

OPCIÓN A

A.1.- Dado el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro **a**:
$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ x + y - az = a \\ 2x + 3y + z = a \end{cases}$$
 se pide

a) Discusión del mismo en función del parámetro **a**

b) Resolución en los casos de compatibilidad

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4a + 3 - 2 + 3a - 2 = -a \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} = \text{rang}(A) = 3 = \text{número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$
 Si $a = 0$ (Al ser una ecuación homogénea será Compatible Indeterminado)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b)

Solución para el Sistema Compatible Indeterminado

$$y + z = 0 \Rightarrow y = -z \Rightarrow x - 2z + z = 0 \Rightarrow x = z \Rightarrow \text{Solución}(\lambda, -\lambda, \lambda)$$

Solución para el Sistema Compatible Determinado

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ x + y - az = a \\ 2x + 3y + z = a \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 1 & -a \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-a} = \frac{a - 2a^2 + 3a - a + 3a^2 - 2a}{-a} = -\frac{a^2 + a}{a} = -\frac{a(a+1)}{a} = -(a+1)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & -a \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a} = \frac{a - 2a^2 + a - 2a + a^2 - a}{-a} = -\frac{a^2 - a}{a} = -\frac{a(a-1)}{a} = a-1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}}{-a} = \frac{a + 4a + 3a - 2a - 3a - 2a}{-a} = -\frac{-a}{a} = 1$$

Solución $(-a-1, a-1, 1)$

A.2.- Dado los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (-1, 3, 1)$, $C = (1, 0, 0)$ y $D = (0, 2, 0)$; se pide hallar el punto P perteneciente a la recta determinada por A y B tal que el triángulo CDP sea rectángulo con hipotenusa CP

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 3, 1) - (1, 1, 1) = (-2, 2, 0) \equiv (-1, 1, 0) \Rightarrow P \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow P(1 - \lambda, 1 + \lambda, 1)$$

$$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{DP} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CD} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0) \\ \overrightarrow{DP} = (1 - \lambda, 1 + \lambda, 1) - (0, 2, 0) = (1 - \lambda, 1 + \lambda - 2, 1) = (1 - \lambda, \lambda - 1, 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(-1, 2, 0) \cdot (1 - \lambda, \lambda - 1, 1) = 0 \Rightarrow -1 + \lambda + 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow 3\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P(1 - 1, 1 + 1, 1) \Rightarrow$$

$$P(0, 2, 1)$$

A.3.- Sea f la función definida para todo número real x de modo que para los valores de x pertenecientes al intervalo cerrado $[-1, 1]$ se tiene $f(x) = (x+1)(x-1)^2$ y para los valores de x no pertenecientes a dicho intervalo se tiene $f(x) = 0$. Se pide:

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad

b) Hallar, razonadamente, su valor máximo, indicando el valor o valores de x en donde se alcanza

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ (x+1)(x-1)^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 \\ f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = (-1+1)(-1-1)^2 = 0 \Rightarrow \text{Continua} \\ \begin{cases} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = (1+1)(1-1)^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Continua} \end{cases}$$

$f(x)$ es CONTINUA

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ (x-1)^2 + 2 \cdot (x-1)(x+1) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ [(x-1) + 2 \cdot (x+1)](x-1) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 0 \\ \begin{cases} f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = [(-1-1) + 2 \cdot (-1+1)](-1-1)^2 = [(-2) + 2 \cdot 0](-2)^2 = -8 \Rightarrow -8 \neq 0 \Rightarrow \text{No der.} \\ \begin{cases} f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = [(1-1) + 2 \cdot (1+1)](1-1)^2 = [0 + 2 \cdot 2] \cdot 0^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Es derivable} \end{cases} \end{cases}$$

b)

$$f'(x) = [(x-1) + 2 \cdot (x+1)](x-1) = (x-1+2x+2) \cdot (x-1) = (3x+1) \cdot (x-1) \Rightarrow$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (3x+1) \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \Rightarrow f''(x) = 3(x-1) + (3x+1) = 3x-3+3x+1 \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x-2 = 2 \cdot (3x-1) \Rightarrow \begin{cases} f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left[3\left(-\frac{1}{3}\right) - 1\right] = 2 \cdot (-2) = -4 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow \\ f''(1) = 2 \cdot (3 \cdot 1 - 1) = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}+1\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}-1\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{9} = \frac{32}{27} \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}, \frac{32}{27}\right) \Rightarrow \text{Máximo} \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = (-1+1) \cdot (1-1)^2 = 0 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (1, 0) \Rightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

A.4.- Halla la función **f** definida en todo número real que verifica las dos condiciones siguientes:

a) $f'(x) = x^2 e^x$

b) Su gráfica pasa por el punto **(0, 2)**

$$F(x) = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \cdot \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \cdot \int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \cdot e^x + K$$

$$\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases} \quad \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

$$F(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x + K \Rightarrow F(0) = 2 \Rightarrow 2 = (0^2 - 2 \cdot 0 + 2) \cdot e^0 + K \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + K \Rightarrow K = 0$$

$$F(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$$

OPCIÓN B

B.1.- Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular $A^2 - 4A + 4I_3$

b) Calcular, si existe, la inversa de la matriz A

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ 4A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow A^2 - 4A + 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 4I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A)^t \Rightarrow (A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

B.2. a) Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje **OX** en el punto **(4, 0)** y pasa por el punto $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

b) Hallar la ecuación de la otra tangente a esta circunferencia que pasa por el origen de coordenadas

a)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4^2 + 0^2 - 2a \cdot 4 - 2b \cdot 0 + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \\ \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 2a \cdot \left(\frac{8}{5}\right) - 2b \cdot \left(\frac{6}{5}\right) + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \end{cases} \\ 2x + 2yy' - 2a - 2by' = 0 \Rightarrow 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2a - 2b \cdot 0 = 0 \Rightarrow 8 - 2a = 0 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 - 8 \cdot 4 + 4^2 + b^2 - R^2 = 0 \Rightarrow b^2 - R^2 = 0 \\ \frac{64}{25} + \frac{36}{25} - \frac{16}{5} \cdot 4 - \frac{12}{5}b + 4^2 + b^2 - R^2 = 0 \Rightarrow \frac{100}{25} - \frac{64}{5} - \frac{12}{5}b + 16 = 0 \Rightarrow -\frac{12}{5}b = -16 - 4 + \frac{64}{5} \Rightarrow \end{cases}$$

$$-\frac{12}{5}b = -20 + \frac{64}{5} \Rightarrow -\frac{12}{5}b = -\frac{36}{5} \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 3^2 - R^2 = 0 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

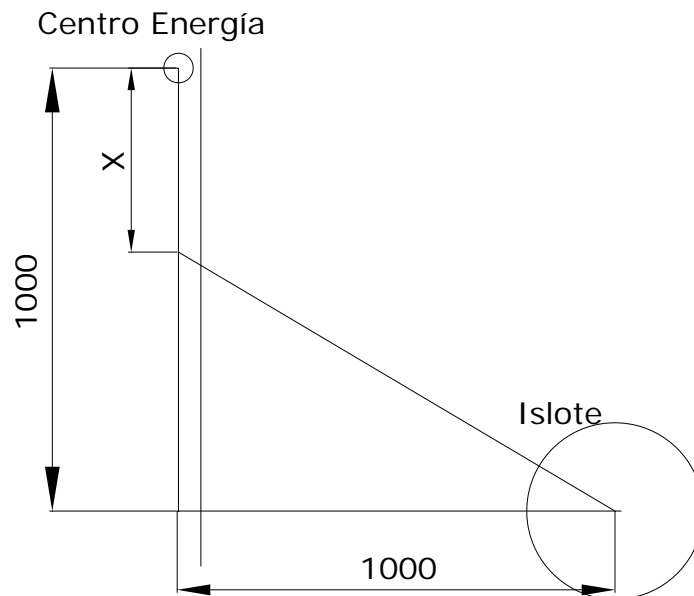
$$x^2 + y^2 - 2 \cdot 4 \cdot x - 2 \cdot 3 \cdot y + 4^2 + 3^2 - 3^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$$

b)

$$2x + 2y \cdot y' - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot y' = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot y' - 8 - 6y' = 0 \Rightarrow -8 - 6y' = 0 \Rightarrow -6y' = 8 \Rightarrow y' = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$y - 0 = -\frac{4}{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow 3y = -4x \Rightarrow 4x + 3y = 0$$

B.3.- Un pequeño islote dista 1 Km. de una costa rectilínea. Queremos instalar en dicho islote una señal luminosa que se ha de alimentar con un tendido eléctrico. La fuente de energía esta situada en la costa en un punto distante 1 Km. del punto de la costa más próximo al islote. El coste del tendido submarino, por unidad de longitud, es $\frac{5}{3}$ del tendido en tierra. ¿A que distancia de la fuente de energía debe de empezar el tendido submarino para conseguir un coste mínimo?



$$P = 1 \cdot x + \frac{5}{3} \cdot \sqrt{1^2 + (1-x)^2} \Rightarrow P = x + \frac{5}{3} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 - 2x + x^2}$$

$$P = x + \frac{5}{3} \cdot \sqrt{2 - 2x + x^2} \Rightarrow P' = 1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{-2 + 2x}{\sqrt{2 - 2x + x^2}} = 1 + \frac{-5 + 5x}{3\sqrt{2 - 2x + x^2}}$$

$$P' = \frac{3\sqrt{2 - 2x + x^2} - 5 + 5x}{3\sqrt{2 - 2x + x^2}} \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow 3\sqrt{2 - 2x + x^2} - 5 + 5x = 0 \Rightarrow 3\sqrt{2 - 2x + x^2} = 5 - 5x \Rightarrow$$

$$9(2 - 2x + x^2) = (5 - 5x)^2 \Rightarrow 18 - 18x + 9x^2 = 25 - 50x + 25x^2 \Rightarrow 16x^2 - 32x + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 32^2 - 4 \cdot 7 \cdot 16 = 1024 - 224 = 800 \Rightarrow x = \frac{32 \pm \sqrt{800}}{32} = 1 \pm \frac{\sqrt{50}}{8} \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{50}}{8} \text{ Km}$$

B.4. - Hallar el área del recinto limitado por las funciones

$$y = 2 - x^4$$

$$y = x^2$$

$$2 - x^4 = x^2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = t \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0^2 = 0 \\ y(0) = 2 - 0^4 = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow \\ x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-2} \Rightarrow \forall x \notin \mathfrak{R} \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^1 (2 - x^4) dx - \int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \cdot [x]_{-1}^1 - \frac{1}{5} [x^5]_{-1}^1 - \frac{1}{3} [x^3]_{-1}^1 = 2 \cdot [1 - (-1)] - \frac{1}{5} [1^5 - (-1)^5] - \frac{1}{3} [1^3 - (-1)^3]$$

$$A = 2 \cdot 2 - \frac{1}{5} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2 = 4 - \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{60 - 6 - 10}{15} = \frac{44}{15} u^2$$