

OPCIÓN A

A.1.- Sea **a** un número real y el sistema lineal
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

a) (1'5 puntos) Calcule el determinante de la matriz de los coeficientes y determine para que valores de **a** el sistema anterior es incompatible, compatible determinado y compatible indeterminado

b) (1 punto) Resuelva el sistema anterior en el caso **a = 0**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow \text{Por Ruffini}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \\ \hline \end{array} \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = (a-1) \cdot (a^2 + a - 2) \Rightarrow (a-1) \cdot (a^2 + a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a^2 + a - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ \hline \end{array} \quad a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ a = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases} \end{cases}$$

(Para todo) $\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número incógnitas} \Rightarrow \text{Compat. Deter. min. ado}$

Si $a = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & 8 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 6 \Rightarrow$$

$$z = \frac{6}{0} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 0 \Rightarrow z = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indet. er. min. ado}$$

b) Si $a = 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Deter. min. ado}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 2z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{2} \Rightarrow -y + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Solución } (x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

A.2.- (2'5 puntos) Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^2 + 11x}{x^3 - 2x^2 - 2x + 12} dx$

Las soluciones de la ecuación que genera el denominador son $\pm 1, 2, 3, 4, 6, 12$

Después de analizar la ecuación, por Ruffini con $1, -1, 2$ tenemos

$$-2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & 12 \\ & -2 & 8 & -12 \end{vmatrix} \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 12 = (x+2) \cdot (x^2 - 4x + 6) \Rightarrow \text{Si } x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$1 \quad -4 \quad 6 \quad | \quad 0 \quad \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 16 - 24 = -8 < 0 \Rightarrow \text{Sin solución real}$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 12 = (x+2) \cdot (x^2 - 4x + 6) \Rightarrow$$

$$\frac{x^2 + 11x}{x^3 - 2x^2 - 2x + 12} = \frac{x^2 + 11x}{(x+2) \cdot (x^2 - 4x + 6)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2 - 4x + 6} = \frac{A \cdot (x^2 - 4x + 6) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2) \cdot (x^2 - 4x + 6)} \Rightarrow$$

$$A \cdot (x^2 - 4x + 6) + (Bx+C)(x+2) = x^2 + 11x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow A \cdot (0^2 - 4 \cdot 0 + 6) + (B \cdot 0 + C)(0+2) = 0^2 + 11 \cdot 0 \\ x=1 \Rightarrow A \cdot (1^2 - 4 \cdot 1 + 6) + (B \cdot 1 + C)(1+2) = 1^2 + 11 \cdot 1 \\ x=-2 \Rightarrow A \cdot [(-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 6] + [B \cdot (-2) + C](-2+2) = (-2)^2 + 11 \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A \cdot 6 + C \cdot 2 = 0 \\ A \cdot 3 + (B+C) \cdot 3 = 12 \Rightarrow 18A = -18 \Rightarrow A = -1 \Rightarrow 6 \cdot (-1) + 2C = 0 \Rightarrow 2C = 6 \Rightarrow C = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \\ A \cdot 18 = -18 \end{cases}$$

$$6 \cdot (-1) + 3 \cdot (B+3) = 12 \Rightarrow 3 \cdot (B+3) = 18 \Rightarrow 3B + 9 = 18 \Rightarrow 3B = 9 \Rightarrow B = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{x^2 + 11x}{x^3 - 2x^2 - 2x + 12} = -\frac{1}{x+2} + \frac{2x+3}{x^2 - 4x + 6}$$

$$I = \int \frac{x^2 + 11x}{x^3 - 2x^2 - 2x + 12} dx = -\int \frac{1}{x+2} dx + \int \frac{2x+3}{x^2 - 4x + 6} dx = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{2x-4+4+3}{x^2 - 4x + 6} dx$$

$$x+2 = t \Rightarrow dx = dt$$

$$I = -\ln t + \int \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 6} dx + \int \frac{7}{x^2 - 4x + 6} dx = -\ln t + \int \frac{du}{4} + \int \frac{7}{(x-2)^2 - 4 + 6} dx$$

$$x^2 - 4x + 6 = u \Rightarrow (2x-4) dx = du \quad x-2 = v \Rightarrow dx = dv$$

$$I = -\ln(x+2) + \ln u + \int \frac{7}{v^2 + 2} dv = -\ln(x+2) + \ln(x^2 - 4x + 6) + \int \frac{7}{2 \left[\left(\frac{v}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right]} dv =$$

$$I = \ln \left(\frac{x^2 - 4x + 6}{x+2} \right) + \frac{7}{2} \int \frac{dv}{\left(\frac{v}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1} = \ln \left(\frac{x^2 - 4x + 6}{x+2} \right) + \frac{7\sqrt{2}}{2} \int \frac{dr}{r^2 + 1} = \ln \left(\frac{x^2 - 4x + 6}{x+2} \right) + \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \text{arc tg } r$$

$$\frac{v}{\sqrt{2}} = r \Rightarrow dv = \sqrt{2} dr$$

$$I = \ln \left(\frac{x^2 - 4x + 6}{x+2} \right) + \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \text{arc tg } \frac{v}{\sqrt{2}} = \ln \left(\frac{x^2 - 4x + 6}{x+2} \right) + \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \text{arc tg } \frac{x-2}{\sqrt{2}} + K$$

A.3.- a) (0'75 puntos) Descomponer el número 12 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo

b) (1 punto) Hallar el valor de **k** para que: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + kx}{x - \operatorname{sen}(x)} = 2$

c) (0'75 puntos) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, continua y derivable en la recta real. Supongamos que $f(0) \neq 0$ y $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo número real **x, y**. Demostrar que $f(0) = 1$; $f(x) \neq 0$; $f(x) > 0$ y $f'(x) = f'(0)f(x)$ para todo número real **x**

a)

$$\begin{cases} a + b = 12 \Rightarrow b = 12 - a \\ P = ab^2 \end{cases} \Rightarrow P = a(12 - a)^2 \Rightarrow P' = \frac{dP}{da} = (12 - a)^2 + 2 \cdot (12 - a) \cdot (-1) \cdot a$$

$$P' = \frac{dP}{da} = (12 - a)^2 - 2a(12 - a) = [(12 - a) - 2a](12 - a) = (12 - 3a)(12 - a) = 3 \cdot (4 - a)(12 - a)$$

$$P' = 0 \Rightarrow 3 \cdot (4 - a)(12 - a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 - a = 0 \Rightarrow a = 4 \\ 12 - a = 0 \Rightarrow a = 12 \end{cases} \Rightarrow P'' = \frac{d^2P}{da^2} = 3 \cdot [(-1) \cdot (12 - a) + (-1) \cdot (4 - a)]$$

$$P'' = 3 \cdot [-12 + a - 4 + a] = 3 \cdot (2a - 16) = 6 \cdot (a - 8) \Rightarrow \begin{cases} P''(4) = 6 \cdot (4 - 8) = -24 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \\ P''(12) = 6 \cdot (12 - 8) = 24 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 12 - 4 = 8 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + kx}{x - \operatorname{sen}(x)} &= \frac{e^0 - e^{-0} + k \cdot 0}{0 - \operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (-1)e^{-x} + k}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} + k}{1 - \cos(x)} = \\ &= \frac{e^0 + e^{-0} + k}{1 - \cos(0)} = \frac{1 + 1 + k}{1 - 1} = \frac{2 + k}{0} \Rightarrow (\text{Solo puede ser que } 2 + k = 0 \Rightarrow k = -2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = \frac{0}{0} = \\ &= \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{-(-1)\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{e^0 - e^{-0}}{\operatorname{sen}(0)} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{e^0 + e^{-0}}{\cos(0)} = \frac{1 + 1}{1} = 2 \end{aligned}$$

c)

Hipótesis $f(0) \neq 0$ y $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

$f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0) = [f(0)]^2$, de donde $[f(0)]^2 - f(0) = 0 = f(0)[f(0) - 1] = 0$. Como me dicen que $f(0) \neq 0$, la única posibilidad es **$f(0) - 1 = 0$** , de donde **$f(0) = 1$**

Como $f(0) = 1 = f(x+(-x)) = f(x) \cdot f(-x) \neq 0$, por *tanto* $f(x) = 1/f(-x)$, **luego $f(x)$ y $f(-x)$ tienen el mismo signo**

$f(x+x) = f(x) \cdot f(x) = [f(x)]^2 = f(2x) > 0$, y también $f(-2x) > 0$ al tener el mismo signo $f(x)$ y $f(-x)$, por *tanto* **$f(x) > 0$** , luego $f(x)$ es > 0 multiplique a "x" por cualquier número positivo, negativo o cero, porque $f(0) = 1$

Continuación del Problema A.3

c) Continuación

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot (f(h) - 1)}{h} = f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(h) - 1)}{h}$$

Como $f(x) \neq 0$, y existe $f'(x)$, tenemos que " $f(h) - 1 = 0$ ", para que exista el límite, pues existe $f'(x)$, y poder aplicarle la regla de L'Hôpital (L'H).

$$f'(x) = f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(h) - 1)}{h} = \left(f(x) \cdot \frac{0}{0} \right). \text{ Le aplicamos L'H} = f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h)}{1} = f(x) \cdot f'(0), \text{ es decir}$$

$$f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$$

Problema resuelto por D. Germán Jesús Rubio Luna

A.4.- a) (1 punto) Halla el plano que contiene a la recta \mathbf{v} de ecuación paramétrica:

$$\mathbf{v}: (2, 1, 3) + t(2, 1, 0) \text{ y es perpendicular al plano de ecuación } \mathbf{x} + \mathbf{z} = 2$$

b) (1'5 puntos) Probar que los vectores $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ forman una base en \mathbb{R}^3 y dar las coordenadas del vector $(1, -2, 0)$ en la base anterior

a) El plano está formado por el vector de la recta \mathbf{v} , por el vector director del plano π que es perpendicular a este y por el vector formado por un punto \mathbf{V} de la recta (el indicado en la ecuación de la recta) y el punto \mathbf{G} generador del plano. Los tres vectores son coplanarios (están en el mismo plano) y por lo tanto, al ser uno de los vectores combinación lineal de los otros dos, el determinante de la matriz formado por ellos es nulo y la ecuación del plano β buscado

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_v = (2, 1, 0) \\ \vec{v}_\pi = (1, 0, 1) \\ \vec{VG} = (x, y, z) - (2, 1, 3) = (x-2, y-1, z-3) \end{array} \right. \Rightarrow \beta \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot (y-1) + (z-3) - (x-2) = 0 \Rightarrow \beta \equiv -x + 2 + 2y - 2 + z - 3 = 0 \Rightarrow \beta \equiv x - 2y - z + 3 = 0$$

b) Los tres vectores, para formar base, tienen que ser independientes lo que significa que no puede haber ninguno que sea combinación lineal de los otros, por ello el determinante de la matriz que forman **no puede ser nulo**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Son linealmente independientes} \Rightarrow \text{Forman base en } \mathbb{R}^3$$

b)

$$(1, -2, 0) = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 1 = a + b + c \\ -2 = a + b \\ 0 = a \end{cases}$$

$$1 = 0 - 2 + c \Rightarrow c = 3 \Rightarrow \text{Coordenadas del vector } \vec{v} = (0, -2, 3) \text{ en la base en } \mathbb{R}^3$$

OPCIÓN B

B1.- a) (1'5 puntos) Compruebe que la matriz **M** es inversible y calcule su inversa

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Encuentre las matrices A y B que cumplen las siguientes ecuaciones

$$8A - 5B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad 2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$\det(M) = |M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 1 - 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } \exists M^{-1} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot (\text{adj } M^t)$$

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } M^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{cases} 8A - 5B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\ -10A + 5B = (-5) \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 20 & 0 \\ -10 & 5 & -15 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$8A - 5B - 10A + 5B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 20 & 0 \\ -10 & 5 & -15 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow -2A = \begin{pmatrix} -2 & 22 & 0 \\ -12 & 6 & -12 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 22 & 0 \\ -12 & 6 & -12 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = 2A - \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -22 & 0 \\ 12 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 0 \\ 10 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

B.2.- a) (1'5 puntos) Calcule la siguiente integral indefinida: $\int \cos(\ln x) dx$.

(Ayuda: realice un cambio de variable adecuado para esta integral)

b) (1 punto) Calcule el limite siguiente $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+3} \right) \ln \left(\frac{x+5}{x-1} \right)$

a)

$$\int \cos(\ln x) dx = \int \cos t e^t dt = e^t \sin t - \int \sin t e^t dt$$

$$\ln x = t \Rightarrow \begin{cases} x = e^t \\ \frac{dx}{x} = dt \Rightarrow dx = e^t dt \end{cases} \quad \begin{cases} u = e^t \Rightarrow du = e^t dt \\ \cos t dt = dv \Rightarrow v = \int \cos t dt = \sin t \end{cases}$$

$$\int \cos t e^t dt = e^t \sin t - \int \sin t e^t dt = e^t \sin t - [e^t(-\cos t) - \int (-\cos t) e^t dt]$$

$$\begin{cases} u = e^t \Rightarrow du = e^t dt \\ \sin t dt = dv \Rightarrow v = \int \sin t dt = -\cos t \end{cases}$$

$$\int \cos t e^t dt = e^t \sin t + e^t \cos t - \int \cos t e^t dt \Rightarrow \text{Llamando } I = \int \cos t e^t dt =$$

$$I = e^t \sin t + e^t \cos t - I \Rightarrow 2I = e^t \sin t + e^t \cos t \Rightarrow I = \frac{e^t}{2} (\sin t + \cos t)$$

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{e^t}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + K$$

b)

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+3} &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\infty} + \frac{3}{\infty}} = \frac{1}{0+0} = \frac{1}{0} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+5}{x-1} \right) &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{x-1} \right) = \frac{\infty}{\infty} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{5}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{5}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right) = \ln \frac{1 + \frac{5}{\infty}}{1 - \frac{1}{\infty}} = \ln \frac{1+0}{1-0} = \ln 1 = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+3} \right) \ln \left(\frac{x+5}{x-1} \right) = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{x+5}{x-1} \right)}{\frac{1}{\left(\frac{x^2}{x+3} \right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{x+5}{x-1} \right)}{\frac{x^2}{x+3}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\left(\frac{x+5}{x-1} \right)} \cdot \frac{x-1 - (x+5)}{(x-1)^2}}{\frac{x^2 - 2x(x+3)}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x-1}{x+5} \cdot \frac{(-6)}{(x-1)^2}}{\frac{x^2 - 2x(x+3)}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(-6)}{(x-1)(x+5)}}{\frac{-x-6}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-6)x^3}{-(x-6)(x-1)(x+5)} =$$

Continuación del Problema B.2

b) Continuación

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3}{(x^2 - 7x + 6)(x + 5)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3}{x^3 - 2x^2 - 29x + 30} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 \frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - 2 \frac{x^2}{x^3} - 29 \frac{x}{x^3} + \frac{30}{x^3}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{1 - \frac{2}{x} - \frac{29}{x^2} + \frac{30}{x^3}} = \frac{6}{1 - \frac{2}{\infty} - \frac{29}{\infty} + \frac{30}{\infty}} = \frac{6}{1 - 0 - 0 + 0} = 6
\end{aligned}$$

B.3.- Sea f la función de variable real definida mediante la expresión $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

a) (0'5 puntos) Determinar el dominio de continuidad, simetrías, corte con los ejes y asíntotas de la función f

b) (1 punto) Calcule, si existe, los extremos relativos y absolutos, e intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

c) (0'5 puntos) Calcule, si existe, los puntos de inflexión de f

d) (0'5 puntos) Dibuje la gráfica de f

a)

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \text{Sin solución en } \mathbb{R} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(-x) = \frac{2 \cdot (-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{2x}{x^2 + 1} = -f(x) \Rightarrow \text{Simétrica respecto al origen}$$

$$\text{Corte con} \begin{cases} OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2 \cdot 0}{0^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow (0, 0) \\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

No hay asíntotas verticales

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{2}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Existe asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{-\frac{2}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Existe asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$

Continuación del Problema B.3

a) Continuación

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^3+x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^3}}{\frac{x}{x^3} + \frac{x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \frac{\frac{2}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^3+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x^3-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^3+x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{x^3}}{\frac{x}{x^3} + \frac{x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \frac{\frac{2}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \text{No existe asíntota oblicua cuando } x \rightarrow -\infty$$

b)

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 2 \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 2 \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow 2 \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ 1-x > 0 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x < 1 \\ 1+x > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > -1 \\ (x^2+1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

	$-\infty$	-1	1	∞
$2 > 0$	(+)	(+)	(+)	(+)
$x < 1$	(+)	(+)	(-)	(-)
$x > -1$	(-)	(+)	(+)	(+)
$(x^2+1)^2 > 0$	(+)	(+)	(+)	(+)
Solución	(-)	(+)	(-)	(-)

Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / -1 < x < 1$

Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / (x < -1) \cup (x > 1)$

Máximo relativo en $x = 1$ $f(1) = \frac{2 \cdot 1}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1$ (de crecimiento pasa a decrecimiento)

Máximo relativo en $x = -1$ $f(-1) = \frac{2 \cdot (-1)}{(-1)^2+1} = \frac{-2}{2} = -1$ (de decrecimiento pasa a

crecimiento)

Como $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 > 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo y absoluto} \\ -1 < 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo y absoluto} \end{cases}$

Continuación del problema B.3 de la opción B

c)

$$f'''(x) = 2 \frac{(-2)x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1) \cdot 2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = -4 \frac{x(x^2+1) + 2x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = -4 \frac{x^3 + x + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^3}$$

$$f'''(x) = 4 \frac{x^3 - 3x}{(x^2+1)^3} = 4 \frac{(x^2-3)x}{(x^2+1)^3} \Rightarrow f'''(x) = 0 \Rightarrow 4(x^2-3)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-3=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$f''''(x) = 4 \frac{(3x^2-3)(x^2+1)^3 - 3(x^2+1)^2 \cdot 2x(x^3-3x)}{(x^2+1)^6} = 4 \frac{(3x^2-3)(x^2+1) - 6x(x^3-3x)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''''(x) = 4 \frac{3x^4 + 3x^2 - 3x^2 - 3 - 6x^4 + 18x^2}{(x^2+1)^4} = 4 \frac{-3x^4 + 18x^2 - 3}{(x^2+1)^4} \Rightarrow$$

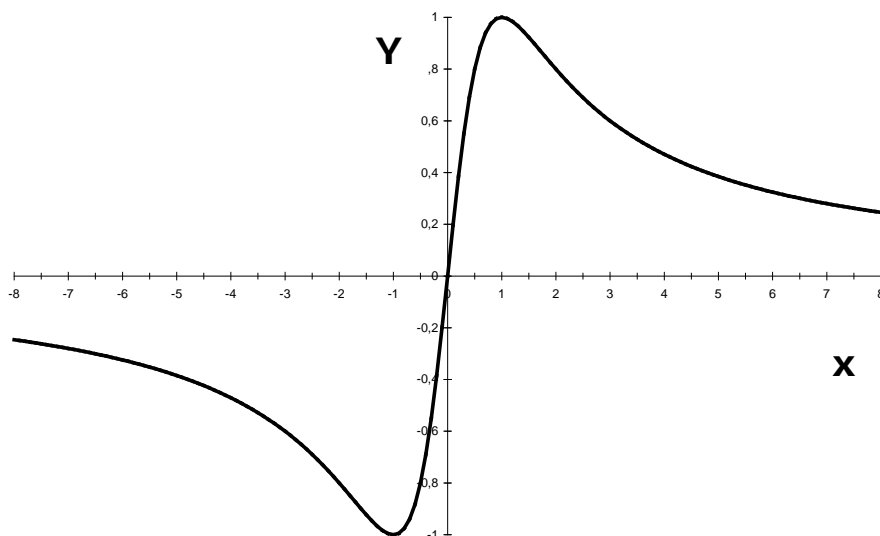
$$\left\{ \begin{array}{l} f''''(0) = 4 \frac{-3 \cdot 0^4 + 18 \cdot 0^2 - 3}{(0^2+1)^4} = 4 \frac{-3}{1} = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión} \\ f''''(\sqrt{3}) = 4 \frac{-3 \cdot (\sqrt{3})^4 + 18 \cdot (\sqrt{3})^2 - 3}{[(\sqrt{3})^2+1]^4} = 4 \frac{-3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3^2 - 3}{(3+1)^4} = \frac{132}{256} = \frac{33}{64} \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión} \\ f''''(-\sqrt{3}) = 4 \frac{-3 \cdot (-\sqrt{3})^4 + 18 \cdot (-\sqrt{3})^2 - 3}{[(-\sqrt{3})^2+1]^4} = 4 \frac{-3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3^2 - 3}{(3+1)^4} = \frac{132}{256} = \frac{33}{64} \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión} \end{array} \right.$$

Punto de inflexión $\Rightarrow (0, 0)$

$$x = \sqrt{3} \Rightarrow f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Punto de inflexión} \Rightarrow \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$x = -\sqrt{3} \Rightarrow f(-\sqrt{3}) = \frac{2(-\sqrt{3})}{(-\sqrt{3})^2+1} = -\frac{2\sqrt{3}}{3+1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Punto de inflexión} \Rightarrow \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

d)



B.4.- Sea el haz de planos de ecuación: $(1 + \lambda)x - y - \lambda z = 0$ con parámetro real λ

a) (0'5 puntos) Hallar los planos del haz que pasan por el punto $\mathbf{P} = (1, 1, 1)$

b) (1 punto) Hallar los planos del haz cuya distancia al punto $\mathbf{Q} = (3, -2, 1)$ es $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

c) (1 punto) Hallar los planos del haz que cumplen, que el ángulo que forman con el eje \mathbf{OY} tiene por seno $\frac{\sqrt{6}}{6}$

a) Solo tendremos que sustituir las coordenadas del punto \mathbf{P} en la ecuación del haz de planos para hallar λ y con ellos conocer el plano π pedido

$$(1 + \lambda) \cdot 1 - 1 - \lambda \cdot 1 = 0 \Rightarrow 1 + \lambda - 1 - \lambda = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Todo valor de $\lambda \in \mathfrak{R}$ hace que todo los planos del haz de planos contengan al punto P

b)

$$\pm \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{(1 + \lambda)3 - (-2) - \lambda \cdot 1}{\sqrt{(1 + \lambda)^2 + (-1)^2 + (-\lambda)^2}} \Rightarrow \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3 + 3\lambda + 2 - \lambda}{\sqrt{1 + 2\lambda + \lambda^2 + 1 + \lambda^2}} \Rightarrow \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{5 + 2\lambda}{\sqrt{2 + 2\lambda + 2\lambda^2}} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{5 + 2\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \lambda + \lambda^2}} \Rightarrow 3 = \frac{5 + 2\lambda}{\sqrt{1 + \lambda + \lambda^2}} \Rightarrow 3 \cdot \sqrt{1 + \lambda + \lambda^2} = 5 + 2\lambda \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{5 + 2\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \lambda + \lambda^2}} \Rightarrow -3 = \frac{5 + 2\lambda}{\sqrt{1 + \lambda + \lambda^2}} \Rightarrow (-3) \cdot \sqrt{1 + \lambda + \lambda^2} = 5 + 2\lambda \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} 9(1 + \lambda + \lambda^2) = (5 + 2\lambda)^2 \\ 9(1 + \lambda + \lambda^2) = (5 + 2\lambda)^2 \end{cases}$$

$$9 + 9\lambda + 9\lambda^2 = 25 + 20\lambda + 4\lambda^2 \Rightarrow 5\lambda^2 - 11\lambda - 16 = 0 \Rightarrow \Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-16) = 121 + 320 = 441 > 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{11 \pm \sqrt{441}}{2 \cdot 5} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{11 + 21}{10} = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} \\ \lambda = \frac{11 - 21}{2 \cdot 5} = \frac{-10}{10} = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(1 + \frac{16}{5}\right)x - y - \frac{16}{5} \cdot z = 0 \Rightarrow \frac{21}{5}x - y - \frac{16}{5} \cdot z = 0 \\ [1 + (-1)]x - y - (-1) \cdot z = 0 \Rightarrow 0x - y + z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \equiv 21x - 5y - 16z = 0 \\ \pi_1 \equiv y - z = 0 \end{array} \right.$$

Continuación del problema B.4

c)

$$\text{Ecuación del eje } OY \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\mu \Rightarrow \vec{v}_{OY} = (0, 1, 0) \Rightarrow \vec{v}_\pi = (1+\lambda, -1, -\lambda) \Rightarrow \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{|\vec{v}_{OY} \cdot \vec{v}_\pi|}{|\vec{v}_{OY}| \cdot |\vec{v}_\pi|} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{|(0, 1, 0) \cdot (1+\lambda, -1, -\lambda)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(1+\lambda)^2 + (-1)^2 + (-\lambda)^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{|-1|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1+2\lambda+\lambda^2+1+\lambda^2}} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+\lambda+\lambda^2}} \Rightarrow \sqrt{12} \cdot \sqrt{1+\lambda+\lambda^2} = 6 \Rightarrow 12(1+\lambda+\lambda^2) = 36 \Rightarrow 1+\lambda+\lambda^2 = 3 \Rightarrow -2+\lambda+\lambda^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \lambda = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+1)x - y - 1 \cdot z = 0 \\ (1-2)x - y - (-2) \cdot z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Planos pedidos} \Rightarrow \begin{cases} \pi_3 \equiv 2x - y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \Rightarrow \pi_4 \equiv x + y - 2z = 0 \end{cases}$$