

**OPCIÓN A**

A.1.-Dada las matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que  $\det(A^2) = (\det(A))^2$

b) Estudiar si para cualquier matriz  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de orden 2 se cumple que

$$\det(M^2) = (\det(M))^2$$

c) Encontrar la relación entre los elementos de las matrices  $M$  cuadradas de orden 2 que satisfacen  $\det(M + I) = \det(M) + \det(I)$

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1 \Rightarrow |A|^2 = (-1)^2 = 1 \\ A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Comprobado} \Rightarrow |A|^2 = |A^2|$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} |M| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \Rightarrow |M|^2 = (ad - bc)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \\ M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} \Rightarrow |M^2| = \begin{vmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{vmatrix} = (a^2 + bc)(bc + d^2) - (a + d)^2 bc \\ (a^2 + bc)(bc + d^2) - (a + d)^2 bc = a^2bc + a^2d^2 + b^2c^2 + bcd^2 - a^2bc - d^2bc - 2abcd = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \end{array} \right.$$

Se cumple para todas las matrices

c)

$$\left\{ \begin{array}{l} M + I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M + I| = \begin{vmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{vmatrix} = (a+1)(d+1) - bc \\ |M| + |I| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad - bc + 1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$(a+1)(d+1) - bc = ad - bc + 1 \Rightarrow ad + a + d + 1 - bc = ad - bc + 1 \Rightarrow a + d = 0 \Rightarrow d = -a$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A.2.-} \text{ Sea } \begin{cases} 3x+2 & x < 0 \\ x^2 + 2a \cos(x) & 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estudiar los valores de **a** y **b** para los que la función **f(x)** es continua para todo valor de **x**

b) Determinar la derivada de **f(x)** en el intervalo  $(0, \pi)$

c) Calcular  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$

a)

$$\begin{cases} 3x+2 & x < 0 \\ x^2 + 2a \cos(x) & 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & x \geq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 \cdot 0 + 2 = 2 \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^2 + 2a \cdot \cos 0 = 2a \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \pi^2 + 2a \cdot \cos \pi = \pi^2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) = \pi^2 - 2 \\ f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = 1 \cdot \pi^2 + b = \pi^2 + b \Rightarrow b = -2 \end{cases} \end{cases}$$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 2x - 2 \operatorname{sen}(x) & 0 \leq x < \pi \\ 2x & x \geq \pi \end{cases}$$

c)

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} [x^2 + 2 \cos(x)] dx + \int_{\pi}^{2\pi} (x^2 - 2) dx = \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^{\pi} + 2[\operatorname{sen} x]_0^{\pi} + \frac{1}{3} \cdot [x^3]_{\pi}^{2\pi} - 2 \cdot [x]_{\pi}^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^{2\pi} + 2 \cdot (\operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} 0) - 2 \cdot (2\pi - \pi) = \frac{1}{3} \cdot [(2\pi)^3 - 0^3] + 2 \cdot (0 - 0) - 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{8}{3} \pi^3 - 2\pi$$

**A.3.-** - Calcular un polinomio de tercer grado  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  que satisfice:

I)  $p(0) = 5$

II) Tiene un máximo en  $x = 1$  y un punto de inflexión en  $x = 0$

III)  $\int_0^1 p(x) dx = \frac{9}{4}$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 5 \Rightarrow d = 5 \\ p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow p'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ p''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow p''(0) = 6a \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (ax^3 + cx + 5) dx = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot a(1^4 - 0^4) + \frac{1}{2} \cdot c(1^2 - 0^2) + 5(1 - 0) = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot c + 5 = \frac{9}{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3a + c = 0 \\ \frac{1}{4} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot c + 5 = \frac{9}{4} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a + c = 0 \\ a + 2c + 20 = 9 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a + c = 0 \\ a + 2c = -11 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3a + c = 0 \\ -3a - 6c = +33 \end{array} \right. \Rightarrow -5c = +33 \Rightarrow$$

$$c = -\frac{33}{5} \Rightarrow 3a - \frac{33}{5} = 0 \Rightarrow a = \frac{33}{15} \Rightarrow p(x) = \frac{33}{15}x^3 - \frac{33}{5}x + 5$$

**A.4.-** Dadas las rectas  $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}$   $s \equiv x = y + 4 = 2z - 8$

a) Comprobar que se cortan

b) Hallar el ángulo que forman

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -4 + z \Rightarrow -4 + z + y + z = 0 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -4 + \mu \\ z = 4 + \frac{\mu}{2} \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} -4 + \lambda = \mu \\ 4 - 2\lambda = -4 + \mu \\ \lambda = 4 + \frac{\mu}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 4 \\ 2\lambda + \mu = 8 \\ 2\lambda - \mu = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = 4 \\ 2\lambda + \mu = 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow 4 - \mu = 4 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow 2 \cdot 4 - 0 = 8 \Rightarrow$$

$$2\lambda - \mu = 8 \Rightarrow 2 \cdot 4 - 0 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \Rightarrow \text{Se cortan en } A \begin{cases} x = -4 + 4 = 0 \\ y = 4 - 2 \cdot 4 = -4 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow A(0, -4, 4)$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = (1, -2, 1) \\ \vec{v}_s = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right) \equiv (2, 2, 1) \end{array} \right. \Rightarrow \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{|(1, -2, 1) \cdot (2, 2, 1)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|2 - 4 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{9}} = \frac{|-1|}{3\sqrt{6}}$$

$$\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \frac{1}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{18} \Rightarrow \text{ang}(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \text{arc cos} \frac{\sqrt{6}}{18} = 82^\circ 10' 44''$$

**OPCIÓN B**

**B.1.** Sean  $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Estudiar para que valores de  $\alpha$  y  $\beta$  la matriz  $A$  tiene inversa

b) Calcular  $A^3$

c) Hallar la matriz inversa de  $B$

a)

$$\text{Como } |A| = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \exists \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R}$$

*No hay ningún valor de  $\alpha$  y  $\beta$  que haga a la matriz  $A$  invertible*

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot (\text{adj } B^t) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ t & k & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } B^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} k & 0 \\ t & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & 1 \\ t & k \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & k \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**B.2.** Obtener las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que:

- I) El perímetro del primero de ellos es triple del perímetro del tercero
- II) Se necesitan exactamente 1664 metros de valla para vallar los tres campos
- III) La suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible

Sea **a** el lado del primero, **b** del segundo y **c** del tercero

$$\left\{ \begin{array}{l} 4a = 3 \cdot 4b \Rightarrow a = 3b \\ 4a + 4b + 4c = 1664 \Rightarrow 4(a + b + c) = 1664 \Rightarrow a + b + c = 416 \Rightarrow 3b + b + c = 416 \Rightarrow c = 416 - 4b \Rightarrow \\ S = a^2 + b^2 + c^2 = (3b)^2 + b^2 + (416 - 4b)^2 = 10b^2 + 173506 + 16b^2 - 3328b \end{array} \right.$$

$$S = 26b^2 - 3328b + 173506 \Rightarrow S' = \frac{dS}{db} = 52b - 3328 \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow 52b - 3328 = 0 \Rightarrow b = \frac{3328}{52} = 64 \text{ m}$$

$$S'' = \frac{d^2S}{db^2} = 52 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 64 \text{ m} \\ a = 3 \cdot 64 = 192 \text{ m} \\ c = 416 - 4 \cdot 64 = 160 \text{ m} \end{array} \right.$$

B.3.-a) Utilizando el cambio de variable  $t = \ln x$ , calcular  $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(4 - \ln x)}$

b) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x) \text{sen}(5x)}{(x - x^2)^2}$

a)

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(4 - \ln x)} = \int_1^2 \frac{1}{4 - t} dt = -\int_3^2 \frac{du}{u} = -[\ln u]_3^2 = -(\ln 2 - \ln 3) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$

$$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \begin{cases} x = e^2 \Rightarrow t = \ln e^2 = 2 \cdot \ln e = 2 \cdot 1 = 2 \\ x = e \Rightarrow t = \ln e = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 - t = u \Rightarrow dt = -du \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow u = 2 \\ t = 1 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x) \text{sen}(5x)}{(x - x^2)^2} &= \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos(4x) \text{sen}(5x) + 5 \cos(5x) \text{sen}(4x)}{2(x - x^2)(1 - 2x)} = \frac{0}{0} = \\ &= \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-16 \text{sen}(4x) \text{sen}(5x) + 20 \cos(5x) \cos(4x) - 25 \text{sen}(5x) \text{sen}(4x) + 20 \cos(5x) \cos(4x)}{2[(1 - 2x)^2 - 2(x - x^2)]} \end{aligned}$$

**Problema B2** (Continuación)c) *Continuación**Asíntotas oblicuas (Continuación)*

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{(-x+1)(-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 - 0} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{(x+2)^2}{x+1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 4 - (x^2 - x)}{-x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 4 - x^2 + x}{-x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 4}{-x + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{3x}{x} + \frac{4}{x}}{-\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 + \frac{4}{x}}{-1 + \frac{1}{x}} = \frac{-3 + 0}{-1 + 0} = 3$$

*Asíntota oblicua*  $\Rightarrow y = x + 3$  cuando  $x \rightarrow -\infty$



**B.3.-**

a) Calcular  $\int_{\ln e}^e |\ln x| dx$

b) Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x) \text{sen}(5x)}{(x-x^2)^2}$

a)

$$\ln x > 0 \Rightarrow x > e^0 \Rightarrow x > 1$$

$$\int_1^e |\ln x| dx = \int_1^e \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} = (e \ln e - 1 \ln 1) - \int_1^e dx = (e \cdot 1 - 1 \cdot 0) - [x]_1^e = e - (e - 1) = 1$$

$$\begin{cases} \ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \\ dx = dv \Rightarrow v = \int dx = x \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x) \text{sen}(5x)}{(x-x^2)^2} &= \frac{\text{sen}(4 \cdot 0) \text{sen}(5 \cdot 0)}{(0-0^2)^2} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos(4x) \text{sen}(5x) + 5 \cos(5x) \text{sen}(4x)}{2(x-x^2) \cdot (1-2x)} = \frac{4 \cos(4 \cdot 0) \text{sen}(5 \cdot 0) + 5 \cos(5 \cdot 0) \text{sen}(4 \cdot 0)}{2(0-0^2) \cdot (1-2 \cdot 0)} = \\ &= \frac{4 \cdot 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \cdot 0}{2 \cdot 0 \cdot 1} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-16 \text{sen}(4x) \text{sen}(5x) + 20 \cos(4x) \cos(5x) - 25 \text{sen}(5x) \text{sen}(4x) + 20 \cos(5x) \cos(4x)}{2 \cdot [(1-2x)^2 - 2(x-x^2)]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-41 \text{sen}(4x) \text{sen}(5x) + 40 \cos(4x) \cos(5x)}{2 \cdot [(1-2x)^2 - 2(x-x^2)]} = \frac{-41 \text{sen}(4 \cdot 0) \text{sen}(5 \cdot 0) + 40 \cos(4 \cdot 0) \cos(5 \cdot 0)}{2 \cdot [(1-2 \cdot 0)^2 - 2(0-0^2)]} = \\ &= \frac{-41 \cdot 0 \cdot 0 + 40 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot [(1-0)^2 - 2 \cdot 0]} = \frac{40}{2} = 20 \end{aligned}$$

**B.4.-** Se considera la recta  $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$  y el punto  $\mathbf{P}(1, 2, 3)$

a) Calcular la ecuación del plano  $\pi$  que es perpendicular a la recta  $r$  y contiene el punto  $\mathbf{P}$ .

b) Estudiar para que valores de  $k$  los vectores  $\left\{ \left(1, -2, -\frac{1}{2}\right), (0, k, 0), (0, 0, 2k) \right\}$  son linealmente independientes

a) El vector director de la recta es el del plano pedido que es perpendicular al vector formado por el punto  $\mathbf{P}$  y el genérico  $\mathbf{G}$  del plano, por lo tanto su producto escalar (que es la ecuación pedida es nulo)

$$y = 4 - 2z \Rightarrow x + 2(4 - 2z) = 7 \Rightarrow x - 4z = -1 \Rightarrow x = -1 + 4z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (4, -2, 1) \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (1, 2, 3) = (x-1, y-2, z-3) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{PG} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{PG} = 0 \Rightarrow \\ (4, -2, 1) \cdot (x-1, y-2, z-3) = 0 \Rightarrow 4(x-1) - 2(y-2) + z-3 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 4x - 2y + z - 3 = 0$$

b) Son independientes siempre que no sean coplanarios, por lo tanto cuando el determinante que forman sea distinto de cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{vmatrix} = 2k^2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 2k^2 = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Linealmente independientes} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Aunque para  $k = 0$  nos da dos vectores nulos lo que anularía el estudio, por lo tanto para  $\forall k \in \mathbb{R}$