

OPCIÓN A

A.1.- La liga de fútbol de un cierto país la juegan 21 equipos a doble vuelta. Este año los partidos ganados valían 3 puntos, los empatados 1 punto y los perdidos 0 puntos. En estas condiciones el equipo campeón de la liga obtuvo 70 puntos. Hasta el año pasado los partidos valían 2 puntos y el resto igual. Con el sistema antiguo el actual campeón hubiera obtenido 50 puntos. ¿Cuántos partidos ganó, empató y perdió el campeón?

Siendo **G** los partidos ganados, **E** los empatados y **P** los perdidos

$$\begin{cases} G + E + P = 40 \\ 3G + E = 70 \\ 2G + E = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3G + E = 70 \\ -2G - E = 50 \end{cases} \Rightarrow G = 20 \Rightarrow 3 \cdot 20 + E = 70 \Rightarrow E = 70 - 60 = 10 \Rightarrow$$

$$20 + 10 + P = 40 \Rightarrow P = 10 \Rightarrow \text{Solución}(20, 10, 10) \text{ partidos}$$

A.2.- Dada las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, determinar el área encerrada por las graficas de ambas funciones por las rectas:

a) $x = 0$ y $x = 1$

b) $x = 1$ y $x = 2$

a)

$$\text{Puntos de corte de las gráficas} \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = x^3 \Rightarrow x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{En } 0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow f(x) > g(x) \Rightarrow A_1 = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 - \frac{1}{4} \cdot [x^4]_0^1$$

$$A_1 = \frac{1}{3} \cdot (1^3 - 0^3) - \frac{1}{4} \cdot (1^4 - 0^4) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} u^2$$

b)

$$\text{En } 1 < x < 2 \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \\ g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} \end{cases} \Rightarrow f(x) < g(x) \Rightarrow A_1 = \int_1^2 x^3 dx - \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{4} \cdot [x^4]_1^2 - \frac{1}{3} \cdot [x^3]_1^2$$

$$A_1 = \frac{1}{4} \cdot (2^4 - 1^4) - \frac{1}{3} \cdot (2^3 - 1^3) = \frac{1}{4} \cdot (16 - 1) - \frac{1}{3} \cdot (8 - 1) = \frac{15}{4} - \frac{7}{3} = \frac{45 - 28}{12} = \frac{17}{12} u^2$$

A.3.- a) Comprobar si $f(x) = \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x}$ tiene un máximo relativo en $x = \frac{\pi}{4}$

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-1} \right)^{\frac{x^2}{x+3}}$

a)

$$f'(x) = \frac{(e^x + \cos x)e^x - e^x(e^x + \operatorname{sen} x)}{e^{2x}} = \frac{e^x + \cos x - (e^x + \operatorname{sen} x)}{e^x} = \frac{e^x + \cos x - e^x - \operatorname{sen} x}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{e^x} \Rightarrow$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{e^{\frac{\pi}{4}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}} = \frac{0}{e^{\frac{\pi}{4}}} = 0 \Rightarrow \text{¿máximo o mínimo?}$$

$$f''(x) = \frac{(-\operatorname{sen} x - \cos x)e^x - e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)}{e^{2x}} = \frac{-\operatorname{sen} x - \cos x - (\cos x - \operatorname{sen} x)}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{-\operatorname{sen} x - \cos x - \cos x + \operatorname{sen} x}{e^x} = -\frac{2\cos x}{e^x} \Rightarrow$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2\cos \frac{\pi}{4}}{e^{\frac{\pi}{4}}} = -\frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}} = -\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}} < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-1} \right)^{\frac{x^2}{x+3}} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+5+1}{x-1} \right)^{\frac{x^2}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{x-1} \right)^{\frac{x^2}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{6}} \right)^{\frac{x^2}{x+3}} =$$

$$= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{6}} \right)^{\frac{x-1}{6}} \right]^{\frac{x^2 \cdot 6}{x+3} \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 \cdot 6}{x+3} \cdot \frac{1}{x-1} \right)^{(*)}} = e^6$$

$$(*) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+3} \cdot \frac{6}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2}{x^2 + 2x - 3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2}{x^2 + \frac{2x}{x} - \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = 6$$

A.4.- ¿Para que valores del parámetro m la recta $r : x = y + 1 = \frac{11 - mz}{3}$ es paralela al plano $2x + y + z = 9$? Determinar el punto de intersección de la recta y el plano para $m = 2$

Al ser paralelos recta y plano sus vectores directores son perpendiculares u ortogonales y por lo tanto su producto escalar es nulo.

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z - \frac{11}{m}}{-3} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = \left(1, 1, -\frac{3}{m}\right) \equiv (m, m, -3) \\ \vec{v}_\pi = (2, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0 \Rightarrow$$

$$(m, m, -3) \cdot (2, 1, 1) = 0 \Rightarrow 2m + m - 3 = 0 \Rightarrow 3m = 3 \Rightarrow m = 1$$

Cuando $m = 2$

$$\vec{v}_r = (2, 2, -3) \Rightarrow r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \Rightarrow 2 \cdot 2\lambda + -1 + 2\lambda + \frac{11}{2} - 3\lambda = 9 \Rightarrow 3\lambda = 10 - \frac{11}{2} \Rightarrow 6\lambda = 20 - 11 \Rightarrow \\ z = \frac{11}{2} - 3\lambda \end{cases}$$

$$6\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow A \begin{cases} x = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \\ y = -1 + 2 \cdot \frac{3}{2} = -1 + 3 = 2 \Rightarrow A(3, 2, 1) \\ z = \frac{11}{2} - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{11}{2} - \frac{9}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

OPCIÓN B

B.1. Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$ calcular el valor del siguiente

determinante: $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$

$$3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 + 3 \cdot 0 - 3 \cdot 7 = -21$$

B.2.

a) La función $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ no está definida para $x = 0$. Definir $f(0)$ de modo que $f(x)$ sea una función continua en ese punto

b) Utilizando el cambio de variable $t = \ln x$ calcular $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$

a)

$$f(0) = \frac{\sqrt{0+1}-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1) \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b)

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx = \int \frac{\ln t}{t} dt = \int \ln t \cdot \frac{dt}{t} = \int u \cdot du = \frac{1}{2} \cdot u^2 = \frac{1}{2} \cdot (\ln t)^2 = \frac{1}{2} \cdot [\ln(\ln x)]^2$$

$$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \quad u = \ln t \Rightarrow du = \frac{dt}{t}$$

B.3.- Sea $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ una función polinómica de grado menor o igual a tres que tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un máximo relativo en $(2, 2)$. Calcular la expresión de dicha función

$$\begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0 \\ f(2) = 0 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 = 2 \Rightarrow 8a + 4b + 2c = 2 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 = 0 \Rightarrow 12a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ -6a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} + b = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

B.4.-

a) Estudiar la dependencia o independencia de los vectores :

$$\vec{u} = (2, 0, 9), \vec{v} = (3, -1, 2), \vec{w} = (5, -1, 4)$$

b) Dados los planos $\pi_1 : 3x - y + 2z + 1 = 0$ y $\pi_2 : 2x + y - 5z - 1 = 0$ determinar el ángulo que forman.

a) Si los vectores son linealmente independientes no serán coplanarios por lo tanto el determinante que generan es distinto de cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 27 + 45 + 4 = 14 \neq 0 \Rightarrow \text{Son linealmente independientes}$$

b) Será el ángulo que forman sus vectores directores

$$\pi_1 : 3x - y + 2z + 1 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : 2x + y - 5z - 1 = 0$$

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\vec{v}_{\pi_1} \cdot \vec{v}_{\pi_2}|}{|\vec{v}_{\pi_1}| \cdot |\vec{v}_{\pi_2}|} = \frac{|(3, -1, 2) \cdot (2, 1, -5)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{|6 - 1 - 10|}{\sqrt{14} \sqrt{30}} = \frac{|-5|}{2\sqrt{105}} = \frac{5\sqrt{105}}{210}$$

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{5\sqrt{105}}{210} = \frac{\sqrt{105}}{42} \Rightarrow \text{ang}(\pi_1, \pi_2) = \text{arc cos} \frac{\sqrt{105}}{42} = 75^\circ 52' 43''$$