

OPCIÓN A

A.1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide

a) Halla A^n para todo entero positivo n

b) Calcula, si existe, la inversa de la matriz A y de la matriz $I_3 + A$

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \dots A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Los componentes de la última fila son, todos, ceros}) \Rightarrow$$

Como $|A| = 0 \Rightarrow$ No existe A^{-1}

$$I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |I_3 + A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (I_3 + A)^{-1} \Rightarrow$$

$$(I_3 + A)^{-1} = \frac{1}{|I_3 + A|} \cdot \text{adj}(I_3 + A)^t \Rightarrow (I_3 + A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(I_3 + A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(I_3 + A)^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.2.- Sean r la recta determinada por los puntos $A = (1, 0, -1)$ y $B = (1, -1, -1)$, y s la recta de ecuaciones $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$. Se pide:

a) Averiguar su posición relativa

b) Calcular, si existe, una recta que pase por el punto $C = (1, 2, 4)$ y que corte a las rectas r y s

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, -1, -1) - (1, 0, -1) = (0, -1, 0) \equiv (0, 1, 0) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{0}{2} \neq \frac{1}{5} \Rightarrow \\ s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\mu \\ y = 5\mu \\ z = 3\mu \end{cases} \end{array} \right.$$

No son paralelas ni coincidentes

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = 3 + 2\mu \\ \lambda = 5\mu \\ -1 = 3\mu \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} -2 = 2\mu \Rightarrow \mu = -1 \\ -1 = 3\mu \Rightarrow \mu = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -1 \neq -\frac{1}{3} \Rightarrow \text{No se cortan, no son ecantes}$$

Las rectas r y s se cruzan

b)

$$v_r = (1 - 3 - 2\mu, \lambda - 5\mu, -1 - 3\mu)$$

$$t \equiv \frac{x-1}{1-3-2\mu} = \frac{y-\lambda}{\lambda-5\mu} = \frac{z+1}{-1-3\mu} \Rightarrow \frac{1-1}{1-3-2\mu} = \frac{2-\lambda}{\lambda-5\mu} = \frac{4+1}{-1-3\mu} \Rightarrow \frac{0}{-2-2\mu} = \frac{2-\lambda}{\lambda-5\mu} = \frac{5}{-1-3\mu} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0}{-2-2\mu} = \frac{2-\lambda}{\lambda-5\mu} \Rightarrow (2-\lambda)(-2-2\mu) = 0 \Rightarrow -4 - 4\mu + 2\lambda + 2\mu\lambda = 0 \\ \frac{0}{-2-2\mu} = \frac{5}{-1-3\mu} \Rightarrow 5(-2-2\mu) = 0 \Rightarrow -10 - 10\mu = 0 \Rightarrow -10\mu = 10 \Rightarrow \mu = -1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$-4 - 4(-1) + 2\lambda + 2(-1)\lambda = 0 \Rightarrow -4 + 4 + 2\lambda - 2\lambda = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \text{Infinitas soluciones}$$

$$\vec{v}_r = [-2 - 2(-1), \lambda - 5(-1), -1 - 3(-1)] = (0, \lambda + 5, 2)$$

$$t \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{\lambda+5} = \frac{z-4}{2}$$

A.3.- a) Hallar los valores de los coeficientes **b**, **c** y **d** para que la gráfica de la función $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ corte al eje **OY** en el punto **(0, -1)**, pase por el punto **(2, 3)** y en ese punto tenga tangente paralela al eje **OX**.

b) Una vez hallados estos valores hallar los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la citada función

a)

$$y' = 3x^2 + 2bx + c \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -1 \Rightarrow 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = -1 \Rightarrow d = -1 \\ f(2) = 3 \Rightarrow 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 - 1 = 3 \Rightarrow 8 + 4b + 2c - 1 = 3 \Rightarrow 4b + 2c = -4 \Rightarrow \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow 4b + c = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b + c = -2 \\ -4b - c = 12 \end{cases} \Rightarrow -2b = 10 \Rightarrow b = -5 \Rightarrow 2 \cdot (-5) + c = -2 \Rightarrow c = -2 + 10 = 8 \Rightarrow$$

$$y = x^3 - 5x^2 + 8x - 1$$

b)

$$y' = 3x^2 - 10x + 8 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 100 - 96 = 4 > 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10+2}{6} \\ x = \frac{10-2}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow y' = (x-2) \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right) \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x - \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow x > \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$-\infty \qquad \qquad \qquad \frac{4}{3} \qquad \qquad \qquad 2 \qquad \qquad \qquad \infty$$

x > 2	(-)	(-)	(+)
$x > \frac{4}{3}$	(-)	(+)	(+)
Resultado	(+)	(-)	(+)

$$\text{Crecimiento} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / \left(x < \frac{4}{3}\right) \cup (x > 2)$$

$$\text{Decrecimiento} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / \frac{4}{3} > x > 2$$

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow f(2) = 3 \Rightarrow (2, 3) \Rightarrow \text{Mínimo relativo (de decrecimiento pasa a crecimiento)} \\ x = \frac{4}{3} \Rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) - 1 = \frac{64}{27} - 5 \cdot \frac{16}{9} + \frac{32}{3} - 1 = \frac{64 - 240 + 288 - 27}{27} = \frac{85}{27} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\text{En} \left(\frac{4}{3}, \frac{85}{27}\right) \Rightarrow \text{Máximo relativo (de crecimiento pasa a decrecimiento)}$$

A.4.- Un rectángulo tiene por vértices los puntos coordenados $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) y $(0, b)$, de modo que el punto (a, b) tiene coordenadas positivas y está situado en la curva de la ecuación

$$y = \frac{1}{x^2} + 4. \text{ De todos estos rectángulos hallar, razonadamente, el de área mínima}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (a, 0) - (0, 0) = (a, 0) \\ \overrightarrow{BC} = (a, b) - (a, 0) = (0, b) \\ \overrightarrow{CD} = (0, b) - (a, b) = (-a, 0) \equiv (a, 0) \\ \overrightarrow{DA} = (0, 0) - (0, b) = (0, -b) \equiv (0, b) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (a, 0) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = a \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} = (0, b) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + b^2} = \sqrt{b^2} = b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = \frac{1}{a^2} + 4 \\ A = ab = a \cdot \left(\frac{1}{a^2} + 4 \right) = \frac{a}{a^2} + 4a = \frac{1}{a} + 4a \end{array} \right. \Rightarrow A' = \frac{dA}{da} = -\frac{1}{a^2} + 4 \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{a^2} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 4 \Rightarrow$$

$$a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \Rightarrow A'' = \frac{d^2A}{da^2} = \frac{2}{a^3} \Rightarrow \\ a = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 16 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ A''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{2}{-\frac{1}{8}} = -16 \Rightarrow \text{Máximo} \end{array} \right. \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + 4 = \frac{1}{\frac{1}{4}} + 4 = 4 + 4 = 8$$

OPCIÓN B

B.1.- Tenemos una matriz 3×3 cuyas columnas son (de izquierda a derecha) $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ y su determinante vale 2

a) Se considera la matriz \mathbf{A} cuyas columnas son (de izquierda a derecha) $-\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_2, 3\mathbf{C}_1$, calcular razonadamente el determinante de la matriz \mathbf{A}^{-1} caso e que esta matriz inversa exista

b) Sea ahora la matriz cuyas columnas son $\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1$. Razonar la existencia o no existencia de la matriz inversa de la misma

a)

$$\begin{aligned} |-\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_2 \quad 3\mathbf{C}_1| &= (-1) \cdot |\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_2 \quad 3\mathbf{C}_1| = (-1) \cdot |\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 \quad 3\mathbf{C}_1| + (-1) \cdot |\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_2 \quad 3\mathbf{C}_1| = \\ &= (-1) \cdot |\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 \quad 3\mathbf{C}_1| - (-1) \cdot 0 = (-1) \cdot |\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 \quad 3\mathbf{C}_1| = (-1) \cdot 3 \cdot |\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_1| = \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot 3 \cdot |\mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_1| = 3 \cdot |\mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_1| = (-1) \cdot 3 \cdot |\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3| = (-1) \cdot 3 \cdot 2 = -6 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1| &= |\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1| + |\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1| = \\ &= |\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1| + |\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1| + |\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1| + |\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1| = \\ &= |\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1| + |\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1| + 0 + |\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_3 - \mathbf{C}_1| = \\ &= |\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3| - |\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_1| + |\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_3| - |\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_1| + |\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_3| - |\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_1| = \\ &= 2 - 0 + 0 - 0 + 0 - |\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3 \quad \mathbf{C}_1| = 2 - (-1) \cdot |\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_3| = 2 - (-1) \cdot (-1) \cdot |\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{C}_3| = 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

B.2. Dado los puntos $\mathbf{A} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (0, -1, 0)$ y $\mathbf{C} = (0, 0, 3)$, se pide:

Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} , indicando que figuras forman

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = (x, y, z) - (1, 0, 0) = (x-1, y, z) \\ \overrightarrow{BP} = (x, y, z) - (0, -1, 0) = (x, y+1, z) \\ \overrightarrow{CP} = (x, y, z) - (0, 0, 3) = (x, y, z-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2 + z^2} \\ |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{CP}| \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y+1)^2 + z^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1 + z^2 \Rightarrow \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 1 = 2y + 1 \Rightarrow 2x + 2y = 0 \\ -2x + 1 = -6z + 9 \Rightarrow 2x - 6z + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Recta} \Rightarrow y = -x \Rightarrow z = \frac{x+4}{3} \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \frac{4}{3} + \frac{\lambda}{3} \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \left(1, -1, \frac{1}{3}\right) \equiv (3, -3, 1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \frac{4}{3} + \lambda \end{cases}$$

B.3.- Halla el punto de la curva de la ecuación $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ en el que la tangente a la misma tiene pendiente mínima. Escribir la ecuación de dicha tangente

$$m = f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 \Rightarrow m' = 6x - 6 \Rightarrow m' = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow 6(x - 1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$m'' = 6 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

$$\begin{cases} f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 4 = 0 \\ f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 6 = 3 \end{cases} \Rightarrow y - 0 = 3 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 3x + 3 \Rightarrow 3x - y + 3 = 0$$

B.4.- Hallar todas las funciones **f** cuya derivada es $f'(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$ indicando el dominio de definición de esta

$$\begin{array}{r} x^4 + x + 1 \\ -x^4 - x^3 \\ \hline -x^3 + x + 1 \\ x^3 + x^2 \\ \hline x^2 + x + 1 \\ -x^2 - x \\ \hline 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + x \\ x^2 - x + 1 \end{array} \right.$$

$$\frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x} = x^2 - x + 1 + \frac{1}{x^2 + x}$$

$$f(x) = \int \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x} dx = \int x^2 dx - \int x dx + \int dx + \int \frac{1}{x^2 + x} dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + x - \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{(x+1)x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} = \frac{Ax + B(x+1)}{x^2 + x} \Rightarrow Ax + B(x+1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow A \cdot 0 + B(0+1) = 1 \Rightarrow B = 1 \\ x=-1 \Rightarrow A(-1) + B(-1+1) = 1 \Rightarrow A = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + x - \int \frac{1}{t} dt + \ln x = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + x - \ln t + \ln x$$

$$x+1 = t \Rightarrow dx = dt$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + x - \ln(x+1) + \ln x = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + x + \ln \frac{x}{x+1} + K$$

b)

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow (x+1)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f'(-1) = \frac{(-1)^4 + (-1) + 1}{0} = \frac{1-1+1}{0} = \frac{1}{0} \\ x = 0 \Rightarrow f'(-1) = \frac{0^4 + 0 + 1}{0} = \frac{1}{0} \end{cases}$$

$$Dom(f') = \forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$