

**OPCIÓN A**

1.(2,5 puntos) Sea  $m$  un número real y considere la matriz:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) (1 punto) Determine todos los valores de  $m$  para los que la matriz  $A$  tiene inversa.  
 b) (1 punto) Determine, si existe, la inversa de  $A$  cuando  $m = 0$ .  
 c) (0,5 puntos) Determine, si existe, la inversa de  $A^2$  cuando  $m = 0$

a) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 - 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow -m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m^2 = -1 \Rightarrow m = \pm\sqrt{-1} \notin \mathcal{R}$$

$$\text{Existe } A^{-1} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathcal{R}$$

b)

$$\text{Cuando } m = 0 \Rightarrow |A| = -0^2 - 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A^t \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj } A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow$$

$$(A^2)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^2)^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.(2,5 puntos) Dados el punto  $P \equiv (1, -1, 0)$ , y la recta  $s: \begin{cases} -2x + z - 1 = 0 \\ 3x - y - 3 = 0 \end{cases}$

a)(1,5 puntos) Determine la ecuación general del plano ( $Ax+By+Cz+D=0$ ) que contiene al punto  $P$  y a la recta  $s$ .

b)(1 punto) Determine el ángulo que forman el plano  $\pi: 2x + y - z + 1 = 0$  y la recta  $s$ .

a) El plano  $\pi$  buscado queda determinado por el vector director de la recta  $s$ , por el vector  $\overrightarrow{PS}$ , donde  $S$  es un punto cualquiera de la recta (tomaremos el indicado en su ecuación paramétrica) y el vector  $\overrightarrow{PG}$ , siendo  $G$  el punto generador del plano. Estos tres vectores son coplanarios y el determinante de la matriz que determinan es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$s: \begin{cases} z = 1 + 2x \\ y = 3x - 3 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (1, 3, 2) \\ S(0, -3, 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_s = (1, 3, 2) \\ \overrightarrow{PS} = (0, -3, 1) - (1, -1, 0) = (-1, -2, 1) \equiv (1, 2, -1) \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (1, -1, 0) = (x-1, y+1, z) \end{cases}$$

$$-3(x-1) + 2(y+1) + 2z - 3z - 4(x-1) + (y+1) = 0 \Rightarrow -7(x-1) + 3(y+1) - z = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 7x - 3y + z - 10 = 0$$

b)

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{|\vec{v}_s \cdot \vec{v}_\pi|}{|\vec{v}_s| \cdot |\vec{v}_\pi|} = \frac{|(1, 3, 2) \cdot (2, 1, -1)|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 + 3 - 2|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{84}} = \frac{3}{2\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{42} = \frac{\sqrt{21}}{14} u$$

3.(2,5 puntos) Considere la función:  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2}$

a)(1,5 puntos) Determine las asíntotas, horizontales, verticales y oblicuas, que tenga la función  $f(x)$ .

b)(1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ . ¿Tiene la función  $f(x)$  algún máximo o mínimo relativo?

a)

$$x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-2} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \text{No hay asíntotas verticales}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{1 + \frac{3}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1 \Rightarrow$$

Existe asíntota horizontal,  $y = 1$ , cuando  $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)^2 + 3}{(-x)^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{1 + \frac{3}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1 \Rightarrow$$

Existe asíntota horizontal,  $y = 1$ , cuando  $x \rightarrow -\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 3}{x^2 + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x(x^2 + 2)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{2x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{3}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow \infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + 3}{x^2 + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{x(x^2 + 2)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{-\frac{x^3}{x^3} + \frac{2x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}}{-1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{3}{\infty}}{-1 + \frac{2}{\infty}} = \frac{0}{-1} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow -\infty$

**Continuación del Problema 3 de la opción A**

b)

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 2) - 2x(x^2 + 3)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{2x^3 + 4x - 2x^3 - 6x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 2)^2} \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-2x}{(x^2 + 2)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -2 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \\ (x^2 + 2)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

<b>-2 &lt; 0</b>	<b>(-)</b>	<b>(-)</b>
<b>x &gt; 0</b>	<b>(-)</b>	<b>(+)</b>
<b>(x<sup>2</sup>+2) &gt; 0</b>	<b>(+)</b>	<b>(+)</b>
<b>Solución</b>	<b>(+)</b>	<b>(-)</b>

**Crecimiento**  $\forall x \in \mathbb{R} / x < 0$

**Decrecimiento**  $\forall x \in \mathbb{R} / x > 0$

**Máximo relativo en**  $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 3}{0^2 + 2} = \frac{3}{2}$  de creciente pasa a decreciente

**4.(2,5 puntos)a)(1,25 puntos)** Usando el cambio de variable  $t = \ln(x)$ , determine el valor de la

integral:  $\int \frac{1 + 3 \ln(x) + [\ln(x)]^3}{x\{1 - [\ln(x)]^2\}} dx$

**b)(1,25 puntos)** Determine el límite:  $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x)]^{\left[\frac{1}{\sin x}\right]^2}$

a)

$$\int \frac{1 + 3 \ln(x) + [\ln(x)]^3}{x\{1 - [\ln(x)]^2\}} dx = \int \frac{1 + 3t + t^3}{1 - t^2} dt$$

$$\ln(x) = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \quad \frac{t^3 + 3t + 1}{4t + 1} \quad \frac{-t^2 + 1}{-t}$$

$$\frac{1 + 3t + t^3}{1 - t^2} = -t + \frac{4t + 1}{1 - t^2} \Rightarrow \frac{4t + 1}{1 - t^2} = \frac{4t + 1}{(1 - t)(1 + t)} = \frac{A}{1 - t} + \frac{B}{1 + t} = \frac{A(1 + t) + B(1 - t)}{(1 - t)(1 + t)} \Rightarrow$$

$$A(1 + t) + B(1 - t) = 4t + 1 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow A[1 + (-1)] + B[1 - (-1)] = 4 \cdot (-1) + 1 \Rightarrow 2B = -3 \Rightarrow B = -\frac{3}{2} \\ t = 1 \Rightarrow A(1 + 1) + B(1 - 1) = 4 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 2A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\frac{4t + 1}{1 - t^2} = \frac{\frac{5}{2}}{1 - t} + \frac{-\frac{3}{2}}{1 + t}$$

**Continuación del Problema 4 de la opción A**a) *Continuación*

$$\frac{1+3t+t^3}{1-t^2} = -t + \frac{\frac{5}{2}}{1-t} + \frac{-\frac{3}{2}}{1+t}$$

$$\int \frac{1+3 \ln(x) + [\ln(x)]^3}{x \{1 - [\ln(x)]^2\}} dx = \int \frac{1+3t+t^3}{1-t^2} dt = \int \left( -t + \frac{\frac{5}{2}}{1-t} + \frac{-\frac{3}{2}}{1+t} \right) dt = -\int t dt + \frac{5}{2} \int \frac{dt}{1-t} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{1+t}$$

$$\begin{cases} 1-t = u \Rightarrow dt = -du \\ 1+t = v \Rightarrow dt = dv \end{cases}$$

$$\int \frac{1+3 \ln(x) + [\ln(x)]^3}{x \{1 - [\ln(x)]^2\}} dx = \int \frac{1+3t+t^3}{1-t^2} dt = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{2} \int \frac{-du}{u} - \frac{3}{2} \int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{2} \ln u - \frac{3}{2} \ln v$$

$$\int \frac{1+3 \ln(x) + [\ln(x)]^3}{x \{1 - [\ln(x)]^2\}} dx = -\frac{1}{2} \ln^2 x - \frac{5}{2} \ln(1-t) - \frac{3}{2} \ln(1+t) = \ln^2 x^{-\frac{1}{2}} + \ln(1 - \ln x)^{\frac{5}{2}} + \ln(1 + \ln x)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{1+3 \ln(x) + [\ln(x)]^3}{x \{1 - [\ln(x)]^2\}} dx = \ln^2 \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln \frac{1}{\sqrt{(1 - \ln x)^5}} + \ln \frac{1}{\sqrt{(1 + \ln x)^3}}$$

$$\int \frac{1+3 \ln(x) + [\ln(x)]^3}{x \{1 - [\ln(x)]^2\}} dx = \ln^2 \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln \frac{1}{(1 - \ln x)^2 (1 + \ln x) \sqrt{(1 - \ln x) \cdot (1 + \ln x)}} + K$$

$$\int \frac{1+3 \ln(x) + [\ln(x)]^3}{x \{1 - [\ln(x)]^2\}} dx = \ln^2 \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln \frac{1}{(1 - \ln x)(1 - \ln^2 x) \sqrt{1 - \ln^2 x}} + K$$

b)

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x)]^{\left[\frac{1}{\sin x}\right]^2} = [\cos(0)]^{\left[\frac{1}{\sin 0}\right]^2} = 1^{\left(\frac{1}{0}\right)^2} = 1^\infty \Rightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow 0} \ln [\cos(x)]^{\left[\frac{1}{\sin x}\right]^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln [\cos(x)]^{\left[\frac{1}{\sin x}\right]^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \ln [\cos(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln [\cos(x)]}{\sin^2 x} = \frac{\ln [\cos(0)]}{\sin^2 0} = \frac{\ln 1}{0^2} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2 \sin x \cdot \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2 \cdot \cos^2(x)} = \frac{-1}{2 \cdot \cos^2(0)} = \frac{-1}{2 \cdot 1^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\ln L = -\frac{1}{2} \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x)]^{\left[\frac{1}{\sin x}\right]^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

**OPCIÓN B**

1. (2,5 puntos) Considere las matrices de orden  $2 \times 2$  siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 puntos) Determine dos matrices M y N de orden  $2 \times 2$  tales que: 
$$\begin{cases} AM + BN = D \\ AM = N \end{cases}$$

b) (1 punto) Se considera una matriz G de orden  $3 \times 3$ , cuyas columnas se representan por  $C_1, C_2, C_3$  y cuyo determinante vale 2. Considere ahora la matriz H cuyas columnas son  $C_3, C_3+C_2, 3C_1$ , ¿cuál es el determinante de esta nueva matriz H?

a)

$$\begin{cases} AM + BN = D \\ AM = N \end{cases} \Rightarrow NI + BN = D \Rightarrow N(I + B) = D \Rightarrow N(I + B)(I + B)^{-1} = D(I + B)^{-1} \Rightarrow N = D(I + B)^{-1}$$

$$(I + B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |I + B| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists (I + B)^{-1} \Rightarrow$$

$$(I + B)^{-1} = \frac{1}{|I + B|} \cdot \text{adj} [(I + B)^t] \Rightarrow (I + B)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj} [(I + B)^t] = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(I + B)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow N = D(I + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = D(I + B)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$AM = N \Rightarrow A^{-1}AM = A^{-1}N \Rightarrow IM = A^{-1}N \Rightarrow M = A^{-1}N \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj} A^t \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj} A^t = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-9)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M = A^{-1}N = \frac{1}{(-9)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-36)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-36)} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{36} & -\frac{10}{36} \\ -\frac{3}{36} & \frac{2}{36} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{5}{18} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$$

b)

$$|C_3 \ C_3 + C_2 \ 3C_1| = |C_3 \ C_3 \ 3C_1| + |C_3 \ C_2 \ 3C_1| = 0 + 3|C_3 \ C_2 \ C_1| = (-1) \cdot 3 \cdot |C_1 \ C_2 \ C_3| = -6$$

2. (2,5 puntos) Considere las rectas:  $r: \begin{cases} 2x - 4z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$  y  $s: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{\alpha} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1}$

- a) (2 puntos) Determine la posición relativa de dichas rectas, según los diferentes valores de  $\alpha$ .  
 b) (0,5 puntos) Si  $\alpha = 2$ , determine el ángulo que forman las rectas  $r$  y  $s$ .

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, si el sistema que resulta es compatible determinado son secantes, si es compatible indeterminado las rectas coinciden.  
 Si el sistema es incompatible y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no serlo las rectas se cruzan en el espacio.

$$\left\{ \begin{array}{l} s: \begin{cases} x = 2\mu \\ y = -2 + \alpha\mu \\ z = \frac{1}{2} + \mu \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2z = 1 \\ -x - y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow -y - 3z = 0 \Rightarrow y = -3z \Rightarrow x - 3z + z = 1 \Rightarrow x = 2z + 1 \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mu = 1 + 2\lambda \\ -2 + \alpha\mu = -3\lambda \\ \frac{1}{2} + \mu = \lambda \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} 2\mu - 2\lambda = 1 \\ \alpha\mu + 3\lambda = 2 \\ 2\mu - 2\lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ \alpha & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 8 - 2\alpha - 6 + 8 - 2\alpha = -4\alpha - 12 \Rightarrow$$

Si  $(A/B) = 0 \Rightarrow -4\alpha - 12 = 0 \Rightarrow \alpha = -3 \Rightarrow$  Si  $\alpha = -3 \Rightarrow \text{rang}(A/B) = 2$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ \alpha & 3 \end{vmatrix} = 6 + 2\alpha \Rightarrow$  Si  $|A| = 0 \Rightarrow 6 + 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = -3 \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{-3\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$

Si  $\alpha = -3 \Rightarrow \text{rang}(A) = 1$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{-3\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow$  Sistema Incompatible

Cuando  $\alpha \neq -3 \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (2, -3, 1) \\ \vec{v}_s = (2, \alpha, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{-3}{\alpha} \Rightarrow \alpha = -3 \Rightarrow$  Son rectas que se cruzan

Cuando  $\alpha = -3 \Rightarrow \text{rang}(A/B) = \text{rang}(A) = 1 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$  Compatible Indeterminado

Cuando  $\alpha = -3 \Rightarrow$  Las rectas  $r$  y  $s$  son coincidentes

b) Las rectas no se cortan, ya que se cruzan, debido a ello, calculamos el ángulo formado por sus vectores directores

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, -3, 1) \\ \vec{v}_s = (2, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|(2, -3, 1) \cdot (2, 1, 1)|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|4 - 3 + 1|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \frac{|2|}{\sqrt{84}} = \frac{2}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{21} \Rightarrow$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{21}}{21}\right) = 77^\circ 23' 44''$$

3. (2,5 puntos) a) (1,5 puntos) Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión

de la función:  $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$

b) (1 punto) Determine:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x^2 + x}$

a)

$$g'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x + e^x - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2} \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow \frac{xe^x}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ e^x > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ (x+1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

	$-\infty$	<b>0</b>	$\infty$
<b>x &gt; 0</b>		(-)	(+)
<b>e<sup>x</sup> &gt; 0</b>		(+)	(+)
<b>(x+1)<sup>2</sup> &gt; 0</b>		(+)	(+)
<b>Solución</b>		(-)	(+)

**Creciente**  $\forall x \in \mathbb{R} / x > 0$

**Decreciente**  $\forall x \in \mathbb{R} / x < 0$

**Mínimo relativo** en  $x = 0 \Rightarrow g(0) = \frac{e^0}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$  De decreciente pasa a creciente

a)

$$g''(x) = \frac{(xe^x + e^x)(x+1)^2 - 2(x+1)xe^x}{(x+1)^4} = \frac{(xe^x + e^x)(x+1) - 2xe^x}{(x+1)^3} = \frac{x^2e^x + xe^x + xe^x + e^x - 2xe^x}{(x+1)^3} \Rightarrow$$

$$g''(x) = \frac{x^2e^x + e^x}{(x+1)^3} = \frac{e^x(x^2 + 1)}{(x+1)^3} \Rightarrow \text{Concava} \Rightarrow g''(x) > 0 \Rightarrow \frac{e^x(x^2 + 1)}{(x+1)^3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^3 > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ e^x > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ (x^2 + 1) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

	$-\infty$	<b>-1</b>	$\infty$
<b>x &gt; -1</b>		(-)	(+)
<b>e<sup>x</sup> &gt; 0</b>		(+)	(+)
<b>x<sup>2</sup>+1 &gt; 0</b>		(+)	(+)
<b>Solución</b>		(-)	(+)

**Cóncava**  $\forall x \in \mathbb{R} / x > -1$

**Convexa**  $\forall x \in \mathbb{R} / x < 0$

**Punto de inflexión** en  $x = -1 \Rightarrow g(-1) = \frac{e^{-1}}{-1+1} = \frac{e^{-1}}{0} \Rightarrow$  Sin solución no existe ya que en punto existe una **asíntota vertical**



**Continuación del Problema 3 de la opción B**

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x^2 + x} &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x^2 + x})(\sqrt{3x^2 + 2x + 2} + \sqrt{3x^2 + x})}{\sqrt{3x^2 + 2x + 2} + \sqrt{3x^2 + x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x^2 + 2x + 2})^2 - (\sqrt{3x^2 + x})^2}{\sqrt{3x^2 + 2x + 2} + \sqrt{3x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^2 + 2x + 2) - (3x^2 + x)}{\sqrt{3x^2 + 2x + 2} + \sqrt{3x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x + 2 - 3x^2 - x}{\sqrt{3x^2 + 2x + 2} + \sqrt{3x^2 + x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{\sqrt{3x^2 + 2x + 2} + \sqrt{3x^2 + x}} = \frac{\infty}{\infty + \infty} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}}{\sqrt{3\frac{x^2}{x^2} + 2\frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{3\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{3 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{1 + \frac{2}{\infty}}{\sqrt{3 + \frac{2}{\infty} + \frac{2}{\infty}} + \sqrt{3 + \frac{1}{\infty}}} = \frac{1 + 0}{\sqrt{3 + 0 + 0} + \sqrt{3 + 0}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

4. (2,5 puntos) a) (1,25 puntos) Determine la integral:  $\int x^2 \operatorname{sen}(2x) dx$ 

b) (1,25 puntos) Determine el área máxima que puede tener un rectángulo cuya diagonal mide 8 metros. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima?

a)

$$\int x^2 \operatorname{sen}(2x) dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) - \int -\frac{1}{2} \cos(2x) 2x dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \int x \cos(2x) 2x dx$$

$$\text{Por partes} \begin{cases} x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du \\ \operatorname{sen}(2x) dx = dv \Rightarrow v = \int \operatorname{sen}(2x) dx = \int \operatorname{sen} t \frac{dt}{2} = -\frac{1}{2} \cos t = -\frac{1}{2} \cos(2x) \end{cases}$$

$$2x = t \Rightarrow 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(2x) dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \int x \cos(2x) 2x dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} x \operatorname{sen}(2x) - \int \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) dx$$

$$\text{Por partes} \begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ \cos(2x) dx = dv \Rightarrow v = \int \cos(2x) dx = \int \cos h \frac{dh}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} t = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) \end{cases}$$

$$2x = h \Rightarrow 2dx = dh \Rightarrow dx = \frac{dh}{2}$$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(2x) dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} x \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(2x) dx =$$

$$2x = r \Rightarrow 2dx = dh \Rightarrow dx = \frac{dh}{2}$$

$$\int x^2 \operatorname{sen}(2x) dx = -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} x \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} h \frac{dh}{2} = -\frac{1}{2} x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2} x \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4} \cos 2x + K$$

**Continuación del Problema 4 de la opción B**

b)

Siendo **L** y **H** los lados del rectángulo

$$\begin{cases} L^2 + H^2 = 8^2 \Rightarrow H^2 = 64 - L^2 \Rightarrow H = \sqrt{64 - L^2} \Rightarrow A = L\sqrt{64 - L^2} \Rightarrow \\ A = LH \end{cases}$$

$$A' = \frac{dA}{dL} = \sqrt{64 - L^2} + \frac{-2L}{2\sqrt{64 - L^2}}L = \frac{64 - L^2 - L^2}{\sqrt{64 - L^2}} = \frac{64 - 2L^2}{\sqrt{64 - L^2}} = 2 \frac{32 - L^2}{\sqrt{64 - L^2}} \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow 2 \frac{32 - L^2}{\sqrt{64 - L^2}} = 0$$

$$32 - L^2 = 0 \Rightarrow L^2 = 32 \Rightarrow L = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$A'' = \frac{d^2A}{dL^2} = 2 \frac{-2L\sqrt{64 - L^2} - \frac{-2L}{2\sqrt{64 - L^2}}(32 - L^2)}{\sqrt{64 - L^2}} = 2 \frac{-2L(64 - L^2) + L(32 - L^2)}{64 - L^2} =$$

$$= 2 \frac{-128L + L^3 + 32L - L^3}{64 - L^2} = 2 \frac{-128L + 32L}{64 - L^2} = \frac{-192L}{64 - L^2} \Rightarrow A''(4\sqrt{2}) = \frac{-192 \cdot 4\sqrt{2}}{64 - (4\sqrt{2})^2} = -\frac{768 \cdot \sqrt{2}}{64 - 32} < 0 \Rightarrow$$

$$\text{Máximo} \Rightarrow \begin{cases} L = 4\sqrt{2} \text{ m} \\ H = \sqrt{64 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ m} \end{cases}$$