Instrucciones: Se proponen dos opciones A y B. Debe elegirse una y contestar a sus cuestiones. La puntuación de cada cuestión aparece en la misma. Deben justificarse los pasos que se dan para obtener las respuestas. La simple escritura de un resultado correcto no garantiza que se obtengan los puntos del apartado.

OPCIÓN A

A1. a) *(0,5 puntos)* El determinante de la matriz A que aparece a continuación es 2 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$

Sin utilizar la regla de Sarrus, determine cuánto vale el determinante de la matriz B siguiente (enuncie las propiedades que utilice):

$$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

b) *(2 puntos)* Sea C la siguiente matriz: $C=\begin{pmatrix}\operatorname{sen}x&-\cos x&0\\\cos x&\operatorname{sen}x&0\\1&\operatorname{sen}x&x\end{pmatrix}$

Determine los valores de x para los que la matriz C tiene inversa y calcularla cuando sea posible.

SOLUCIÓN.

a) El determinante de la matriz B es igual a 2. Si en una matriz se suma a una línea una combinación lineal de las paralelas, su determinante no varía. En nuestro caso, si a la tercera columna de A le sumamos la primera y la segunda columnas se obtiene la matriz B, cuyo determinante será igual que el de A, es decir 2.

b) La matriz C tiene inversa cuando $|C|\neq 0$.

$$|C|=\begin{vmatrix}\operatorname{sen}x&-\cos x&0\\\cos x&\operatorname{sen}x&0\\1&\operatorname{sen}x&x\end{vmatrix}=x\operatorname{sen}^2x+x\cos^2x=x\left(\operatorname{sen}^2x+\cos^2x\right)=x\quad\Rightarrow\quad\exists\, C^{-1}\ \forall x\neq 0$$

Calculemos C^{-1}:

· Calculamos la matriz adjunta de C: $A_{ij}=\begin{pmatrix}x\operatorname{sen}x&-x\cos x&\operatorname{sen}x(\cos x-1)\\x\cos x&x\operatorname{sen}x&-\operatorname{sen}^2x-\cos x\\0&-x\operatorname{sen}x&1\end{pmatrix}$

· Calculamos la matriz traspuesta de la adjunta: $(A_{ij})^t=A_{ji}=\begin{pmatrix}x\operatorname{sen}x&x\cos x&0\\-x\cos x&x\operatorname{sen}x&-x\operatorname{sen}x\\\operatorname{sen}x(\cos x-1)&-\operatorname{sen}^2x-\cos x&1\end{pmatrix}$

· Dividimos por el determinante de C: $C^{-1}=\dfrac{Aji}{|C|}=\begin{pmatrix}\operatorname{sen}x&\cos x&0\\-\cos x&\operatorname{sen}x&-\operatorname{sen}x\\\dfrac{\operatorname{sen}x(\cos x-1)}{x}&\dfrac{-\operatorname{sen}^2x-\cos x}{x}&\dfrac{1}{x}\end{pmatrix}$

A2. Dado el punto $P(1,0,6)$ y la recta $r:\begin{cases}x=1+\lambda\\y=-2-6\lambda\\z=2\lambda\end{cases}$

a) *(1 punto)* Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por P y corte a la recta r.

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la ecuación general $(Ax+By+Cz+D=0)$ del plano que contiene a la recta r anterior y a la recta $r':\begin{cases} x-z=0 \\ 2x-y-z=10 \end{cases}$

SOLUCIÓN.

a) La recta buscada es la intersección del plano π perpendicular a r y que contiene a P y el plano π' que contiene a r y a P.

· Ecuación de π: $x-6y+2z+D=0 \;\Rightarrow\; 1+12+D=0 \;\Rightarrow\; D=-13 \;\Rightarrow\; \pi: x-6y+2z-13=0$

· Ecuación de π': está determinado por los vectores $\vec{u}=(1,-6,2)$ y $\overrightarrow{PQ}=(1-1,0+2,6-0)=(0,2,6)\,||\,(0,1,3)$ y el punto $P(1,0,6)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & -6 & 1 \\ z-6 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; -18x+18+z-6-3y-2x+2=0 \;\Leftrightarrow\; \pi': 20x+3y-z-14=0$$

Por tanto, la recta que buscamos es: $\begin{cases} x-6y+2z-13=0 \\ 20x+3y-z-14=0 \end{cases}$

b) Estudiemos la posición relativa de r y r':

· La recta r está determinada por el punto $A(1,-2,0)$ y el vector direccional $\vec{u}=(1,-6,2)$.

$$\cdot\; r':\begin{cases} x-z=0 \\ 2x-y-z=10 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=z \\ y=2x-z-10=z-10 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x=\mu \\ y=-10+\mu \\ z=\mu \end{cases} \;\Rightarrow\; B(0,-10,0) \quad \vec{v}=(1,1,1)$$

y como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=16-6-2-8=0 \;\Rightarrow\;$ r y r' son coplanarias y tienen distinta dirección.

El plano que las contiene está determinado por los vectores $\vec{u}=(1,-6,2)$ y $\vec{v}=(1,1,1)$ y el punto $A(1,-2,0)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+2 & -6 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \;\Leftrightarrow\; -6x+6+2y+4+z+6z-y-2-2x+2=0 \;\Leftrightarrow\; 8x-y-7z-10=0$$

A3. Considere las funciones $f(x)=e^{x+1}$ y $g(x)=e^{-x+5}$.

a) *(0,5 puntos)* Determine los posibles puntos de corte de esas dos funciones.

b) *(2 puntos)* Calcule el área encerrada entre esas dos funciones y las rectas $x=1$ y $x=3$.

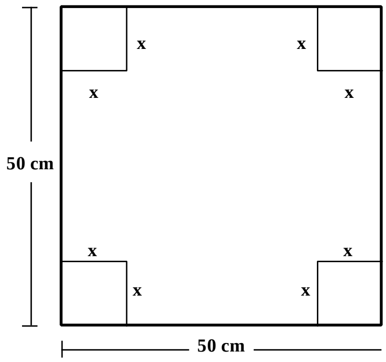
SOLUCIÓN.

a) $\begin{cases} y=e^{x+1} \\ y=e^{-x+5} \end{cases} \;\Rightarrow\; e^{x+1}=e^{-x+5} \;\Rightarrow\; x+1=-x+5 \;\Rightarrow\; x=2\,,\; y=e^3 \;\Rightarrow\; (2\,,e^3)$

b) $A=\left|\int_1^2 \left(e^{x+1}-e^{-x+5}\right)dx\right|+\left|\int_2^3 \left(e^{x+1}-e^{-x+5}\right)dx\right|=\left|\left[e^{x+1}+e^{-x+5}\right]_1^2\right|+\left|\left[e^{x+1}+e^{-x+5}\right]_2^3\right|=$

$=\left|e^3+e^3-e^2-e^4\right|+\left|e^4+e^2-e^3-e^3\right|\simeq\left|-21{,}8\right|+\left|21{,}8\right|\simeq 43{,}6\ u^2$

A4. *(2,5 puntos)* Se dispone de una cartulina cuadrada como la del dibujo, cuyo lado mide 50 cm. En cada una de las esquinas se corta un cuadrado de lado x con el fin de poder doblar la cartulina y formar una caja, sin tapa. ¿Cuál debe ser el lado x del cuadrado a cortar para que el volumen de la caja sea máximo?



SOLUCIÓN.

La función volumen es: $V(x) = (50-2x)^2 \cdot x = 2500x - 200x^2 + 4x^3$

$V'(x) = 2500 - 400x + 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{400 \pm \sqrt{160000-120000}}{24} = \frac{400 \pm 200}{24} = \begin{cases} 25 \\ \dfrac{25}{3} \end{cases}$$

$$V''(x) = -400 + 24x \qquad \left| \begin{array}{l} V''(25) > 0 \;\Rightarrow\; \text{mínimo} \\ V''(25/3) < 0 \;\Rightarrow\; \text{máximo} \end{array} \right|$$

luego para que el volumen de la caja sea máximo, deben cortarse cuadrados de $\frac{25}{3} \simeq 8,3$ cm en cada esquina.

OPCIÓN B

B1. a) *(1,5 puntos)* Determine para qué valores de m el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} mx + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + my + 4z &= 2 \\ 2x + my + 6z &= m-1 \end{aligned}$$

es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) *(1 punto)* Se sabe que una matriz simétrica B de dimensión 3×3 tiene como determinante -3. Determine el determinante de la matriz $B + B^t$ donde B^t denota la traspuesta de B.

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 6 & 0 \\ 2 & m & 4 & 2 \\ 2 & m & 6 & m-1 \end{array}\right)$. Comparemos sus rangos:

$$\begin{vmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{vmatrix} = 6m^2 + 12m + 16 - 12m - 4m^2 - 24 = 2m^2 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 2$$

· Para $m \neq \pm 2$: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado

· Para $m = -2$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$.

Orlamos este menor con la columna de los términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 24 + 24 + 36 + 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg} B = 3 \quad \text{y como } \operatorname{rg} A \neq \operatorname{rg} B \quad \Rightarrow \quad \text{el sistema es incompatible}$$

· Para $m=2$: $\quad \operatorname{rg} A=2$ y $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 8+24-12-24 \neq 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{rg} B = 3 \neq \operatorname{rg} A \;\Rightarrow\;$ el sistema es incompatible

b) Si B es simétrica: $B=B^t$. Por tanto: $\left| B+B^t \right| = \left| 2B \right| = 8\cdot\left| B \right| = -24$

B2. a) *(1 punto)* Encuentre la ecuación general $(Ax+By+Cz+D=0)$ del plano que es paralelo a la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z-3}{4}$ y que contiene los puntos $P=(1,1,1)$ y $Q=(3,5,0)$.

b) *(1,5 puntos)* Calcule el ángulo que forman las dos rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 2x-y=-1 \\ 2x-z=-4 \end{cases} \qquad r': \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+5}{2}$$

SOLUCIÓN.

a) El vector direccional de la recta es uno de los que determina el plano: $\vec{u}=(2,1,4)$. También el vector $\overrightarrow{PQ}=(2,4,-1)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y-1 & 1 & 4 \\ z-1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; -x+1+8y-8+8z-8-2z+2-16x+16+2y-2=0 \;\Leftrightarrow\; 17x-10y-6z-1=0$$

b) Obtengamos las coordenadas de los vectores direccionales de ambas rectas:

$$\cdot\; r: \begin{cases} 2x-y=-1 \\ 2x-z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ z=2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=4+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}=(1,2,2) \qquad \cdot\; r': \vec{v}=(2,-1,2)$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{|2-2+4|}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{4+1+4}} = \frac{4}{3\cdot 3} = \frac{4}{9} \;\Rightarrow\; \alpha = \arccos\frac{4}{9} \simeq 63^{\circ}\,36'\,44''$$

B3.

a) *(1 punto)* Calcule el límite: $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+6}{x+2}\right)^{3x}$

b) *(1,5 puntos)* Calcule la integral $\displaystyle \int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ usando el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una indeterminación 1^{∞}.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+6}{x+2}\right)^{3x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{x+6}{x+2}-1\right)^{3x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{x+6-x-2}{x+2}\right)^{3x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{4}{x+2}\right)^{3x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{4}}\right)^{3x\cdot\frac{x+2}{4}\cdot\frac{4}{x+2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{4}}\right)^{\frac{x+2}{4}}\right]^{\frac{12x}{x+2}} = e^{12}$$

b) $\operatorname{sen} x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt \Rightarrow \int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \int e^t \cdot t \cdot dt = \begin{vmatrix} u = t & \Rightarrow & du = dt \\ dv = e^t\, dt & \Rightarrow & v = e^t \end{vmatrix} =$

$= t \cdot e^t - \int e^t\, dt = t \cdot e^t - e^t = e^t(t-1) = e^{\operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x - 1)$

Por lo tanto: $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \left[e^{\operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x - 1) \right]_0^{\pi/2} = e(1-1) - e^0(0-1) = 1$

B4. Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 6}$

- **a)** *(0,5 puntos)* Determine el dominio de $f(x)$
- **b)** *(0,5 puntos)* Estudie si la función $f(x)$ es continua. Si no lo es, determine los puntos de discontinuidad.
- **c)** *(1,5 puntos)* Determine los posibles máximos y mínimos, así como las asíntotas de $f(x)$.

SOLUCIÓN.

a) $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

b) La función tiene dos puntos de discontinuidad (con asíntota vertical) en $x = -2$ y en $x = 3$.

c) · Máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{-2x+1}{(x^2-x-6)^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-x-6)^2 - (-2x+1)2(x^2-x-6)(2x-1)}{(x^2-x-6)^4} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ es un máximo de la función.}$$

· Asíntotas:

$x = -2$ y $x = 3$ son dos asíntotas verticales de la función pues $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x^2-x-6} = \infty$ y $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x^2-x-6} = \infty$.

Estudiemos la posición de la curva respecto a sus asíntotas:

$\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{x^2-x-6} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{1}{x^2-x-6} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x^2-x-6} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x^2-x-6} = +\infty$

$y = 0$ es una asíntota horizontal de la función pues $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2-x-6} = 0$:

Posición relativa: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2-x-6} = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2-x-6} = 0^+$

Se tiene: