OPCIÓN A

A.1.- Cuando el año 1800 Beethoven escribe su Primera Sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito Franz Schubert. Pasa el tiempo y es Schubert quien compone su célebre Sinfonía Incompleta. Entonces la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años después muere Beethoven y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenia Beethoven cuando compuso su Primera Sinfonía. Determinar el año de nacimiento de cada uno de estos dos compositores.

Nota: Solamente se calificarán los resultados obtenidos matemáticamente, no los derivados de los conocimientos históricos-musicales del examinando

Llamando **B** a la edad de Beethoven en 1800 y **S** a la de Schubert ese año y suponiendo que transcurrió un tiempo **T** entre la Primera Sinfonía de Beethoven y la Sinfonía Inacabada de Schubert

$$\begin{cases} B = 10S \\ B + T + S + T = 77 \\ S + T + 5 = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B - 10S = 0 \\ B + S + 2T = 77 \\ B - S - T = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 77 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 77 \\ 0 & 9 & -1 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 77 \\ 0 & 99 & -11 & 55 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 77 \\ 0 & 0 & -29 & -638 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow -29T = -638 \Rightarrow T = \frac{-638}{-29} = 22 \text{ años} \Rightarrow 11S + 2.22 = 77 \Rightarrow 11S = 77 - 44 \Rightarrow 11S = 33 \Rightarrow$$

$$S = 3 \text{ años en } 1800 \Rightarrow B = 10.3 = 30 \text{años} \Rightarrow \begin{cases} \text{Beethoven nació en } 1800 - 30 = 1770 \\ \text{Schubert nació en } 1800 - 3 = 1797 \end{cases}$$

A.2.- Sean los puntos **A(2 , 3 , 0)** y **B(- 2 , 1 , 4)**
a) Ecuación del plano π mediatriz del segmento **AB**
b) El volumen del tetraedro formado por π y los tres planos coordenados
c) Ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el origen.
Nota: El plano mediatriz de un segmento es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio

a) El vector director del plano π es el vector, perpendicular a él, **AB** y el formado por el punto medio **C** del vector con el punto genérico **G** del plano, un vector perpendicular al director, y por lo tanto el producto escalar, de estos vectores, nulo que es la ecuación del plano.

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{2+(-2)}{2} = 0 \\ y_C = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ z_C = \dfrac{0+4}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow C(0\ ,\ 2\ ,\ 2) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2\ ,1\ ,4) - (2\ ,3\ ,0) = (-4\ ,-2\ ,4) \equiv (2\ ,1\ ,-2) \\ \overrightarrow{CG} = (x\ ,\ y\ ,\ z) - (0\ ,\ 2\ ,\ 2) = (x\ ,\ y-2\ ,\ z-2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CG} = 0 \Rightarrow (2\ ,1\ ,-2)\cdot(x\ ,\ y-2\ ,\ z-2) = 0 \Rightarrow 2x + y - 2 - 2(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x + y - 2z + 2 = 0$$

b) Se calcularan los puntos de corte **D** , **E** y **F** del plano con los ejes coordenados, hallándose el volumen del tetraedro formado por ellos y el origen de coordenadas

$$Con\ OX \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\lambda + 0 - 2.0 + 2 = 0 \Rightarrow 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow C \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-1\ ,\ 0\ ,\ 0)$$

$$Con\ OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2.0 + \mu - 2.0 + 2 = 0 \Rightarrow \mu + 2 = 0 \Rightarrow \mu = -2 \Rightarrow D \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow D(0\ ,\ -2\ ,\ 0)$$

$$Con\ OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow 2.0 + 0 - 2.\alpha + 2 = 0 \Rightarrow -2\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow E \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow E(0\ ,\ 0\ ,1)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OC} = (-1\ ,\ 0\ ,\ 0) - (0\ ,\ 0\ ,\ 0) = (-1\ ,\ 0\ ,\ 0) \\ \overrightarrow{OD} = (0\ ,\ -2\ ,\ 0) - (0\ ,\ 0\ ,\ 0) = (0\ ,\ -2\ ,\ 0) \\ \overrightarrow{OE} = (0\ ,\ 0\ ,1) - (0\ ,\ 0\ ,\ 0) = (0\ ,\ 0\ ,1) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{OC}.\left|\overrightarrow{OD}\times\overrightarrow{OE}\right|\right| \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{OC}.\left|\overrightarrow{OD}\times\overrightarrow{OE}\right|\right| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |2| = 2 \Rightarrow V = \frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{1}{3}\,u^3$$

$c)$

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (2\ ,1\ ,-2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\eta = 2\eta \\ y = 0 + \eta = \eta \\ z = 0 - 2\eta = -2n \end{cases}$$

A.3.- Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos distintos materiales. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro?

Sean cuadrados de **a** y **b** cm. de lado, respectivamente

$$\begin{cases} 100 = 4a + 4b \Rightarrow 25 = a + b \Rightarrow b = 25 - a \\ P = 2.a^2 + 3.b^2 \Rightarrow P = 2.a^2 + 3.(25 - a)^2 \Rightarrow P = 2.a^2 + 3.(625 - 50.a + a^2) \end{cases} \Rightarrow P = 5.a^2 - 150a + 1875$$

$$P' = \frac{dP}{da} = 10a - 150 = 10.(a - 15) \Rightarrow P' = \frac{dP}{da} = 0 \Rightarrow 10.(a - 15) = 0 \Rightarrow a - 15 = 0 \Rightarrow a = 15\ cm$$

$$P'' = \frac{d^2P}{da^2} = 10 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} a = 15\ cm \\ b = 25 - 15 = 10\ cm \end{cases}$$

A.4.- Calcular el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x)=e^x$ y la cuerda a la misma que une los puntos de abcisas **x = -1** y **x = 1**

$$\begin{cases} x=-1 \Rightarrow f(-1)=e^{-1}=\dfrac{1}{e} \\ x=1 \Rightarrow f(1)=e^{1}=e \end{cases} \Rightarrow m=\frac{e-\frac{1}{e}}{1-(-1)}=\frac{\frac{e^2-1}{e}}{2}=\frac{e^2-1}{2e} \Rightarrow y-e=\frac{e^2-1}{2e}\cdot(x-1) \Rightarrow$$

$$y=\frac{e^2-1}{2e}x+e-\frac{e^2-1}{2e} \Rightarrow y=\frac{e^2-1}{2e}x+\frac{2e^2-e^2+1}{2e} \Rightarrow y=\frac{e^2-1}{2e}x+\frac{e^2+1}{2e} \Rightarrow g(x)=\frac{e^2-1}{2e}x+\frac{e^2+1}{2e}$$

$$\begin{cases} g(0)=\dfrac{e^2-1}{2e}\cdot 0+\dfrac{e^2+1}{2e}=\dfrac{e^2+1}{2e} \\ f(0)=e^0=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{e^2+1}{2e}>1 \Rightarrow g(x)>f(x) \quad para \quad x\in[-1\,,1] \Rightarrow$$

$$A=\int_{-1}^{1}\left(\frac{e^2-1}{2e}x+\frac{e^2+1}{2e}\right)dx-\int_{-1}^{1}e^x\,dx=\frac{e^2-1}{2e}\int_{-1}^{1}x\,dx+\frac{e^2+1}{2e}\int_{-1}^{1}dx-\left[e^x\right]_{-1}^{1}$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2-1}{2e}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{1}+\frac{e^2-1}{2e}\cdot[x]_{-1}^{1}-\left(e^1-e^{-1}\right)=\frac{e^2-1}{4e}\cdot\left[1^2-(-1)^2\right]+\frac{e^2+1}{2e}\cdot[1-(-1)]-\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

$$A=\frac{e^2-1}{4e}\cdot(1-1)+\frac{e^2+1}{2e}\cdot(1+1)-\frac{e^2-1}{e}=\frac{e^2-1}{4e}\cdot 0+\frac{e^2+1}{e}-\frac{e^2-1}{e}=\frac{e^2+1-e^2+1}{e}=\frac{2}{e}\,u^2$$

OPCIÓN B

B.1. Sea el sistema $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ ax+2z=0 \\ ay+z=a \end{cases}$

a) Clasificarlo según los valores del parámetro **a**

b) Resolverlo si en algún caso es compatible indeterminado

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 2a - 3a = a^2 - 5a = (a-5)a \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow (a-5)a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 5 = 0 \Rightarrow a = 5 \end{cases}$$

$$\forall x \in \Re - \{0\ ,\ 5\} = rang(A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ a = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$Si\ a = 5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -15 & -3 & -25 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -15 & -3 & -25 \\ 0 & 15 & 3 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -15 & -3 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{array}\right) \Rightarrow Sist.\ Incompatible$$

$b)$

$Hemos\ demostrado\ que\ para\ a = 0\ el\ sistema\ es\ Compatible\ In\det er\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x + 3y + 0 = 5 \Rightarrow x = -3y + 5 \Rightarrow Solución(-3\lambda + 5\ ,\ \lambda\ ,\ 0)$$

B.2. Sea el plano $\pi : x-5y+z+3=0$ y las rectas $r : x-3=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ y $s : \dfrac{x+1}{2}=y=z+2$. Determinar

a) Los puntos de intersección del plano π con cada una de las dos rectas

b) El área y perímetro del triángulo formado por los dos puntos anteriores y el origen de coordenada

$a)$

$$r : \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=4+3\lambda \end{cases} \Rightarrow 3+\lambda-5(2+2\lambda)+4+3\lambda+3=0 \Rightarrow 10+4\lambda-10-10\lambda=0 \Rightarrow -6\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow$$

$$A\begin{cases} x=3+0=3 \\ y=2+2.0=2 \\ z=4+3.0=4 \end{cases} \Rightarrow A(3\ ,2\ ,4)$$

$$s : \begin{cases} x=-1+2\mu \\ y=\mu \\ z=-2+\mu \end{cases} \Rightarrow -1+2\mu-5\mu-2+\mu+3=0 \Rightarrow -2\mu=0 \Rightarrow \mu=0 \Rightarrow B\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow B(-1\ ,0\ ,-2)$$

$b)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA}=(3\ ,2\ ,4)-(0\ ,0\ ,0)=(3\ ,2\ ,4) \\ \overrightarrow{OB}=(-1\ ,0\ ,-2)-(0\ ,0\ ,0)=(-1\ ,0\ ,-2) \\ \overrightarrow{AB}=(-1\ ,0\ ,-2)-(3\ ,2\ ,4)=(-4\ ,-2\ ,-6) \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right| \Rightarrow \overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=-4\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}+6\vec{j}=-4\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k} \Rightarrow \left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{(-4)^2+2^2+2^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6} \Rightarrow$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}=\sqrt{6}\ u^2$$

$$Perímetro=\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+2^2+4^2}+\sqrt{(-1)^2+0^2+(-2)^2}+\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-6)^2}$$

$$Perímetro=\sqrt{29}+\sqrt{5}+\sqrt{56}=\left(\sqrt{29}+\sqrt{5}+2\sqrt{14}\right)u$$

B.3.- Sea la función $f(x) = x\ sen\ x$**.** Determinar:

a) El área encerrada entre su gráfica y el eje de abcisas entre los valores **x = 0** y **x = 1**

b) El área encerrada entre la tangente en $x = \pi$ y los dos ejes coordenados

$a)$

$$A = \int_0^1 x\ sen\ x\ dx = -[x\cos x]_0^1 - \int_0^1 (-\cos x)\,dx = -[1\cos 1 - 0\cos 0] + \int_0^1 \cos x\ dx = -(\cos 1 - 0\ .1) + [sen\ x]_0^1$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ sen\ x\ dx = dv \Rightarrow v = \int sen\ x\ dx = -\cos x \end{cases}$$

$$A = -\cos 1 + (sen\,1 - sen\ 0) = -\cos 1 + (sen\,1 - 0) = sen\,1 - \cos 1$$

$b)$

$$\begin{cases} f(\pi) = \pi\ sen\ \pi = \pi .0 = 0 \\ f'(x) = sen\ x + x\cos x \Rightarrow f'(\pi) = sen\ \pi + \pi\cos\pi = 0 + \pi\cdot(-1) = -\pi \end{cases} \Rightarrow y = -\pi(x-\pi) \Rightarrow$$

$$y = -\pi x + \pi^2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow -\pi x + \pi^2 = 0 \Rightarrow \pi x = \pi^2 \Rightarrow x = \pi \Rightarrow A = \int_0^\pi \left(-\pi\ x + \pi^2\right)dx$$

$$A = -\pi\int_0^\pi x\ dx + \pi^2\int_0^\pi dx = -\frac{\pi}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^\pi + \pi^2[x]_0^\pi = -\frac{\pi}{2}\cdot\left(\pi^2 - 0^2\right) + \pi^2(\pi - 0) = -\frac{\pi^3}{2} + \pi^3 = \frac{\pi^3}{2}\ u^2$$

B.4.- Sea la función $f(x) = e^x \ sen\ x$. Determinar:

a) El máximo de la función en el intervalo $(0\ ,\ \pi)$

b) Ecuación de las tangentes a la gráfica en los extremos del intervalo anterior

$a)$

$$f'(x) = e^x\ sen\ x + e^x\ \cos x = e^x\ (sen\ x + \cos x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow e^x\ (sen\ x + \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ sen\ x + \cos x = 0 \end{cases}$$

$$sen\ x + \cos x = 0 \Rightarrow sen\ x = -\cos x \Rightarrow \frac{sen\ x}{\cos x} = -1 \Rightarrow tg\ x = -1 \Rightarrow x = arc\ tg\ (-1) = \frac{3}{4}\pi$$

$$f''(x) = e^x\ (\cos x + sen\ x) + e^x\ (\cos x - sen\ x) = e^x\ (\cos x + sen\ x + \cos x - sen\ x) = 2e^x \cos x$$

$$f''\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2e^{\frac{3}{4}\pi} \cos \frac{3}{4}\pi = 2e^{\frac{3}{4}\pi}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi} < 0 \Rightarrow Máximo \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = e^{\frac{3}{4}\pi}\ sen\ \frac{3}{4}\pi = e^{\frac{3}{4}\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Máximo\left(\frac{3}{4}\pi\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}\right)$$

$b)$

$$\begin{cases} f(0) = e^0\ sen\ 0 = 1.0 = 0 \\ m = f'(0) = e^0\ (sen\ 0 + \cos 0) = 1.(0+1) = 1 \end{cases} \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x \Rightarrow y - x = 0$$

$$\begin{cases} f(\pi) = e^\pi\ sen\ \pi = e^\pi .0 = 0 \\ m = f'(\pi) = e^\pi\ (sen\ \pi + \cos \pi) = e^\pi .[0 + (-1)] = -e^\pi \end{cases} \Rightarrow y - 0 = -e^\pi (x - \pi) \Rightarrow y = -e^\pi x + \pi\ e^\pi$$