

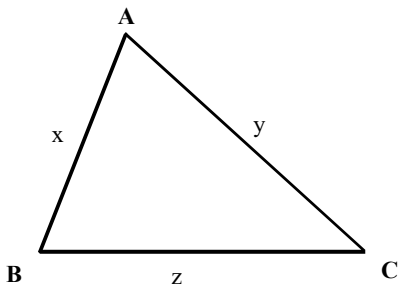
Septiembre 2005

OPCIÓN A

1. A, B y C son tres ciudades que forman un triángulo de manera que entre cada dos de ellas hay una carretera recta que las une. Se sabe que si se va de A a B dando la vuelta por C se hace un recorrido tres veces mayor que si se va directamente de A a B . Asimismo si para ir de A a C se da la vuelta por B el recorrido es el doble que si se va directamente de A a C .

Calcular las distancias entre las tres ciudades sabiendo que la suma de las tres distancias es igual a 120 kilómetros. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.



$$\begin{cases} y + z = 3x \\ x + z = 2y \\ x + y + z = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 120 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 120 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-120 - 240}{-6 - 1 - 1 - 2 + 1 - 3} = \frac{-360}{-12} = 30$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 120 & 1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-120 - 360}{-12} = \frac{-480}{-12} = 40 \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 120 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{-720 + 120}{-12} = \frac{-600}{-12} = 50$$

Por tanto: $d(A, B) = 30$ kms , $d(A, C) = 40$ kms , $d(B, C) = 50$ kms

2. Sea la función $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$. Determinar sus extremos [1,5 puntos] y sus puntos de inflexión [1 punto] en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

SOLUCIÓN.

X Los extremos relativos satisfacen la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x + e^x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) = 0 \text{ y como } e^x \neq 0 \forall x : \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Veamos si se trata de máximos o de mínimos:

$$f''(x) = e^x \cdot (\sen x + \cos x) + e^x \cdot (\cos x - \sen x) = e^x \cdot (\sen x + \cos x + \cos x - \sen x) = 2 e^x \cos x$$

$$f''\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) > 0 \Rightarrow \text{en } x = -\frac{\pi}{4} \text{ la función tiene un mínimo relativo.}$$

$$f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \cos\frac{3\pi}{4} < 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{3\pi}{4} \text{ la función tiene un máximo relativo.}$$

X Los puntos de inflexión verifican $f''(x) = 0$: $2 \cdot e^x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f'''(x) = 2 \cdot (e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sen x) = 2 \cdot e^x \cdot (\cos x - \sen x)$$

$$f'''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot (0 + 1) \neq 0 \Rightarrow \text{en } x = -\frac{\pi}{2} \text{ la función tiene un punto de inflexión.}$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{2}} \cdot (0 - 1) \neq 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{\pi}{2} \text{ la función tiene un punto de inflexión.}$$

3. Sea Ω la región acotada encerrada entre las parábolas $f(x) = x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = 2x^2 - x + 6$.

a) Hallar la superficie de Ω [1,5 puntos].

b) Razonar (no valen comprobaciones con la calculadora) cuál de las dos parábolas está en la parte inferior de la región Ω [1 punto].

SOLUCIÓN.

a) Consideremos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2x^2 + x - 6 = -x^2 + 3x - 2$

El área de la región encerrada entre las dos parábolas es la misma que la encerrada entre la nueva función y el eje OX.

Calculemos los puntos de corte de $h(x)$ con OX: $-x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} =$

$$\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

El área será entonces:

$$\int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x \right]_1^2 = \left(-\frac{8}{3} + 6 - 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 \right) =$$

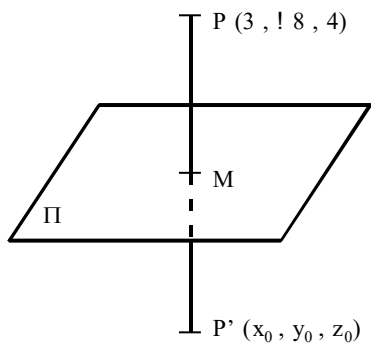
$$= -\frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = 4 - \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{24 - 14 - 9}{6} = \frac{1}{6} \quad \text{y por tanto: } S(\Omega) = \frac{1}{6} u^2$$

b) En la parte inferior está la función $g(x)$ pues, según el apartado anterior, la función $f(x) - g(x)$ produce una región situada en el semiplano positivo.

4. Determinar el punto simétrico del $(3, -8, 4)$ respecto del plano $x - 3y + 2z = 7$ [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

X El vector $\vec{n} = (1, -3, 2)$ es un vector normal al plano dado. Por tanto, podemos obtener la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto dado $(3, -8, 4)$:



$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -8 - 3t \\ z = 4 + 2t \end{cases} \text{ es la ecuación paramétrica de dicha recta}$$

X Podemos ahora obtener las coordenadas del punto M, intersección de la recta y el plano:

$$3 + t + 24 + 9t + 8 + 4t = 7 \Rightarrow 14t = -28 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \\ \Rightarrow M(1, -2, 0)$$

X Puesto que M es el punto medio del segmento que tiene por extremos el punto dado y su simétrico:

$$1 = \frac{3 + x_0}{2} \Rightarrow x_0 = -1 \quad ; \quad -2 = \frac{-8 + y_0}{2} \Rightarrow y_0 = 4 \quad ; \quad 0 = \frac{4 + z_0}{2} \Rightarrow z_0 = -4$$

Luego el punto simétrico del dado es: $P'(-1, 4, -4)$

Septiembre 2005

OPCIÓN B

1. Estudiar según el valor del parámetro λ , el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + z = \lambda^2 \end{cases}$ y resolverlo si en algún caso es compatible indeterminado. [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

La matriz de los coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & \lambda^2 \end{array} \right)$

Estudiemos sus rangos, según los valores de λ :

El único menor de orden 3 en la matriz de los coeficientes es: $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 + 1 - \lambda - \lambda - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$$

Se tiene: X Si $\lambda \neq 1$: $\text{rg } A = \text{rg } M = n^\circ$ de incógnitas \Rightarrow el sistema es compatible determinado

X Si $\lambda = 1$, las matrices de los coeficientes y ampliada son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$ cuyos rangos respectivos son iguales a 1

y el sistema es compatible indeterminado.

En este caso sólo una de las ecuaciones es independiente: $x + y + z = 1$. Considerando las incógnitas $y = t$ y $z = s$ como parámetros, las soluciones del sistema son: $x = 1 - t - s$, $y = t$, $z = s$.

2. Calcular razonadamente el límite de la sucesión $\frac{(n-2)^2}{(n+1)^3 - (n-1)^3}$

SOLUCIÓN.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^2}{(n+1)^3 - (n-1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4n + 4}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 4n + 4}{6n^2 + 2} = \frac{1}{6}$$

3. Determinar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cdot \text{sen } x$ y el eje de abscisas entre el origen y el primer punto positivo donde f se anula [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.

$$f(x) = x^2 \cdot \text{sen } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{sen } x = 0 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$$

Calculemos una primitiva de la función. Utilizaremos por dos veces el método de integración por partes:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int x^2 \cdot \text{sen } x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = u \Rightarrow 2x \, dx = du \\ \text{sen } x \, dx = dv \Rightarrow -\cos x = v \end{array} \right| = -x^2 \cdot \cos x + 2 \left[x \cdot \text{sen } x - \int x \cdot \cos x \cdot dx \right] =$$

$$\left| \begin{array}{l} x = u \Rightarrow dx = du \\ \cos x \cdot dx = dv \Rightarrow \text{sen } x = v \end{array} \right| = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \text{sen } x + 2 \cos x = (-x^2 + 2) \cdot \cos x + 2x \cdot \text{sen } x$$

Por tanto: $A = \int_0^\pi f(x) \, dx = [(-x^2 + 2) \cdot \cos x + 2x \cdot \text{sen } x]_0^\pi = (-\pi^2 + 2) \cdot (-1) + 2\pi \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 0 = (\pi^2 - 4) u^2$

4. Sea r la recta intersección de los dos planos $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

a) Determinar el plano π que contiene a la recta r y que pasa por el origen de coordenadas [1,5 puntos]

b) Escribir la ecuación de la recta perpendicular a π y que pasa por el punto $(1, 0, 1)$ [1 punto]

SOLUCIÓN.

a) Ecuación del haz de planos que pasan por r : $x + 2y - z - 3 + \lambda(2x - y + z - 1) = 0$

El plano del haz que pasa por el origen de coordenadas es: $-3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2y - z - 3 - 6x + 3y - 3z + 3 = 0 \Leftrightarrow -5x + 5y - 4z = 0$ que es la ecuación del plano π

b) La recta perpendicular al plano tiene por vector direccional un vector normal al plano: $\bar{n} = (-5, 5, -4)$. Su

ecuación normal es: $\frac{x-1}{-5} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-4}$