -a & b \\ a+c & b-a & c+b \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Sumando, de nuevo, } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \text{ fila} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+c & b-a & c+b \\ a+c & b-a & c+b \end{vmatrix} \text{ Restando } 2^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \text{ fila} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+c & b-a & c+b \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Por tener una fila de ceros}$$

b) (1'25 puntos) Para $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, calcular M^n con $n \in \mathbb{N}$

$$M^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \cdot 1 & \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \\ 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 1 & 1 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} & -\frac{3}{8} + \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow M^3 = M^2 \cdot M = I_2 \cdot M = M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow M^4 = I_2 \cdot I_2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Si } n = \text{par} \Rightarrow M^n = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{Si } n = \text{impar} \Rightarrow M^n = M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

2.- GEOMETRÍA**OPCIÓN A**

a) (1'5 puntos) Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos **A(5, 0, 1)**; **B(4, 1, 0)** y

es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$

$$r \equiv \begin{cases} -2x + 4y - 6z = 0 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow 5y - 7z = 5 \Rightarrow 5y = 5 + 7z \Rightarrow y = 1 + \frac{7}{5}z \Rightarrow 2x + 1 + \frac{7}{5}z - z = 5 \Rightarrow$$

$$2x + \frac{2}{5}z = 4 \Rightarrow 10x + 2z = 20 \Rightarrow 10x = 20 - 2z \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{5}z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{5}z \\ y = 1 + \frac{7}{5}z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_r = \left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, 1 \right) \equiv (-1, 7, 5) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + 7\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}$$

El plano buscado π está generado por el vector de la recta, del que es paralela; el vector formado por los puntos **A** y **B** y el vector generador formado por el punto generador **G** y uno de los puntos dados. Estos tres planos son coplanarios siendo la matriz, formada por ellos, nula

$$x - z = 2 \Rightarrow x = 2 + z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 7, 5) \\ \vec{AB} = (4, 1, 0) - (5, 0, 1) = (-1, 1, -1) \equiv (1, -1, 1) \\ \vec{AG} = (x, y, z) - (5, 0, 1) = (x - 5, y, z - 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5 \cdot (x-5) - y + 7 \cdot (z+1) - (z+1) - 7 \cdot (x-5) - 5y = 0 \Rightarrow$$

$$-12 \cdot (x-5) - 6y + 6 \cdot (z+1) = 0 \Rightarrow 12x + 6y - 6z - 60 - 6 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y - z - 9 = 0$$

b) (1 punto) Estudiar si los vectores $\vec{u} = (1, -1, 1)$; $\vec{v} = (1, 0, 0)$ y $\vec{w} = (2, -2, 1)$ son linealmente independientes

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = 0 \Rightarrow \alpha(1, -1, 1) + \beta(1, 0, 0) + \gamma(2, -2, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha - 2\gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \alpha + 0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow 0 + \beta + 0 = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \text{Son linealmente independientes}$$

OPCIÓN B

a) (1'5 puntos) Hallar el punto simétrico de $A(2, 0, 1)$ respecto al plano $\pi \equiv x + 2y + z = 2$

Por A se traza una recta r perpendicular al plano, que tendrá como vector director el del plano, hallándose el punto de corte P de esta con aquel que será el punto medio entre el dado y su simétrico A'

$$\vec{v}_r = (1, 2, 1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Corte con } \pi \Rightarrow (2 + \lambda) + 2 \cdot 2\lambda + (1 + \lambda) = 2 \Rightarrow 2 + \lambda + 4\lambda + 1 + \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$6\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6} \Rightarrow P \begin{cases} x = 2 + \left(-\frac{1}{6}\right) = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6} \\ y = 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \\ z = 1 + \left(-\frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{11}{6} = \frac{2 + x_{A'}}{2} \Rightarrow 12 + 6x_{A'} = 22 \Rightarrow 6x_{A'} = 10 \\ -\frac{1}{3} = \frac{0 + y_{A'}}{2} \Rightarrow -2 = 3y_{A'} \\ \frac{5}{6} = \frac{1 + z_{A'}}{2} \Rightarrow 6 + 6z_{A'} = 10 \Rightarrow 6z_{A'} = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A' \left(\frac{10}{6}, -\frac{3}{2}, \frac{4}{6} \right) \Rightarrow A' \left(\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3} \right)$$

b) (1 punto) Obtener las ecuaciones de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y - 2z = 1 \end{cases}$ en forma paramétrica y

en forma continua

$$3x - z = 4 \Rightarrow z = 3x - 4 \Rightarrow 2 \cdot x + y + 3x - 4 = 3 \Rightarrow y + 5x = 7 \Rightarrow y = 7 - 5x \Rightarrow$$

$$\text{Ecuación paramétrica} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 - 5\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = x \\ \lambda = \frac{y-7}{5} \\ \lambda = \frac{z+4}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Ecuación continua} \Rightarrow x = \frac{y-7}{5} = \frac{z+4}{3}$$

ANÁLISIS**OPCIÓN A**

1.- Sean $f(x) = \cos(3x + 1)$ y $h(x) = \operatorname{sen}^2(x)$

a) (0'5 puntos) Calcular $g(x) = (h \circ f)(x)$

b) (0'5 puntos) Comprobar si $g(x)$ es una función par

c) (1'5 puntos) Obtener $g'(x)$ y estudiar si es cierto que $g'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

a)

$$g(x) = (h \circ f)(x) \Rightarrow g(x) = h[f(x)] \Rightarrow g(x) = \operatorname{sen}^2[\cos(3x + 1)]$$

b)

$$g(-x) = \operatorname{sen}^2[\cos\{3(-x) + 1\}] = \operatorname{sen}^2[\cos(1 - 3x)] \neq g(x) = \operatorname{sen}^2[\cos(3x + 1)] \Rightarrow \text{No es función par}$$

c)

$$g'(x) = 2\operatorname{sen}[\cos(3x + 1)] \cdot \cos[\cos(3x + 1)] \cdot [-\operatorname{sen}(3x + 1)] \cdot 3 =$$

$$g'(x) = -6 \cdot \cos[\cos(3x + 1)] \cdot \sin[\cos(3x + 1)] \cdot \sin(3x + 1) = -3 \cdot \operatorname{sen} 2 \cdot [\cos(3x + 1)] \cdot \operatorname{sen}(3x + 1)$$

$$g'\left(\frac{1}{3}\right) = -3 \cdot \operatorname{sen} 2 \left[\cos\left(3 \cdot \frac{1}{3} + 1\right) \right] \cdot \operatorname{sen}\left(3 \cdot \frac{1}{3} + 1\right) = -3 \cdot \operatorname{sen} 2 [\cos(1 + 1)] \cdot \operatorname{sen}(1 + 1)$$

$$g'\left(\frac{1}{3}\right) = -3 \cdot \operatorname{sen} [2 \cdot (\cos 2)] \cdot \operatorname{sen} 2 = 2,017214617452648626646577306301 \neq 0 \Rightarrow$$

No se cumple

2.- Sea $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+2}}$

a) (0'5 puntos) Calcular su dominio

b) (0'75 puntos) Encontrar los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX y estudiar si la función es creciente en el intervalo $(0, 1)$

c) (0'5 puntos) Obtener el límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x+2}$

d) (0'75 puntos) Hallar $\int_{-1}^1 f(x) dx$

a)

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+2}} = \sqrt{\frac{(x+2)x^2}{x+2}} = \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R}$$

b)

$$\text{Cuando} \begin{cases} y = 0 \Rightarrow \frac{(x+2)x^2}{x+2} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0) \\ x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{(0+2) \cdot 0^2}{0+2}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{(x+2) \cdot x^2}{x+2}} = |x| = 0 \Rightarrow (0, 0) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 \Rightarrow \text{Decreciente} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x < 0 \\ f'(x) > 0 \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

En el intervalo pedido es creciente

c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

d)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = \int_0^{-1} x dx + \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^{-1} = \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^{-1} + \frac{1}{2} \cdot (1^2 - 0^2) = \frac{1}{2} \cdot [(-1)^2 - 0^2] + \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

OPCIÓN B

1.- a) (1'25 puntos) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx$

a)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \cos(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \operatorname{sen}^2(x)] \cos(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2(x) \cos(x) dx$$

$$I = [\operatorname{sen}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2(x) \cos(x) dx = \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0) \right] - \int_0^1 t^2 dt = (1-0) - \frac{1}{3} \cdot [t^3]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} \cdot (1^3 - 0^3)$$

$$\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos(x) dx = dt \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \operatorname{sen} 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

$$I = 1 - \frac{1}{3} \cdot (1 - 0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

b) (1'25 puntos) Sea $f(x) = e^{ax}$, con $a \in \mathfrak{R}$. Calcular $f^{(n)}(x) - a^n f(x)$, siendo $f^{(n)}(x)$ la derivada n-ésima de $f(x)$

$$f'(x) = a \cdot e^{ax} \Rightarrow f''(x) = a \cdot a \cdot e^{ax} = a^2 \cdot e^{ax} \Rightarrow f'''(x) = a^3 \cdot e^{ax} \Rightarrow \dots \Rightarrow f^{(n)}(x) = a^n \cdot e^{ax} \Rightarrow$$

$$f^{(n)}(x) - a^n \cdot f(x) = a^n \cdot e^{ax} - a^n \cdot e^{ax} = 0$$

2.- a) (1'25 puntos) Sea $f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ \frac{x^4 + 2x + a}{x + 1} & x \geq 0 \end{cases}$. Estudiar para que valores del

parámetro a esta función es continua en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}} = (0^2 + 1)^{\frac{1}{0}} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(x^2 + 1)^{\frac{1}{x^2}} \right]^{\frac{1}{x} \cdot x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x} = e^0 = 1 \Rightarrow \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 + 2x + a}{x + 1} = \frac{0^4 + 2 \cdot 0 + a}{0 + 1} = a \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

b) (1'25 puntos) Entre los números, cuya suma es 36, encontrar aquellos números positivos cuya suma de cuadrados sea mínima.

$$\begin{cases} a + b = 36 \Rightarrow b = 36 - a \\ S = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow S = a^2 + (36 - a)^2 = a^2 + 36^2 + a^2 - 72a = 2a^2 - 72a + 1296 \Rightarrow$$

$$S = 2 \cdot (a^2 - 36a + 648) \Rightarrow S' = \frac{dS}{da} = 2 \cdot (2a - 36) = 4 \cdot (a - 18) \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow 4 \cdot (a - 18) = 0 \Rightarrow$$

$$a - 18 = 0 \Rightarrow a = 18 \Rightarrow \text{Como } S'' = \frac{d^2S}{da^2} = 4 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = 36 - 18 = 18 \end{cases}$$