OPCIÓN A

A.1.- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde λ es un número real

a) Encontrar los valores de λ para los que la matriz **AB** tiene inversa

b) Dados **a** y **b** números reales cualesquiera ¿puede ser el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ compatible determinado con **A** la matriz del enunciado?

$a)$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \xrightarrow{Multiplicar\ 2x3\ con\ 3x2\ nos\ da\ una\ de\ 2x2} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\exists (AB)^{-1} \Rightarrow |AB| \neq 0 \Rightarrow |AB| = \begin{vmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1+2\lambda - (1-\lambda)\cdot(3+2\lambda) = 1+2\lambda - \left(3+2\lambda-3\lambda-2\lambda^2\right) \Rightarrow$$

$$|AB| = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9+16 = 25 > 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \lambda = \dfrac{-3-5}{4} = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\exists (AB)^{-1} \Rightarrow \lambda \in \Re - \left\{ -2 \,,\, \frac{1}{2} \right\}$$

$b)$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \xrightarrow{Multiplicar\ 2x3\ con\ 3x1\ nos\ da\ una\ de\ 2x1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

No puede ser compatible determinado

$$\begin{pmatrix} x+2y+\lambda z \\ x-y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow Como\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2 \Rightarrow$$

$$Compatible\ indeterminado \Rightarrow \forall \lambda \,,\, a \,,\, b \in \Re$$

A.2.- Calcular los valores de **a** y **b** para que la función $f(x)=\dfrac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical **x = 2** y como asíntota horizontal **y = 3.** Razonar si para **a = 2** y **b = 3** la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo.

$$f(x)=\frac{bx}{x-a}$$

Asíntota vertical

$$x-a=0\Rightarrow x-2=0\Rightarrow a=2\Rightarrow f(2)=\frac{2b}{2-2}=\frac{2b}{0}\Rightarrow 2b\neq 0\Rightarrow b\neq 0\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b\neq 0 \end{cases}$$

Asíntota horizontal

$$y=3=\lim_{x\to\infty}\frac{bx}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{bx}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{1-\frac{2}{x}}=\frac{b}{1-0}=b\Rightarrow b=3$$

$$f'(x)=3\frac{x-2-x}{(x-2)^2}=-\frac{6}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(x)\neq 0\Rightarrow \forall x\in\Re-\{2\}\Rightarrow \textit{No hay máximos ni mínimos relativos}$$

A.3.- a) Utilizando el cambio de variable **t = e^x^** calcular $\int e^{x+e^x}\,dx$

b) Calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen\ x}{7x^2}$

$a)$

$$\int e^{x+e^x}dx = \int e^{e^x}e^x dx = \int e^t dt = e^t = e^{e^x} + K$$

$$e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$$

$b)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{7x^2} = \frac{sen\ 0}{7.0^2} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{14x} = \frac{\cos 0}{14.0} = \frac{1}{0} \Rightarrow \nexists \lim \Rightarrow Sin\ definición$$

A.4.- Calcular la distancia entre las rectas **r** y **s,** donde: $r:\begin{cases} x = 2+2k \\ y = 1-k \\ z = 3+k \end{cases} \quad s:\begin{cases} x = -1+k \\ y = -1+3k \\ z = 4-2k \end{cases}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\,,-1\,,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1\,,3\,,-2) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{3} \Rightarrow \textit{No son paralelas ni coincidentes}$$

$$\begin{cases} 2+2k = -1+a \\ 1-k = -1+3a \\ 3+k = 4-2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k-a = -3 \\ k+3a = 2 \\ k+2a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k+3a = 2 \\ -k-2a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow k+3 = 2 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow 2(-1)-1 = -3$$

$$\textit{Se cortan en el punto} \begin{cases} \begin{cases} x = 2+2.(-1) = 0 \\ y = 1-(-1) = 2 \\ z = 3+(-1) = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1+1 = 0 \\ y = -1+3.1 = 2 \\ z = 4-2.1 = 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow A(0\,,2\,,2) \Rightarrow \textit{La distancia es nula}$$

OPCIÓN B

B.1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{pmatrix}$

a) Sin utilizar la regla de Sarrus, calcular el determinante de dicha matriz

b) Estudiar el rango de **A** en el caso en que **b = - a**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & b & b \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ b & a^2 & b^2 \\ b & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & a^2 - b^2 \end{vmatrix} = a^2 . \left(a^2 - b^2\right)^2$$

$b)$

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(A) = 1$$

B.2. La función $f:[0,\infty)\to\Re$ definida por $f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax} & si \quad 0\le x\le 8\\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & si \quad x>8\end{cases}$ es continua en $[0,\infty)$

a) Hallar el valor de **a** que hace que esta afirmación sea cierta.

b) Calcular $\int_0^{10} f(x)\,dx$

$a)$

$$\begin{cases} f(8)=\lim\limits_{x\to 8^-} f(x)=\sqrt{8a}=2\sqrt{2a}\\ \lim\limits_{x\to 8^+} f(x)=\dfrac{8^2-32}{8-4}=\dfrac{32}{4}=8\end{cases}\Rightarrow 2\sqrt{2a}=8\Rightarrow\sqrt{2a}=4\Rightarrow 2a=16\Rightarrow a=8\Rightarrow$$

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{2x} & si \quad 0\le x\le 8\\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & si \quad x>8\end{cases}$$

$b)$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx=2\sqrt{2}\int_0^8\sqrt{x}dx+\int_8^{10}\frac{x^2-32}{x-4}\,dx=2\sqrt{2}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}dx+\int_8^{10}(x+4)\,dx-\int_8^{10}\frac{16}{x-4}\,dx=$$

$$\begin{array}{rl} x^2-32 & \underline{|x-4}\\ \underline{-x^2+4x} & x+4\\ 4x-32 & \\ \underline{-4x+16} & \\ -16 & \end{array}$$

$$x-4=t\Rightarrow dx=dt\Rightarrow\begin{cases}x=10\Rightarrow t=6\\ x=8\Rightarrow t=4\end{cases}$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^8+\int_8^{10}x\,dx+4\int_8^{10}dx-16\int_8^{10}\frac{1}{t}\,dt=\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\left(\sqrt{8^3}-\sqrt{0^3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_8^{10}+4\cdot[x]_8^{10}-16[\ln t]_4^6$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx=\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot 8.2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(10^2-8^2\right)+4\cdot(10-8)-16(\ln 6-\ln 4)=\frac{128}{3}+\frac{100-64}{2}+8-16\cdot\ln\frac{6}{4}$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx=\frac{128}{3}+26-16\cdot\ln\frac{3}{2}=\frac{128+78}{3}-16\cdot\ln\frac{3}{2}=\frac{206}{3}+16\cdot\ln\frac{2}{3}$$

B.3.- Descomponer el número **8** en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima.

Llamando **A** y **B** a los sumandos positivos que se buscan

$$\begin{cases} A+B=8 \Rightarrow B=8-A \\ P=A^3+B^2=A^3+(8-A)^2=A^3+A^2-16A+64 \end{cases} \Rightarrow P'=\frac{dP}{dA}=3A^2+2A-16 \Rightarrow$$

$$P'=0 \Rightarrow 3A^2+2A-16=0 \Rightarrow \Delta=4-4.3.(-16)=4+192=196>0 \Rightarrow A=\frac{-2\pm\sqrt{196}}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A=\frac{-2+14}{6}=2 \\ A=\frac{-2-14}{6}=-\frac{16}{6}=-\frac{8}{3}\left(No\ es\ solución\ por\ ser\ negativa\right) \end{cases} \Rightarrow P''=\frac{d^2P}{dA^2}=6A+2 \Rightarrow$$

$$P''(2)=\frac{d^2P}{dA^2}=6.2+2=14>0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow Solución \begin{cases} A=2 \\ B=6 \end{cases}$$

B.4.-
a) Estudiar si son linealmente independientes los vectores: $\vec{a}=(3,1,2)$, $\vec{b}=(0,1,1)$, $\vec{c}=(1,1,1)$
Expresar el vector $\vec{v}=(0,0,1)$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$
b)¿Son el plano $\pi : 2x+3y+z+1=0$ y la recta $r:\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-3}=-z$ ortogonales? Justificar la respuesta

a) Si los vectores son linealmente independientes no serán coplanarios por lo tanto el determinante que generan es distinto de cero

$$|C|=\begin{vmatrix}3&1&2\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=3+1-2-3=-1\neq 0\Rightarrow \textit{Son linealmente independientes}$$

$$\vec{v}=m\vec{a}+n\vec{b}+r\vec{c}\Rightarrow (0,0,1)=m(3,1,2)+n(0,1,1)+r(1,1,1)\Rightarrow \begin{cases}3m+r=0\\ m+n+r=0\\ 2m+n+r=1\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}-m-n-r=0\\ 2m+n+r=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$m=1\Rightarrow 3.1+r=0\Rightarrow r=-3\Rightarrow 1+n-3=0\Rightarrow n=2\Rightarrow \vec{v}=\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$$

b)Si son ortogonales los vectores directores son proporcionales por ser paralelos

$$r:\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-1}\Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(-2,-3,-1)\equiv(2,3,1)\\ \overrightarrow{v_\pi}=(2,3,1)\end{cases}\Rightarrow \frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{1}{1}\Rightarrow \textit{Son ortogonales}$$