OPCIÓN A

A.1.-a) (1'25 puntos) Estudiar para que valores de α el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & \alpha-2 \\ -1 & \alpha+1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango máximo

b) (1'25 puntos) Siendo $\mathbf{A^{-1}}$ la inversa de la matriz **A**, calcular $\mathbf{(A^{-1})^2}$ para $\alpha=-1$

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & \alpha-2 \\ -1 & \alpha+1 & 2 \end{vmatrix}=-(\alpha-2)+2\cdot(\alpha+1)^2-2-2\cdot(\alpha+1)=-\alpha+2+2\alpha^2+4\alpha+2-2-2\alpha-2$$

$$|A|=2\alpha^2+\alpha \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow 2\alpha^2+\alpha=0 \Rightarrow (2\alpha+1)\alpha=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ 2\alpha+1=0 \Rightarrow 2\alpha=-1 \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{2} \Rightarrow \end{cases}$$

$$(Para\ todo)\forall\alpha\in\Re-\left\{-\frac{1}{2},0\right\} \Rightarrow rang(A)=3 \quad (Máximo\ rango)$$

b)

$$|A|=2\cdot(-1)^2+(-1)=2-1=1 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right) \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(A^{-1}\right)^2=A^{-2}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.2.- a) (1'75 puntos) Utilizar el cambio de variable $\mathbf{t^6 = 1 + x}$ para calcular

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^{\frac{2}{3}}-\sqrt{x+1}}\,dx$$

b) (0'75 puntos) Para $\mathbf{f(x) = e^{-3x}}$ calcular sus derivadas sucesivas y concluir cual de las siguientes opciones es la correcta:

i) $\mathbf{f^{(n)} = 3^n e^{-3x}}$ ii) $\mathbf{f^{(n)} = -3^{(n+1)} e^{-3x}}$ iii) $\mathbf{f^{(n)} = (-3)^n e^{-3x}}$

a)

$$I=\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^{\frac{2}{3}}-\sqrt{x+1}}\,dx=\int \frac{t^3+2}{t^4-t^3}\,6t^5\,dt=6\int \frac{t^3+2}{(t-1)t^3}\,t^5\,dt=6\int \frac{(t^3+2)\cdot t^2}{t-1}\,dt=6\int \frac{t^5+t^2}{t-1}\,dt$$

$$x+1=t^6 \Rightarrow dx=6t^5\,dt \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}=\sqrt{t^6}=t^3 \\ (x+1)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(x+1)^2}=\sqrt[3]{(t^6)^2}=t^4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l}
t^5+t^2 & t-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-t^5+t^4} & t^4+t^3+t^2+2t+2 \\
t^4+t^2 & \\
\underline{-t^4+t^3} & \\
t^3+t^2 & \\
\underline{-t^3+t^2} & \\
2t^2 & \\
\underline{-2t^2+2t} & \\
2t & \\
\underline{-2t+2} & \\
2 &
\end{array}$$

$$I=6\int (t^4+t^3+t^2+2t+2)\,dt+6\int \frac{2}{t-1}\,dt=6\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{2t^2}{2}+2t\right)+12\int \frac{du}{u}$$

$$t-1=u \Rightarrow dt=du$$

$$I=6\left(\frac{\sqrt[6]{(x+1)^5}}{5}+\frac{\sqrt[6]{(x+1)^4}}{4}+\frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{3}+\frac{2\sqrt[6]{(x+1)^2}}{2}+2\sqrt[6]{x+1}\right)+12\cdot \ln u$$

$$I=6\left(\frac{\sqrt[6]{(x+1)^5}}{5}+\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{4}+\frac{\sqrt{x+1}}{3}+\sqrt[3]{x+1}+2\sqrt[6]{x+1}+2\cdot \ln\left(\sqrt{x+1}-1\right)\right)+K$$

b) $y'=-3\cdot e^{-3x}$ $\quad y''=(-3)^2\cdot e^{-3x}$ $\quad y'''=(-3)^3\cdot e^{-3x}$ $\quad y^{IV}=(-3)^4\cdot e^{-3x}$

Por lo tanto la derivada es la opción iii) $\mathbf{f^{(n)} = (-3)^n e^{-3x}}$

A.3.- Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$

a) (0'5 puntos) Calcular su dominio
b) (1 punto) Obtener sus asíntotas
c) (1 punto) Estudiar sus puntos de corte con los ejes y analizar si es una función par

a)

$$x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow f(2)=\frac{2^2+2}{2-2}=\frac{6}{0}\Rightarrow Asíntota\Rightarrow Dom(f)=(Toda)\forall x\in\Re-\{2\}$$

b)

Asíntota vertical

$$x=2\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{6}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{6}{0^+}=\infty\end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1+\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1+0}{0-0}=\frac{1}{0}=\infty\Rightarrow Sin\ solución$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{-x-2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1+\frac{2}{\infty}}{-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1+0}{0-0}=\frac{1}{0}=\infty\Rightarrow Sin\ sol.$$

No existe asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2-2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x-2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2-x^2+2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x-2}=\frac{4}{\infty}=0$$

Asíntota oblicua $y=x$ *cuando* $x\to\infty$

Continuación del problema A.3 de la opción A

b)Continuación

Asíntotas oblicuas (Continuación)

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2+2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+2}{x-2} - 1\cdot x \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2-x^2+2}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{-x-2} = \frac{4}{\infty} = 0$$

Asíntota oblicua $y = x$ *cuando* $x \to -\infty$

c)

Corte con los ejes

$$\begin{cases} OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2+2}{0-2} = -1 \Rightarrow (0\ ,-1) \\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x^2+2}{x-2} \Rightarrow x^2+2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-2} \Rightarrow \text{No hay pun. cor} \end{cases}$$

A.4.- a) (1'5 puntos) Halla la ecuación del plano paralelo a las rectas de ecuaciones:

$r \equiv 2 - x = y = \frac{z+1}{2}$, $s \equiv \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$ y que pasa por el punto **A(1 , 1 , 2)**

b) (1 punto) Calcular el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (2\ ,1\ ,1)$ y $\vec{v} = (1\ ,1\ ,1)$. Obtener su producto vectorial

a) El plano queda determinado por los vectores de las dos rectas y el vector generador que parte del punto A

$$\begin{cases} r \equiv \frac{x-2}{-1} = y = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \vec{v_r} = (-1\ ,1\ ,2) \\ s \Rightarrow x + 4z = -1 \Rightarrow x = -1 - 4z \Rightarrow 1 + 4z + y + 3z = 1 \Rightarrow y = -7z \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 - 4\lambda \\ y = -7\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v_r} = (-4\ ,-7\ ,1) \\ AG = (x\ ,y\ ,z) - (1\ ,1\ ,2) = (x-1\ ,y-1\ ,z-2) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 1 - 8\cdot(y-1) + 7\cdot(z-2) + 4\cdot(z-2) + 14\cdot(x-1) + y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$15\cdot(x-1) - 7\cdot(y-1) + 11\cdot(z-2) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 15x - 7y + 11z - 30 = 0$$

Continuación del problema A.4 de la opción A

$\vec{u} = (2\ ,1\ ,1)\ y\ \vec{v} = (1\ ,1\ ,1)$

$$cos\ \alpha = \frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|} = \frac{\left|(2\ ,1\ ,1)\cdot(1\ ,1\ ,1)\right|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\left|2+1+1\right|}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{\left|4\right|}{\sqrt{18}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$$

$$\alpha = arc\ cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 19^{o}\,28'16''$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}-\vec{k}-\vec{i}-2\vec{j} = -\vec{j}+\vec{k} \Rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = (0\ ,-1\ ,1)$$

OPCIÓN B

B1.- a) (1 punto) Sean las matrices

$A=\begin{pmatrix} cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ -sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} cos\,\alpha & 0 & sen\,\alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -sen\,\alpha & 0 & cos\,\alpha \end{pmatrix}$.Estudiar los valores de $\alpha\ y\ \beta$ que hacen que sea cierta la igualdad **(det (A))^2 – 2 . det (A).det (B) + 1 = 0**

b) (1’5 puntos) Utilizar las propiedades de los determinantes para calcular el valor de

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix} con\ a,b,c,d \in \Re$$

a)

$$\left\{\begin{array}{l} |A|=\begin{vmatrix} cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ -sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{vmatrix}=cos^2\alpha+sen^2\alpha=1 \\ |B|=\begin{vmatrix} cos\,\alpha & 0 & sen\,\alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -sen\,\alpha & 0 & cos\,\alpha \end{vmatrix}=\beta cos^2\alpha+\beta sen^2\alpha=\beta\left(cos^2\alpha+sen^2\alpha\right)=\beta \end{array}\right. \Rightarrow 1-2\cdot 1\cdot\beta+1=0\Rightarrow$$

$$2-2\beta=0\Rightarrow 2\beta=2\Rightarrow\beta=1$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b+4 \\ 2 & c & d+4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & b+4 \\ 2 & 3 & d+4 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & b+4 \\ 1 & c & d+4 \end{vmatrix}+2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & b+4 \\ 1 & 1 & d+4 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & b+4 \\ 1 & c & d+4 \end{vmatrix}+6.0\ (Dos\ col.\ igual$$

$$=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & b+4 \\ 1 & c & d+4 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 4 \\ 1 & c & 4 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix}+2\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix}+8\cdot 0=$$

$$=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & a-3 & b-4 \\ 0 & c-3 & d-4 \end{vmatrix}=2\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} a-3 & b-4 \\ c-3 & d-4 \end{vmatrix}=2\cdot\left[(a-3)\cdot(d-4)-(c-3)\cdot(b-4)\right]=$$

$$=2\cdot\left[ad-4a-3d+12-(cb-4c-3b+12)\right]=2\cdot(ad-4a-3d+12-cb+4c+3b-12)=$$

$$=2\cdot(ad-cb-4a+3b+4c-3d)$$

B.2.- a) (1'25 puntos) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \ln x & si \quad 0<x<1 \\ ax^2+b & si \quad 1\le x<+\infty \end{cases}$ .Si **f(2) = 3**, obtener los valores de **a** y **b** que hacen que **f(x)** sea continua

b) (1'25 puntos) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \log(x^2-9) \quad y \quad \lim\limits_{x\to 3^+} \log(x^2-9)$

a)

$$\begin{cases} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\ln 1=0 \\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a\cdot 1^2+b=a+b \end{cases} \Rightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\Rightarrow a+b=0 \\ f(2)=a\cdot 2^2+b=3\Rightarrow 4a+b=3 \end{cases} \Rightarrow a=-b\Rightarrow$$

$$-4b+b=3\Rightarrow -3b=3\Rightarrow b=-1\Rightarrow a=1\Rightarrow f(x)=\begin{cases} \ln x & si \quad 0<x<1 \\ x^2-1 & si \quad 1\le x<+\infty \end{cases}$$

b)

$$x^2-9>0\Rightarrow (x-3)\cdot(x+3)>0\Rightarrow \begin{cases} x-3>0\Rightarrow x>3 \\ x+3>0\Rightarrow x>-3 \end{cases}$$

	$-\infty$	-3	3	∞
x > - 3	**(-)**	**(+)**	**(+)**	
x > 3	**(-)**	**(-)**	**(+)**	
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**	

$$Dom(f)=\forall x\in\Re/(x<-3)\cup(x>3)\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \log(x^2-9)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \log(x^2-9)=\log(3^2-9)=\log 0=-\infty \end{cases}$$

B.3.- Sea $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

a) (0'5 puntos)Determinar su dominio
b) (1 punto) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento
c) (1 punto) Analizar sus puntos de inflexión

a)

$$x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow f(1)=\frac{1^3}{(1-1)^2}=\frac{1}{0}\Rightarrow Dom(f)=\forall x\in\Re-\{1\}$$

Continuación del problema B.3 de la opción B

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-2(x-1)x^3}{(x-1)^4}=\frac{3x^2(x-1)-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=\frac{(x-3)x^2}{(x-1)^3}\Rightarrow$$

$$Crecimiento\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\frac{(x-3)x^2}{(x-1)^3}>0\Rightarrow\begin{cases}x^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x-3>0\Rightarrow x>3\Rightarrow\forall x\in\Re\,/\,x>3\\ (x-1)^3>0\Rightarrow x-1>0\Rightarrow x>1\Rightarrow\forall x\in\Re\,/\,x>1\end{cases}$$

	$-\infty$	1	3	∞
$x^2 > 0$	**(+)**	**(+)**	**(+)**	
x > 1	**(-)**	**(+)**	**(+)**	
x > 3	**(-)**	**(-)**	**(+)**	
Solución	**(+)**	**(-)**	**(+)**	

$$Creciente\Rightarrow\forall x\in\Re\,/(x<1)\cup(x>3)$$
$$Decreciente\Rightarrow\forall x\in\Re\,/\,1<x<3$$

c)

$$f''(x)=\frac{(3x^2-6x)\cdot(x-1)^3-3(x-1)^2(x^3-3x^2)}{(x-1)^6}=\frac{(3x^2-6x)\cdot(x-1)-3(x^3-3x^2)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{3x^3-6x^2-3x^2+6x-3x^3+9x^2}{(x-1)^4}=\frac{6x}{(x-1)^4}$$

$$Concavidad\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow\begin{cases}6>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x>0\Rightarrow\forall x\in\Re\,/\,x>0\Rightarrow\begin{cases}Concavidad\Rightarrow x>0\\ Convexidad\Rightarrow x<0\end{cases}\Rightarrow\\ (x-1)^4>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

$$Punto\ de\ inf\ lexión\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=\frac{0^3}{(0-1)^2}=\frac{0}{1}=0\Rightarrow(0\ ,0)$$

B.4.- a) (1'5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos **A*(1 , -2 , 4)* ,** ***B(0 , 3 , 2),*** y es paralelo a la recta $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{2}$

b) (1 punto) En caso de que sea posible, escribir el vector $\vec{v}=(1\ ,2\ ,4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}=(1\ ,0\ ,1)\ ,\vec{b}=(1\ ,1\ ,0)\ ,\vec{c}=(0\ ,1\ ,1)$

a) El plano queda definido por los vectores AB, el vector de la recta y el vector genérico AG que forma los infinitos puntos del plano. Estos tres vectores, al ser coplanarios forman una matriz cuyo determinante es cero y la ecuación pedida.

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(4\ ,1\ ,2)\\ \overrightarrow{AB}=(0\ ,3\ ,2)-(1\ ,-2\ ,4)=(-1\ ,5\ ,-2)\\ \overrightarrow{AG}=(x\ ,y\ ,z)-(1\ ,-2\ ,4)=(x-1\ ,y+2\ ,z-4)\end{cases}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z-4\\ 4 & 1 & 2\\ -1 & 5 & -2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$-2\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)+20\cdot(z-4)+(z-4)-10\cdot(x-1)+8\cdot(y+2)=0\Rightarrow$$

$$-12\cdot(x-1)+6\cdot(y+2)+21\cdot(z-4)=0\Rightarrow 4\cdot(x-1)-2\cdot(y+2)-7\cdot(z-4)=0\Rightarrow$$

$$\pi\equiv 4x-2y-7z+20=0$$

b)

Es combinación lineal de los otros tres, si estos, son vectores independientes

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \textit{Son vectores independientes y forman base}$$

$$(1\ ,2\ ,4)=a(1\ ,0\ ,1)+b(1\ ,1\ ,0)+c(0\ ,1\ ,1)\Rightarrow\begin{cases}a+b=1\\ b+c=2\Rightarrow\\ a+c=4\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 4\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 4\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{array}\right)\Rightarrow 2c=3\Rightarrow c=\frac{3}{2}\Rightarrow b-\frac{3}{2}=1\Rightarrow b=\frac{5}{2}\Rightarrow a+\frac{3}{2}=1\Rightarrow$$

$$a=-\frac{1}{2}\Rightarrow(1\ ,2\ ,4)=-\frac{1}{2}\cdot(1\ ,0\ ,1)+\frac{5}{2}\cdot(1\ ,1\ ,0)+\frac{3}{2}\cdot(0\ ,1\ ,1)$$