OPCIÓN A

A.1.- Discutir el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+y-z=1 \\ x+2y-az=2 \\ -x+y-z=a-1 \end{cases}$

a) Según los valores del parámetro **a**

b) Entre los valores de **a** que hacen el sistema compatible elegir uno en particular y resolver el sistema que resulte al reemplazar **a** por el valor elegido.

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -a \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2a + a - 1 - 2 + a^2 + 1 = a^2 - a - 2 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1+3}{2} = 2 \\ a = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{-1\,,\,2\} \Rightarrow rang(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$Si\ a = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

$Si\ a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 4 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Sist. Compat. Indeterminado}$$

$b)$

Solucionaremos este último caso cuando $a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow y - z = 2 \Rightarrow y = z + 2 \Rightarrow 2x + z + 2 - z = 1 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Solución}\left(-\frac{1}{2}\,,\,\lambda + 2\,,\,\lambda\right)$$

A.2 Sea **C** una circunferencia cuyo centro es el punto **(1 , 1)** y que es tangente a los dos ejes coordenados

a) Escribir su ecuación general

c) Determinar los puntos de **C** donde la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante

$a)$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1^2 \Rightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1-1=0 \Rightarrow C \equiv x^2+y^2-2x-2y+1=0$$

$b)$

$$y=x \Rightarrow m=y'=1 \Rightarrow \begin{cases} C' \equiv 2x+2y.y'-2-2y'=0 \Rightarrow 2x+2y.1-2-2.1=0 \Rightarrow 2x+2y-4=0 \\ x^2+y^2-2x-2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y-2=0 \Rightarrow y=2-x \\ x^2+y^2-2x-2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow x^2+(2-x)^2-2x-2.(2-x)+1=0 \Rightarrow$$

$$x^2+4-4x+x^2-2x-4+2x+1=0 \Rightarrow 2x^2-4x+1=0 \Rightarrow \Delta=16-8=8>0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{8}}{4}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{cases} x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=2-\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=2-\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$Puntos\ \ pedidos \Rightarrow \begin{cases} \left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

A.3.- Dada la función $f(x) = x \ln x$

a) Determinar su dominio

b) Determinar sus ceros

c) Determinar sus extremos

$a)$

$$f(x) = x \ln x \Rightarrow \begin{cases} x \in \Re \\ \ln x > 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases} \Rightarrow Dom(f) = \forall x \in \Re / x > 0$$

$b)$

$$Corte\ con\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0.\ln 0 \Rightarrow No\ existe\ \ función$$

$$Corte\ con\ OX \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \ln x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow No\ existe\ \ función \\ \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow (1\ ,\ 0)$$

$c)$

$$f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo$$

$$Mínimo\ relativo\ en\ x = \frac{1}{e} \Rightarrow f\left(e^{-1}\right) = e^{-1} \ln e^{-1} = e^{-1} \cdot (-1) \cdot \ln e = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \Rightarrow \left(\frac{1}{e}\ ,\ -\frac{1}{e}\right)$$

A.4.- Sea la parábola $y = x^2 - 4x + 3$

a) Determinar los puntos de corte de la parábola con los dos ejes coordenados

b) Calcular el área encerrada entre la parábola y el eje de abcisas

c) Calcular el área encerrada entre la parábola y el eje de ordenadas

$a)$

$$\begin{cases} Con\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 4.0 + 3 = 3 \Rightarrow (0\ ,\ 3) \\ Con\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow (3\ ,\ 0) \\ x = 1 \Rightarrow (1\ ,\ 0) \end{cases} \end{cases}$$

$b)$

$$f(2) = 2^2 - 4.2 + 3 = -1 < 0$$

$$A = \left| \int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx \right| = -\int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx = \int_3^1 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx = \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_3^1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_3^1 + 3 \cdot \left[x\right]_3^1$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot \left(1^3 - 3^3\right) - 2 \cdot \left(1^2 - 3^2\right) + 3 \cdot (1 - 3) = -\frac{26}{3} - 2 \cdot (-8) + 3 \cdot (-2) = -\frac{26}{3} + 16 - 6 = \frac{-26 + 30}{3} = \frac{4}{3}\ u^2$$

$c)$

$$A = \left| \int_0^1 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx \right| = \int_0^1 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx = \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_0^1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_0^1 + 3 \cdot \left[x\right]_0^1 =$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot \left(1^3 - 0^3\right) - 2 \cdot \left(1^2 - 0^2\right) + 3 \cdot (1 - 0) = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\ u^2$$

OPCIÓN B

B.1 Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}$, vemos que, ambas, tienen rango máximo, o sea 2

a) Determinar los valores de **c** tales que la matriz **A+cB** ya no tenga rango 2

b) Cual es el rango que tienen las respectivas matrices suma

$a)$

$$A+cB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c & 0\\ 4c & -c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+c & -1\\ 4+4c & 2-c\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1+c & -1\\ 0 & 2-c+4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$6-c=0\Rightarrow c=6$$

$b)$

$$A+6B=\begin{pmatrix}1+6 & -1\\ 4+4.6 & 2-6\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}7 & -1\\ 28 & -4\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}7 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow rang(A+6B)=1$$

B.2. Sea el triángulo de vértices **A(4 , 2), B(13 , 1)** y **C(6 , 6)**

a) Hallar la ecuación de la altura que pasa por el vértice **C**

b) Calcular la longitud de los dos segmentos en que la altura anterior corta al lado **AB**

$a)$

$$\overrightarrow{AB} = (13\,,1)-(4\,,2)=(9\,,-1)\Rightarrow m=-\frac{1}{9}\Rightarrow m'\perp m\Rightarrow m'=(1\,,9)\Rightarrow m'=9\Rightarrow y-6=9.(x-6)\Rightarrow$$

$$y-6=9x-54\Rightarrow 9x-y-48=0$$

$b)$

$$\begin{cases} 9x-y-48=0 \\ y-2=-\frac{1}{9}(x-4)\Rightarrow 9y-18=-x+4 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 9x-y-48=0 \\ x+9y-22=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 81x-9y-432=0 \\ x+9y-22=0 \end{cases}\Rightarrow 82x-454=0\Rightarrow$$

$$x=\frac{454}{82}=\frac{227}{41}\Rightarrow y=9\cdot\frac{227}{41}-48=\frac{2043-1968}{41}=\frac{75}{41}\Rightarrow P\left(\frac{227}{41}\,,\frac{75}{41}\right)$$

$$d_{AP}=\sqrt{\left(\frac{227}{41}-4\right)^2+\left(\frac{75}{41}-2\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{227-164}{41}\right)^2+\left(\frac{75-82}{41}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{163}{41}\right)^2+\left(\frac{13}{41}\right)^2}=\frac{\sqrt{26569+169}}{41}$$

$$d_{AP}=\frac{\sqrt{26738}}{41}\,u$$

$$d_{BP}=\sqrt{\left(\frac{227}{41}-13\right)^2+\left(\frac{75}{41}-1\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{227-533}{41}\right)^2+\left(\frac{75-41}{41}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{306}{41}\right)^2+\left(\frac{34}{41}\right)^2}=\frac{\sqrt{93636+1156}}{41}$$

$$d_{AP}=\frac{\sqrt{94972}}{41}\,u$$

B.3.- Sea la función $f(x) = x\ sen\ x$ y sea **T** la recta tangente a su gráfica en $x = \pi$.
Determinar:
a) La ecuación de **T**

b) El área encerrada entre **T** y los ejes coordenados

$a)$

$$f'(x) = senx + x\cos x \Rightarrow \begin{cases} f(\pi) = \pi\ sen\pi = \pi.0 = 0 \\ m = f'(\pi) = sen\ \pi + \pi\cos\pi = 0 + \pi.(-1) = -\pi \end{cases} \Rightarrow y - 0 = -\pi(x - \pi) \Rightarrow$$

$$T \equiv \pi x + y - \pi^2 = 0$$

$b)$

$$y = -\pi x + \pi^2 \Rightarrow Corte\ con\ \ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow -\pi\ x + \pi^2 = 0 \Rightarrow \pi\ x = \pi^2 \Rightarrow x = \pi$$

$$A = \int_0^{\pi} \left(-\pi x + \pi^2\right) dx = -\pi \int_0^{\pi} x\ dx + \pi^2 \int_0^{\pi} dx = -\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_0^{\pi} + \pi^2 [x]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}\left(\pi^2 - 0^2\right) + \pi^2(\pi - 0)$$

$$A = -\frac{\pi^3}{2} + \pi^3 = \frac{\pi^3}{2}\ u^2$$

B.4,- Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

a) Definir su dominio

b) Calcular su límite en el infinito

c) Determinar sus extremos

d) Calcular el área encerrada por la gráfica de **f** entre las abcisas **0** y **1**

$a)$

$$\nexists f \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow \forall x \notin \Re \Rightarrow$$
$$Dom(f)=\forall x \in \Re$$

$b)$

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty^2}}=\frac{0}{1+0}=0$$

$c)$

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2xx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{-2x\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2+1\right)\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{-2x\left(x^2+1\right)-2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=2\cdot\frac{-x^3-x-1+x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f''(-1)=-2\cdot\dfrac{(-1)^3-(-1)^2+(-1)+1}{\left[(-1)^2+1\right]^3}=-2\cdot\dfrac{-1-1-1+1}{(1+1)^3}=-2\cdot\dfrac{(-2)}{2^3}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}>0\Rightarrow \textit{Mínimo} \\ f''(1)=-2\cdot\dfrac{1^3-1^2+1+1}{\left[1^2+1\right]^3}=-2\cdot\dfrac{1-1+1+1}{(1+1)^3}=-2\cdot\dfrac{2}{2^3}=-\dfrac{4}{8}=-\dfrac{1}{2}<0\Rightarrow \textit{Máximo}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(-1)=\dfrac{(-1)}{(-1)^2+1}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow En\left(-1\,,-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow \textit{Mínimo relativo} \\ f(1)=\dfrac{1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow En\left(1\,,\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow \textit{Máximo relativo}\end{array}\right.$$

$d)$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{0}{0^2+1}=0 \\ f(1)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow A=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\,dx=\int_1^2\frac{1}{t}\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\cdot\int_1^2\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\cdot\left[\ln t\right]_1^2=\frac{1}{2}\cdot\left(\ln 2-\ln 1\right)=\frac{1}{2}\cdot\ln 2=\ln\sqrt{2}\;u^2$$

$$x^2+1=t\Rightarrow 2x\,dx=dt\Rightarrow x\,dx=\frac{dt}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow t=2\\x=0\Rightarrow t=1\end{cases}$$