

**OPCIÓN A**

**A.1.-a)** Estudiar para que valores de  $a$  el determinante de la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$ , es

no nulo.

Para  $a = 3$  obtener el determinante de la matriz  $2A$  (1'5 puntos)

b) Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ . Calcula el rango de  $(AB)^T$  (1 punto)

a)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} = a \cdot (a-1) \cdot a - 2a \cdot (a-1) \cdot (-a) = (a^2 + 2a^2) \cdot (a-1) \Rightarrow$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 3a^2 \cdot (a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a-1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 4a \\ 0 & 2a-2 & 0 \\ -2a & 0 & 2a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2a & 0 & 4a \\ 0 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 6a \end{pmatrix} \Rightarrow |2A| = \begin{vmatrix} 2a & 0 & 4a \\ 0 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 6a \end{vmatrix} = 2a \cdot (2a-2) \cdot 6a$$

$$|2A| = 24a^2 \cdot (a-1) \Rightarrow \text{Si } a = 3 \Rightarrow |2A| = 24 \cdot 3^2 \cdot (3-1) = 48 \cdot 9 = 432$$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}[(AB)^T] = 2$$

$$\mathbf{A.2.} \text{- Sea } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & -\infty < x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(ax) & 0 < x < \pi \\ (x - \pi)^2 + 1 & \pi \leq x < +\infty \end{cases}$$

a) Calcular los valores de  $a$  para los cuales  $f(x)$  es una función continua. (1 punto)

b) Estudiar la derivabilidad de  $f(x)$  para cada uno de estos valores. (1 punto)

c) Obtener  $\int_{-1}^0 f(x) dx$ . (0'5 puntos)

a)

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \operatorname{sen}(2 \cdot 0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \text{En } x = 0 \text{ la función es continua}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \operatorname{sen}(a \cdot \pi) \\ f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = (\pi - \pi)^2 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \operatorname{sen}(a \cdot \pi) = f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(a \cdot \pi) = 1 \Rightarrow a \cdot \pi = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(1) \Rightarrow a \cdot \pi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{En } x = \pi \text{ la función es continua si } a = \frac{1}{2}$$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & -\infty < x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) & 0 < x < \pi \\ 2(x - \pi) & \pi \leq x < +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2 \cdot 0 + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \cos 0 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

En  $x = 0$  la función no es derivable

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\ f'(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f'(x) = 2 \cdot (\pi - \pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f'(x) = 0 \Rightarrow$$

En  $x = \pi$  la función es derivable

c)

$$\int_{-1}^0 (x^2 + 2x) dx = \frac{1}{3} \cdot [x^3]_{-1}^0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-1}^0 = \frac{1}{3} \cdot [0^3 - (-1)^3] + [0^2 - (-1)^2] = \frac{1}{3} \cdot (0 + 1) + (0 - 1) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

**A.3.-** Encontrar el polinomio de grado dos  $p(x) = ax^2 + bx + c$  sabiendo que satisface: en  $x = 0$  el polinomio vale 2, su primera derivada vale 4 para  $x = 1$  y su segunda derivada vale 2 en  $x = 0$ . Estudiar si el polinomio obtenido es una función par, ¿Tiene en  $x = 0$  un punto de inflexión. (2'5 puntos)

$$\begin{cases} p'(x) = 2ax + b \\ p''(x) = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2 \Rightarrow c = 2 \\ p'(1) = 2a \cdot 1 + b = 4 \Rightarrow 2a + b = 4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2 + b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \\ p''(0) = 2a = 2 \end{cases}$$

$$p(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow$$

$$p(-x) = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) + 2 = x^2 - 2x + 2 \neq p(x) \Rightarrow \text{No es simétrica} \Rightarrow \text{No es par}$$

$$p''(x) = 2 \Rightarrow p''(0) = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{No hay punto de inflexión en } x = 0$$

**A.4.-** Dada las rectas:  $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$ ,  $s \equiv x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z + 1}{2}$

a) Justificar si son o no perpendiculares. (1 punto)

b) Calcular la distancia del punto  $P(16, 0, 0)$  a la recta  $r$ . (1'5 puntos)

a) Para ser perpendiculares deben de cumplir dos condiciones primera que el producto escalar de sus vectores directores sea nulo y por ultimo que tengan un punto común, porque de no tenerlo se cruzarían

$$r \equiv y = 4 - 2z \Rightarrow x + 2(4 - 2z) = 7 \Rightarrow x + 8 - 4z = 7 \Rightarrow x = -1 + 4z \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 4 - 2\lambda \Rightarrow \vec{v}_r = (4, -2, 1) \\ z = \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3\mu \Rightarrow \vec{v}_s = (1, 3, 2) \\ z = -1 + 2\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \text{Si } r \text{ es perpendicular con } s \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow$$

$$(4, -2, 1) \cdot (1, 3, 2) = 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 4 - 6 + 2 = 0 \Rightarrow \text{Son perpendiculares los vectores directores}$$

*Punto comun*

$$\begin{cases} -1 + 4\lambda = 1 + \mu \\ 4 - 2\lambda = 3\mu \\ \lambda = -1 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda - \mu = 2 \\ 2\lambda + 3\mu = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda - \mu = 2 \\ -4\lambda - 6\mu = -8 \end{cases} \Rightarrow -7\mu = -6 \Rightarrow \mu = \frac{6}{7} \Rightarrow 2\lambda + 3 \cdot \frac{6}{7} = 4 \Rightarrow$$

$$2\lambda = 4 - \frac{18}{7} \Rightarrow 2\lambda = \frac{10}{7} \Rightarrow \lambda = \frac{5}{7} \Rightarrow 2\mu - \lambda = 1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{6}{7} - \frac{5}{7} = \frac{7}{7} = 1 \Rightarrow \text{Se cortan en un punto} \Rightarrow$$

*Las rectas r y s son perpendiculares*

**Continuación de problema A.4.-**

b) Hallaremos un plano  $\pi$  que pasando por el punto **P** sea perpendicular a la recta **r**, de la que tomaremos su vector director como director del plano, el producto escalar de este vector con el formado por **P** y el punto generador **G** es nulo ya que son perpendiculares.

El punto de intersección de la recta **r** con el plano hallado nos da el punto **Q**, hallando su distancia con **P** tendremos la pedida en el problema

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (4, -2, 1) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (16, 0, 0) = (x-16, y, z) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(4, -2, 1) \cdot (x-16, y, z) = 0 \Rightarrow 4 \cdot (x-16) + (-2) \cdot y + 1 \cdot z = 0 \Rightarrow \pi \equiv 4x - 2y + z - 64 = 0$$

*Punto Q de intersección*

$$4 \cdot (-1 + 4\lambda) - 2(4 - 2\lambda) + \lambda - 64 = 0 \Rightarrow -4 + 16\lambda - 8 + 4\lambda + \lambda - 64 = 0 \Rightarrow 21\lambda - 76 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{76}{21}$$

$$Q \begin{cases} x = -1 + 4 \cdot \left(\frac{76}{21}\right) = \frac{283}{21} \\ y = 4 - 2 \cdot \left(\frac{76}{21}\right) = -\frac{68}{21} \\ z = \frac{76}{21} \end{cases} \Rightarrow d_{Pr} = d_{PQ} = \sqrt{\left(16 - \frac{283}{21}\right)^2 + \left(0 + \frac{68}{21}\right)^2 + \left(0 + \frac{76}{21}\right)^2}$$

$$d_{Pr} = \sqrt{\left(\frac{53}{21}\right)^2 + \left(\frac{68}{21}\right)^2 + \left(\frac{76}{21}\right)^2} = \frac{\sqrt{53^2 + 68^2 + 76^2}}{21} = \frac{\sqrt{13209}}{21} u$$

**OPCIÓN B**

**B1.- a)** Estudiar para que valores de  $x$ , la matriz inversa de  $\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$  coincide con su opuesta

(1'5 puntos)

b) Dos hermanos de tercero y cuarto de primaria iban camino del colegio con sus mochilas cargadas de libros todo del mismo peso. Uno de ellos se lamentaba del peso que transportaba y el otro le dijo: "¿De que te quejas?. Si yo te cogiera un libro, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio si te diera un libro, tu carga igualaría a la mía".

¿Cuántos libros llevaba cada hermano? (1'5 puntos)

a)

$$\text{Siendo } A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{Existe } A^{-1} \text{ si } |A| \neq 0 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 10 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -x^2 + 10 = 0 \Rightarrow x^2 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{10} \Rightarrow$$

$$\text{Existe } A^{-1} \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} x & 5 \\ -2 & -x \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{-1} = \frac{1}{-x^2 + 10} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{10-x^2} & \frac{2}{10-x^2} \\ -\frac{5}{10-x^2} & \frac{x}{10-x^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{x}{10-x^2} & \frac{2}{10-x^2} \\ -\frac{5}{10-x^2} & \frac{x}{10-x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \\ -A = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{x}{10-x^2} = -x \Rightarrow -x = -10x + x^3 \Rightarrow x^3 - 9x = 0 \Rightarrow (x^2 - 9)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases} \\ \frac{2}{10-x^2} = 2 \Rightarrow 2 = 20 - 2x^2 \Rightarrow 2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \\ -\frac{5}{10-x^2} = -5 \Rightarrow -5 = -50 + 5x^2 \Rightarrow 5x^2 - 45 = 0 \Rightarrow 5 \cdot (x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \\ \frac{x}{10-x^2} = x \Rightarrow x = 10x - x^3 \Rightarrow -x^3 + 9x = 0 \Rightarrow -x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{Solución} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$$

**Continuación problema B1**

b)

El que habla lleva **X** libros, el otro hermano lleva **Y** libros

$$\begin{cases} X + 1 = 2 \cdot (Y - 1) \\ Y + 1 = X - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X - 2Y = -3 \\ X - Y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X - 2Y = -3 \\ -X + Y = -2 \end{cases} \Rightarrow Y = -5 \Rightarrow Y = 5 \text{ libros} \Rightarrow X = 5 + 2 = 7 \text{ libros}$$

Solución (7, 5)

**B.2.-** Sea  $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3}$

- a) Calcular el dominio **f(x)**. (0'5 puntos)  
 b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de **f(x)** (1 punto)  
 c) Analizar las asíntotas de **f(x)** y calcular las que existan (1 punto)

a)

$$x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 0}{0^2 - 0^3} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{¿Discontinuidad evitable?} \\ 1-x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{2 \cdot 1^2 - 1}{1^2 - 1^3} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Discontinuidad no evitable} \end{cases}$$

Estudiamos la discontinuidad evitable

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x-1)x}{(x-x^2)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{x-x^2} = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 - 0^2} = -\frac{1}{0} \Rightarrow \text{Discontinuidad no evitable}$$

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

b)

$$f'(x) = \frac{(4x-1) \cdot (x^2 - x^3) - (2x-3x^2) \cdot (2x^2 - x)}{(x^2 - x^3)^2} = \frac{4x^3 - 4x^4 - x^2 + x^3 - (4x^3 - 2x^2 - 6x^4 + 3x^3)}{(x^2 - x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5x^3 - 4x^4 - x^2 - 4x^3 + 2x^2 + 6x^4 - 3x^3}{(x^2 - x^3)^2} = \frac{2x^4 - 2x^3 + x^2}{(x^2 - x^3)^2} = \frac{(2x^2 - 2x + 1)x^2}{(x^2 - x^3)^2}$$

$$2x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 < 0 \Rightarrow \text{No se puede descomponer}$$

$$\text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{(2x^2 - 2x + 1)x^2}{(x^2 - x^3)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ (x^2 - x^3)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Crecimiento} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / (x < 0) \cup (0 < x < 1) \cup (x > 1)$$

**Continuación de B.2**

c)

*Asíntotas verticales*

$$\text{En } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 1}{x - x^2} = \frac{-1}{0^-} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - 1}{x - x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

$$\text{En } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = \frac{1}{0^+} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

*Asíntotas horizontales*

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} - \frac{x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - 1} = \frac{0 - 0}{0 - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

*Asíntota horizontal*  $y = 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ 

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(-x)^2 - (-x)}{(-x)^2 - (-x)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 + x^3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \frac{x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{\frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + 1} = \frac{0 + 0}{0 + 1} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \text{Asíntota horizontal } y = 0 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty$$

*Asíntotas Oblicuas*

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^3 - x^4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{x^2}{x^4} - \frac{x}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4} - \frac{x^4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{\frac{2}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - 1} = \frac{0 - 0}{0 - 1} = 0$$

*No existe asíntota oblicua cuando*  $x \rightarrow \infty$ 

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x}{-x^3 - x^4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \frac{x^2}{x^4} + \frac{x}{x^4}}{-\frac{x^3}{x^4} - \frac{x^4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{-\frac{1}{x} - 1} = \frac{\frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{-\frac{1}{\infty} - 1} = 0$$

*No existe asíntota oblicua cuando*  $x \rightarrow -\infty$

**B.3.-a)** Hallar el área encerrada entre la curva  $y = x^3 - 3x$  y la recta  $y = x$  (1'25 puntos)

b) Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 \ln n}{\ln(7n^2)} \right)^{\ln n}$  (1'25 puntos)

a)

*Puntos de corte entre funciones*

$$x^3 - 3x = x \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Llamando  $\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x \\ g(x) = x \end{cases} \Rightarrow$

*Puntos de corte con OX*  $\Rightarrow \begin{cases} f(x) \Rightarrow 0 = x^3 - 3x \Rightarrow 0 = (x^2 - 3)x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases} \end{cases} \\ g(x) \Rightarrow 0 = x \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

*Intervalos de curvas*  $\left\{ \begin{array}{l} -2 < x < -\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} f\left(-\frac{9}{5}\right) = \left(-\frac{9}{5}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) = -\frac{54}{125} \Rightarrow \text{Negativo} \\ g\left(-\frac{9}{5}\right) = -\frac{9}{5} \Rightarrow \text{Negativo} \end{cases} \Rightarrow g(x) < f(x) \\ -\sqrt{3} < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2 \Rightarrow \text{Positivo} \\ g(-1) = -1 \Rightarrow \text{Negativo} \end{cases} \\ 0 < x < \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2 \Rightarrow \text{Negativo} \\ g(1) = 1 \Rightarrow \text{Positivo} \end{cases} \\ \sqrt{3} < x < 2 \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{9}{5}\right) = \left(\frac{9}{5}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{9}{5}\right) = \frac{729}{125} - \frac{27}{5} = \frac{54}{125} \Rightarrow \text{Positivo} \\ g\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{9}{5} \Rightarrow \text{Positivo} \end{cases} \Rightarrow g(x) > f(x) \end{array} \right.$

$$A = \left| \int_{-2}^{-\sqrt{3}} x \, dx \right| - \left| \int_{-2}^{-\sqrt{3}} (x^3 - 3x) \, dx \right| + \left| \int_{-\sqrt{3}}^0 (x^3 - 3x) \, dx \right| + \left| \int_{-\sqrt{3}}^0 x \, dx \right| + \left| \int_0^{\sqrt{3}} x \, dx \right| + \left| \int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x) \, dx \right| + \left| \int_{\sqrt{3}}^2 x \, dx \right| - \left| \int_{\sqrt{3}}^2 (x^3 - 3x) \, dx \right|$$

$$A = \int_{-2}^{-\sqrt{3}} -x \, dx + \int_{-2}^{-\sqrt{3}} (x^3 - 3x) \, dx + \int_{-\sqrt{3}}^0 (x^3 - 3x) \, dx - \int_{-\sqrt{3}}^0 x \, dx + \int_0^{\sqrt{3}} x \, dx - \int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x) \, dx + \int_{\sqrt{3}}^2 (4x - x^3) \, dx$$

$$A = \int_{-2}^{-\sqrt{3}} (x^3 - 4x) \, dx + \int_{-\sqrt{3}}^0 (x^3 - 4x) \, dx + \int_0^{\sqrt{3}} (4x - x^3) \, dx + \int_{\sqrt{3}}^2 (4x - x^3) \, dx = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) \, dx + \int_0^2 (4x - x^3) \, dx$$

$$A = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) \, dx + \int_0^2 (4x - x^3) \, dx = \frac{1}{4} \cdot [x^4]_{-2}^0 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-2}^0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^2 - \frac{1}{4} \cdot [x^4]_0^2$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot [0^4 - (-2)^4] - 2 \cdot [0^2 - (-2)^2] + 2 \cdot [2^2 - 0^2] - \frac{1}{4} \cdot [2^4 - 0^4] = -\frac{16}{4} + 8 + 8 - \frac{16}{4} = 8 \, u^2$$



## Continuación de B.3

b)

Sabiendo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln n}{\ln(7n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln n}{\ln 7 + \ln n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln n}{\ln 7 + 2 \ln n} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{\ln n}{\ln n}}{\frac{\ln 7}{\ln n} + 2 \frac{\ln n}{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{\ln 7}{\ln n} + 2} = \frac{2}{\frac{\ln 7}{\infty} + 2} \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln n}{\ln(7n^2)} = \frac{2}{0 + 2} = 1 \Rightarrow$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 \ln n}{\ln(7n^2)} \right)^{\ln n} = 1^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 \ln n}{\ln 7 + 2 \ln n} \right)^{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln 7 + 2 \ln n - \ln 7}{\ln 7 + 2 \ln n} \right)^{\ln n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln 7 + 2 \ln n}{\ln 7 + 2 \ln n} + \frac{-\ln 7}{\ln 7 + 2 \ln n} \right)^{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-\ln 7}{\ln 7 + 2 \ln n} \right)^{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\frac{\ln 7 + 2 \ln n}{-\ln 7}} \right)^{\ln n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\frac{\ln 7 + 2 \ln n}{-\ln 7}} \right)^{\frac{\ln 7 + 2 \ln n}{-\ln 7}} \right]^{\ln n \cdot \frac{-\ln 7}{\ln 7 + 2 \ln n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln 7 \cdot \ln n}{\ln 7 + 2 \ln n}} = e^{\frac{-\ln 7}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^{\ln 7}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln 7 \cdot \ln n}{\ln 7 + 2 \ln n} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln 7 \cdot \ln n}{\frac{\ln 7}{\ln n} + \frac{2 \ln n}{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln 7}{\frac{\ln 7}{\ln n} + 2} = \frac{-\ln 7}{\frac{\ln 7}{\infty} + 2} = \frac{-\ln 7}{0 + 2} = -\frac{\ln 7}{2}$$

**B.4.-** a) Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos  $(1, 1, 1)$ ,  $(3, -2, 2)$ , y es perpendicular al plano  $\pi \equiv 2x - y - z = 0$  (1'75 puntos)

b) Estudiar si los vectores  $\vec{a} = (1, -1, -1)$ ,  $\vec{b} = (0, 1, 1)$ ,  $\vec{c} = (0, 0, 1)$  son linealmente independientes (0'75 puntos)

a) El vector director del plano dado es vector del plano  $\beta$  buscado, así como el vector que forman los puntos por los que tiene que pasar y el vector formado por uno de estos y el punto genérico del plano buscado.

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_\pi = (2, -1, -1) \\ \vec{PQ} = (3, -2, 2) - (1, 1, 1) = (2, -3, 1) \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (1, 1, 1) = (x-1, y-1, z-1) \end{array} \right. \Rightarrow \beta \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-(x-1) - 2 \cdot (y-1) - 6 \cdot (z-1) + 2 \cdot (z-1) - 3 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y-1) = 0 \Rightarrow$$

$$-4 \cdot (x-1) - 4 \cdot (y-1) - 4 \cdot (z-1) = 0 \Rightarrow (x-1) + (y-1) + (z-1) = 0 \Rightarrow \beta \equiv x + y + z - 3 = 0$$

b)

$$\alpha(1, -1, -1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

*Sistema homogéneo compatible det er min ado  $\Rightarrow$  Solución  $(0, 0, 0)$*

*Son vectores linealmente independientes, pueden formar una base en  $V^3$*