OPCIÓN A

A.1.- ***Eva, Marta y Susana*** son tres jóvenes amigas que se comprometen a leer **El Quijote** este verano. Cada una por separado y en función del tiempo del que dispone, decide leer un mismo número de páginas cada día hasta terminar la obra. ***Eva*** leerá diariamente **5** páginas más que ***Marta*** y ésta **6** páginas mas que ***Susana***. Por ello ***Eva*** terminará la obra **dos semanas** antes que ***Marta*** y ésta **30 días** antes que ***Susana***. Se pregunta cuál es el total de páginas que tiene la versión de la inmortal obra cervantina que leen estas amigas.

Nombre	Páginas leídas por día	Días de lectura	Total de páginas Quijote
Eva	**E**	**D**	**ED**
Marta	**E - 5**	**D + 14**	**(E – 5).(D + 14)**
Susana	**E - 11**	**D + 44**	**(E – 11).(D + 44)**

$$\begin{cases} ED = (E-5).(D+14) \\ ED = (E-11).(D+44) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ED = ED + 14E - 5D - 70 \\ ED = ED + 44E - 11D - 484 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14E - 5D = 70 \\ 4E - D = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14E - 5D = 70 \\ -20E + 5D = -220 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-6E = -150 \Rightarrow E = \frac{150}{6} = 25 \ páginas/día \Rightarrow 4.25 - D = 44 \Rightarrow D = 100 - 44 = 56 \ días$$

$$Número \ de \ páginas \ de \ El \ Quijote = 25.56 = 1400 \ páginas$$

A.2.- Escribir la ecuación de la circunferencia con centro **(2 , - 1)** y cuyo radio es **3**, y luego determinar los puntos de esta circunferencia que equidistan de los ejes

$$(x-2)^2+(y+1)^2=3^2 \Rightarrow x^2-4x+4+y^2+y+1-9=0 \Rightarrow x^2+y^2-4x+y-4=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x+y-4=0 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow x^2+x^2-4x+x-4=0 \Rightarrow 2x^2-3x-4=0 \Rightarrow \Delta=9+32=41$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{41}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3+\sqrt{41}}{4} \Rightarrow \left(\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}\,,\,\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}\right) \\ x=\dfrac{3-\sqrt{41}}{4} \Rightarrow \left(\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}\,,\,\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}\right) \end{cases}$$

A.3.- Sea la función $f(x)=\dfrac{4x+sen\ x}{sen\ 3x}$

a) Determinar el dominio de ***f***

b) Indicar si ***f*** tiene límite en algún punto que no sea del dominio

$a)$

$$f(x)=\frac{4x+sen\ x}{sen\ 3x} \Rightarrow sen\ 3x=0 \Rightarrow 3x=0+k\pi \Rightarrow x=0+k\frac{\pi}{3} \Rightarrow \forall k \in Enteros$$

$$Dom(f)=\forall x \in \Re - \left\{0+k\frac{\pi}{3}\right\} \Rightarrow\Rightarrow \forall k \in Enteros$$

$En\ x=0$

$$f(0)=\frac{4.0+sen\ 0}{sen\ 3.0}=\frac{0+0}{0}=\frac{0}{0} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x+sen\ x}{sen\ 3x}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{4+\cos x}{3\cos 3x}=\frac{4+\cos 0}{3.\cos(3.0)}=\frac{4+1}{3.\cos 0}=\frac{5}{3.1}=\frac{5}{3}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x+sen\ x}{sen\ 3x} & si \quad x\neq 0\\ \dfrac{5}{3} & si \quad x\neq 0\end{cases} \Rightarrow Dom(f)=\forall x \in \Re - \left\{k\frac{\pi}{3}\right\} \Rightarrow \forall k \in Enteros - \{0\}$$

A.4.- Calcular los extremos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = e^x sen\ x$ en el intervalo **[0 , 2π]**

$$f'(x) = e^x sen\ x + e^x \cos\ x = e^x (sen\ x + \cos\ x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow e^x (sen\ x + \cos\ x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ sen\ x + \cos\ x = 0 \end{cases}$$

$$sen\ x = -\cos\ x \Rightarrow \frac{sen\ x}{\cos\ x} = -1 \Rightarrow tg\ x = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi + k\pi \Rightarrow En\ [0\ , 2\pi] \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi \\ k = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi + \pi = \frac{7}{4}\pi \end{cases}$$

$$f''(x) = e^x (sen\ x + \cos\ x) + e^x (\cos\ x - sen\ x) = e^x (sen\ x + \cos\ x + \cos\ x - sen\ x) = 2e^x \cos\ x$$

$$\begin{cases} f''\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2e^{\frac{3}{4}\pi} \cos\frac{3}{4}\pi = 2e^{\frac{3}{4}\pi}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi} \Rightarrow Máximo \Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = e^{\frac{3}{4}\pi} sen\ \frac{3}{4}\pi \\ f''\left(\frac{7}{4}\pi\right) = 2e^{\frac{7}{4}\pi} \cos\frac{7}{4}\pi = 2e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi} \Rightarrow Mínimo \Rightarrow x = \frac{7}{4}\pi \Rightarrow f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = e^{\frac{7}{4}\pi} sen\ \frac{7}{4}\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Máximo \Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\pi\ , \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}\right) \\ Mínimo \Rightarrow x = \frac{7}{4}\pi \Rightarrow f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = e^{\frac{7}{4}\pi}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{7}{4}\pi\ , -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7}{4}\pi}\right) \end{cases}$$

$$f''(x) = 2e^x \cos\ x \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ e^x > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ \cos\ x = 0 \Rightarrow x = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$En\ [0\ , 2\pi] \Rightarrow Puntos\ de\ Inflexión \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\pi \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = e^{\frac{1}{2}\pi} sen\ \frac{1}{2}\pi \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\ , 0\right) \\ k = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\pi + \pi = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = e^{\frac{3}{2}\pi} sen\ \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\ , 0\right) \end{cases}$$

OPCIÓN B

B.1. La terna **(0 , 0 , 0)** es siempre solución del sistema $\begin{cases} x+2y+az=0 \\ ax-y+z=0 \\ 2ax+y-z=0 \end{cases}$

independientemente del valor del parámetro **a**
a) Indicar para que valores del parámetro la citada terna es la única solución del sistema

b) Indicar algún valor del parámetro, si existe, para el cual el sistema tenga algunas soluciones distintas de la nula y mostrar estas soluciones. (*Nota: Si se encuentran varios valores del parámetro cumpliendo la condición perdida, para responder a esta cuestión basta tomar uno solo de ellos)*

a) Para que la solución única, de una ecuación homogénea, sea la terna citada el sistema tiene que ser compatible determinado y por lo tanto el determinante de los coeficientes tiene que ser distinto a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ a & -1 & 1 \\ 2a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+4a+a^2+2a^2-1+2a = 3a^2+6a = 3a(a+2) \Rightarrow$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow 3a(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+2=0 \Rightarrow a=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{-2\ ,\ 0\} \Rightarrow rang(A) = 3 \Rightarrow Compatible\ Deter\min ado \Rightarrow Solución(0\ ,\ 0\ ,\ 0)$$

$b)$

Estudiaremos los dos valores que nos dan Sistemas Compatible Indeterminado

$Con\ a=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow y+z=0 \Rightarrow y=-z \Rightarrow x+2(-z)-2z=0 \Rightarrow$$

$$x-2z-2z=0 \Rightarrow x=4z \Rightarrow Solución(4\lambda\ ,\ -\lambda\ ,\ \lambda)$$

$Con\ a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -y+z=0 \Rightarrow y=z \Rightarrow x+2z=0 \Rightarrow x=-2z \Rightarrow$$

$$Solución(-2\mu\ ,\ \mu\ ,\ \mu)$$

B.2. Sea un plano $\pi : 2x - 3y + z = 1$ y el punto **A(5 , -5 , 4)**

a) Determinar el punto simétrico de **A** respecto de π .

b) Volumen de la figura del espacio limitada por el plano π y los tres planos cartesianos

a) Por el punto **A** haremos pasar una recta **r** perpendicular al plano, para ello utilizaremos como vector director de la recta el del plano, seguidamente hallaremos el punto de corte **B** de la recta con el plano que es el punto medio entre **A** y su simétrico.

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (2\ ,-3\ ,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -5 - 3\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 2.(5 + 2\lambda) - 3.(-5 - 3\lambda) + 4 + \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$10 + 4\lambda + 15 + 9\lambda + 4 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow 14\lambda + 28 = 0 \Rightarrow 14\lambda = -28 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow B \begin{cases} x = 5 - 4 = 1 \\ y = -5 + 6 = 1 \\ z = 4 - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

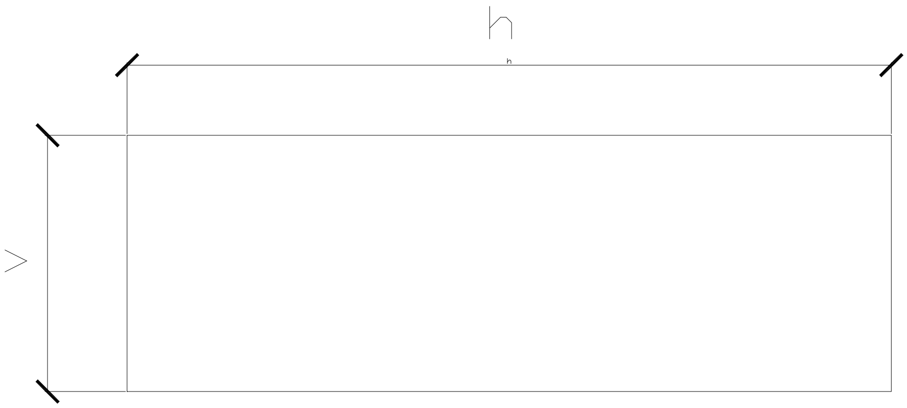
$$\begin{cases} 1 = \dfrac{5 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2 - 5 = -3 \\ 1 = \dfrac{-5 + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 2 + 5 = 7 \Rightarrow A'(-3\ ,7\ ,0) \\ 2 = \dfrac{4 + z_{A'}}{2} \Rightarrow z_{A'} = 4 - 4 = 0 \end{cases}$$

$b)$

$$\begin{cases} Corte\ con\ eje\ OX \equiv \begin{cases} x = 0 + \alpha = \alpha \\ y = 0 + 0.\alpha = 0 \\ z = 0 + 0.\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow 2.\alpha - 3.0 + 0 = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow C \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\dfrac{1}{2}\ ,0\ ,0\right) \\ Corte\ con\ eje\ OY \equiv \begin{cases} x = 0 + 0.\beta = 0 \\ y = 0 + \beta = \beta \\ z = 0 + 0.\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow 2.0 - 3.\beta + 0 = 1 \Rightarrow \beta = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow D \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\dfrac{1}{3}\ ,0\ ,0\right) \\ Corte\ con\ eje\ OZ \equiv \begin{cases} x = 0 + 0.\gamma = 0 \\ y = 0 + 0.\gamma = 0 \\ z = 0 + \gamma = \gamma \end{cases} \Rightarrow 2.0 - 3.0 + \gamma = 1 \Rightarrow \gamma = 1 \Rightarrow E \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow E(0\ ,0\ ,1) \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{OC} \cdot \left| \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OE} \right| \right| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1 \right| = \frac{1}{36}\ u^2$$

B.3.- Queremos construir un marco rectangular que encierre una superficie de un metro cuadrado. Sabemos que el coste de cada centímetro en los lados horizontales es de 2 euros, mientras que en los lados verticales es de 8 euros. Determinar las dimensiones que hemos de elegir para que el marco nos resulte lo más barato posible



$$\begin{cases} v.h = 10000 \Rightarrow v = \dfrac{10000}{h} \\ P = 2.2h + 2.8v = 4h + 16v = 4h + 16 \cdot \dfrac{10000}{h} = \dfrac{4h^2 + 160000}{h} = 4 \cdot \dfrac{h^2 + 40000}{h} \end{cases} \Rightarrow$$

$$P' = \frac{dP}{dh} = 4 \cdot \frac{2h.h - \left(h^2 + 40000\right)}{h^2} 4 \cdot \frac{2h^2 - h^2 - 40000}{h^2} = 4 \cdot \frac{h^2 - 40000}{h^2} \Rightarrow$$

$$P' = 0 \Rightarrow h^2 - 40000 = 0 \Rightarrow h^2 = 40000 \Rightarrow h = \pm\sqrt{40000} \Rightarrow \begin{cases} h = 200 \\ h = -200 \ (No\ es\ solución) \end{cases}$$

$$P'' = \frac{d^2P}{dh^2} = 4 \cdot \frac{2hh^2 - 2h\left(h^2 - 40000\right)}{h^4} = 8h \cdot \frac{h^2 - h^2 + 40000}{h^4} = \frac{320000}{h^3} \Rightarrow$$

$$P''(200) = \frac{320000}{200^3} = \frac{320000}{2000000} = \frac{32}{200} = \frac{4}{25} > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} h = 200\ cm \\ v = \dfrac{10000}{200} = 50\ cm \end{cases}$$

B.4.- Sea la función $f(x) = x\ sen\ 2x$ **.** Calcular la integral de esta función entre **x = 0** y su primer cero positivo. (*Nota: Llamamos ceros de una función a aquellos puntos donde se anula)*

$$f(x) = 0 \Rightarrow x\ sen\ 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ sen\ 2x = 0 \Rightarrow 2x = 0 + k\pi \Rightarrow k \in Enteros \Rightarrow x = 0 + k\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \end{cases}$$

$$Cuando\ k = 1 \Rightarrow x = 0 + 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ sen\ 2x\ dx = -\frac{1}{2} \cdot [x \cos 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x\ dx = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\pi}{2} \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0.\cos 2.0\right] + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\ \frac{dt}{2}$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ sen\ 2x\ dx = dv \Rightarrow v = \int sen\ 2x\ dx = \int sen\ t\dfrac{dt}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \int sen\ t\ dt = -\dfrac{1}{2} \cdot \cos t = -\dfrac{1}{2} \cdot \cos 2x \end{cases}$$

$$2x = t \Rightarrow 2\ dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ sen\ 2x\ dx = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\pi}{2} \cos \pi - 0.\cos 0\right] + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\ dt = -\frac{\pi}{4}(-1) + \frac{1}{4}[sen\ 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left(sen\ 2 \cdot \frac{\pi}{2} - sen\ 2.0\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ sen\ 2x\ dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(sen\ \pi - sen\ 0) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(0 - 0) = \frac{\pi}{4}\ u^2$$