OPCIÓN A

A.1.- *Luís, Juan* y *Oscar* son tres amigos. *Luís* le dice a *Juan*: Si yo te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad. Calcular lo que tiene cada uno de ellos sabiendo que entre los tres reúnen 60 euros

Evidentemente Oscar al tener, al final, la misma cantidad que los otros dos esta es de 20 euros, por ello el problema se reduce a lo que tiene, inicialmente, Luís que llamaremos **L** y lo que tiene Juan que llamaremos **J,** al final los dos tendrán, conjuntamente, 40 euros

$$\begin{cases} L+J=40 \\ J+\dfrac{L}{3}=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L+J=40 \\ L+3J=60 \end{cases} \Rightarrow 2J=60-40=20 \Rightarrow J=10\ € \Rightarrow L+10=40 \Rightarrow L=30\ €$$

A.2.- Sean los puntos **A(3 , 2)** y **B(5 , 3)**. Calcular:

a) Ecuación general de la circunferencia que pasa por el punto **B** y tiene su centro en **A**

b) Ecuación de la tangente a esta circunferencia en **B**

c) Área del triángulo formado por la tangente anterior y los ejes coordenados.

$a)$

$$R = d_{AB} = \sqrt{(5-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 5 \Rightarrow C \equiv x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$$

$b)$

$$C' \equiv 2x + 2yy' - 6 - 4y' = 0 \Rightarrow 2x - 6 + (2y-4)y' = 0 \Rightarrow (2y-4)y' = 6 - 2x \Rightarrow y' = \frac{6-2x}{2y-4} = \frac{2.(3-x)}{2(y-2)}$$
$$m = y' = \frac{3-5}{3-2} = -2 \Rightarrow y - 3 = -2(x-5) \Rightarrow r \equiv 2x + y - 13 = 0$$

$c)$

$$\begin{cases} Corte\ con\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2x + 0 - 13 = 0 \Rightarrow 2x = 13 \Rightarrow x = \dfrac{13}{2} \\ Corte\ con\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 2.0 + y - 13 = 0 \Rightarrow y = 13 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot 13 = \frac{169}{4}\, u^2$$

A.3.- a) Determinar un polinomio de tercer grado que pasa por los puntos **(0 , 0)** y **(1 , - 1)** y que los dos son extremos

b) Analizar la naturaleza de ambos extremos, es decir, si son máximos o mínimos

a)

$$Será\ de\ la\ forma \Rightarrow \begin{cases} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) = 3ax^2 + bx + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow a.0^3 + b.0^2 + c.0 + d = 0 \Rightarrow d = 0 \\ f(1) = -1 \Rightarrow a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d = -1 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow 3a.0^2 + b.0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3a.1^2 + b.1 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

b)

$$f''(x) = \frac{6}{2}x - \frac{3}{2} = 3x + \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 3.0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} > 0 \Rightarrow Máximo\ en\ (0\ ,\ 0) \\ f''(1) = 3.1 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow Mínimo\ en\ (1\ ,\ -1) \end{cases}$$

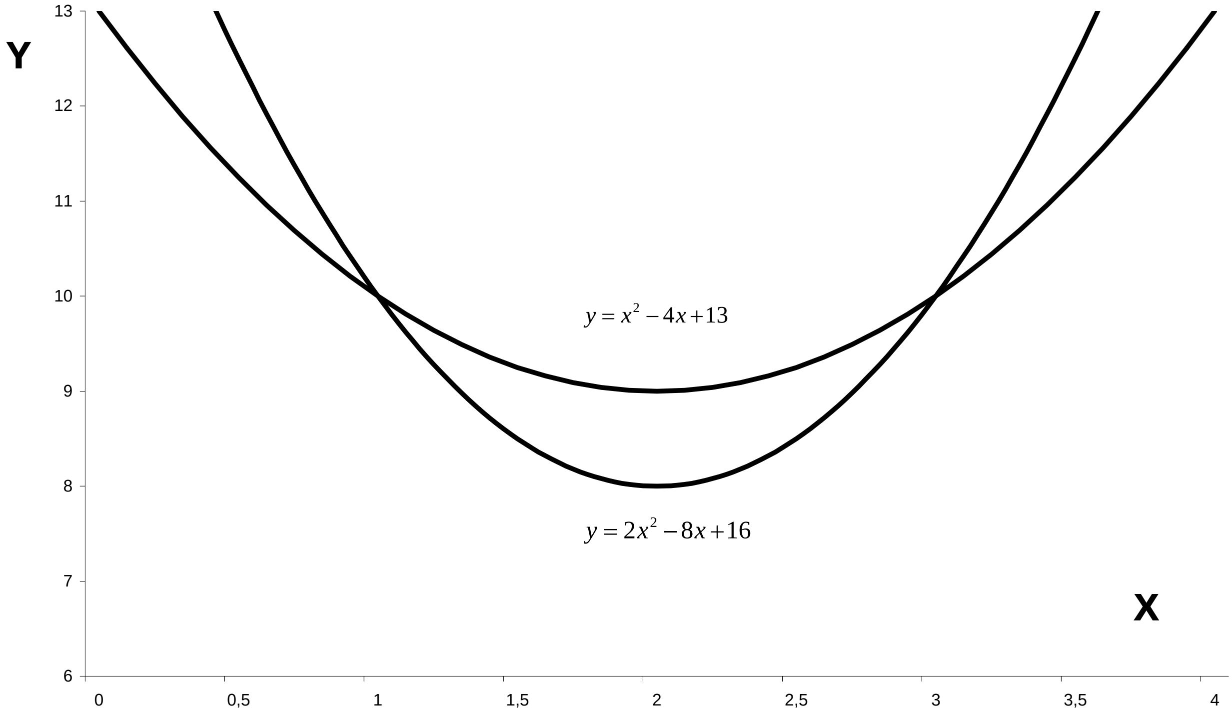
A.4.- Sean las parábolas $y = x^2 - 4x + 13$ e $y = 2x^2 - 8x + 16$

a) Representar sus gráficas

b) Calcular los puntos donde se cortan, entre sí, las parábolas

c) Hallar la superficie encerrada entre las dos parábolas

a)



$b)$

$$x^2 - 4x + 13 = 2x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4+2}{2} = 3 \\ x = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 1^2 - 4.1 + 13 = 10 \\ x = 3 \Rightarrow f(3) = 3^2 - 4.3 + 13 = 10 \end{cases}$$

$c)$

$$A = \int_1^3 (x^2 - 4x + 13)\, dx - \int_1^3 (2x^2 - 8x + 16)\, dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\, dx = -\int_1^3 x^2\, dx + 4\int_1^3 x\, dx - 3\int_1^3 dx$$

$$A = -\frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_1^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_1^3 - 3 \cdot [x]_1^3 = -\frac{1}{3} \cdot (3^3 - 1^3) + 2 \cdot (3^2 - 1^2) - 3 \cdot (3 - 1) = -\frac{26}{3} + 2 \cdot 8 - 3.2$$

$$A = -\frac{26}{3} + 16 - 6 = -\frac{26}{3} + 10 = \frac{4}{3}\, u^2$$

OPCIÓN B

B.1.) Busca una matriz cuadrada **X** (*puede haber varias*) cuyo primer elemento valga 2 y tal que $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$ sea la matriz nula

Nota: *El primer elemento de una matriz es el que está en la primera fila y en la primera columna, es decir, el que escribimos en la parte superior izquierda*

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 11 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-2b & 2a-2c \\ 12 & 6a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2+11a & -2-a \\ -b+11c & -b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4-2b-2+11a & 2a-2c-2-a \\ 12-b+11c & 6a-b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-2b+11a & a-2c-2 \\ 12-b+11c & 6a-b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2-2b+11a=0 \\ a-2c-2=0 \\ 12-b+11c=0 \\ 6a-b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-2c=2 \\ 11a-2b=-2 \\ -b+11c=-12 \\ 6a-b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 11 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & -12 \\ 6 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 22 & -24 \\ 0 & -1 & 11 & -12 \\ 0 & -1 & 11 & -12 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 11 & -12 \\ 0 & -1 & 11 & -12 \\ 0 & -1 & 11 & -12 \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow b-11c=-12 \Rightarrow b=11c-12 \Rightarrow a-2c=2 \Rightarrow a=2+2c$$

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2+2\lambda \\ 11\lambda-12 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \Re \right\}$$

B.2. Sea el plano $\pi : x-2y+4z=12$ y el punto **P(2 , - 1 , 1)**

a) Calcular la distancia δ entre el plano π y el punto **P**

b) Calcular la ecuación de un plano paralelo a π y distinto del mismo, que también diste de **P** la misma distancia δ .

c) Calcular el volumen de la figura limitada por el plano π y los tres planos coordenados

$a)$

$$\delta=\frac{\left|1.2-2.(-1)+4.1-12\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{\left|2+2+4-12\right|}{\sqrt{1+4+16}}=\frac{\left|-4\right|}{\sqrt{21}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}\,u$$

$b)$

$$\textit{Será de la forma } \pi'\equiv x-2y+4z+D=0$$

$$\frac{4}{\sqrt{21}}=\pm\frac{1.2-2.(-1)+4.1+D}{\sqrt{21}}\Rightarrow\begin{cases}4=2+2+4+D\Rightarrow 4=8+D\Rightarrow D=-4\\ 4=-(2+2+4+D)\Rightarrow 4=-8-D\Rightarrow D=-12\;(\textit{que es el de }\pi)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\pi'\equiv x-2y+4z-4=0$$

$c)$

$$\begin{cases}\textit{Corte con } OX\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=0\Rightarrow\lambda-2.0+4.0-12=0\Rightarrow\lambda=12\Rightarrow X\\ z=0\end{cases}\begin{cases}x=12\\ y=0\Rightarrow X(12\,,0\,,0)\\ z=0\end{cases}\\ \textit{Corte con } OY\equiv\begin{cases}x=0\\ y=\mu\Rightarrow 0-2\mu+4.0-12=0\Rightarrow\mu=6\Rightarrow Y\\ z=0\end{cases}\begin{cases}x=0\\ y=6\Rightarrow Y(0\,,6\,,0)\\ z=0\end{cases}\\ \textit{Corte con } OZ\equiv\begin{cases}x=0\\ y=0\Rightarrow 0-2.0+4.\alpha-12=0\Rightarrow\alpha=3\Rightarrow Z\\ z=\alpha\end{cases}\begin{cases}x=0\\ y=0\Rightarrow X(0\,,0\,,3)\\ z=3\end{cases}\end{cases}$$

$c)$

$$V=\frac{1}{6}\cdot\overrightarrow{OX}\cdot\left|\overrightarrow{OY}\times\overrightarrow{OZ}\right|=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}12&0&0\\0&6&0\\0&0&3\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot(12.6.3)=\frac{12.6.3}{6}=36\,u^3$$

B.3.- Sea la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ **.** Determinar sus coeficientes sabiendo que:

a) Pasa por el origen de coordenadas tangencialmente a la bisectriz del primer cuadrante y tiene un extremo en **x = 0'5**

b) Determinar la naturaleza de dicho extremo

$a)$

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow a.0^2 + b.0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ y = x \Rightarrow m = 1 \Rightarrow f'(0) = 1 \Rightarrow 2a.0 + b = 1 \Rightarrow b = 1 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2a \cdot \frac{1}{2} + b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = -x^2 + x$$

$b)$

$$f''(x) = -2 \Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \Rightarrow \textit{Máximo relativo en} \left[\frac{1}{2}, -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

B.4.- Sea la función $f(x) = xe^x$

a) Calcular la ecuación de su tangente en el origen de coordenadas

b) Determinar los extremos de la función **f**

c) Hallar el área encerrada entre la grafica de esta curva, el eje de abcisas y la recta **x = 1**

$a)$

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x) \Rightarrow m = f'(0) = e^0(1+0) = 1.1 = 1 \Rightarrow y - 0 = 1\cdot(x-0) \Rightarrow y = x \Rightarrow x - y = 0$$

$b)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(1+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f''(x) = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x) \Rightarrow f''(-1) = e^{-1}[2 + (-1)] = \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow Mínimo$$

$$Mínimo\ realativo\ en\ \left[-1\,,\,(-1)e^{-1}\right] \Rightarrow \left(-1\,,\,-\frac{1}{e}\right)$$

$c)$

$$f(x) = 0 \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x + K$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

$$\int_0^1 xe^x = \left[(x-1)e^x\right]_0^1 = \left[(1-1)e^1 - (0-1)e^0\right] = 0.e - (-1).1 = 1\,u^2$$