

OPCIÓN A

1. Discutir el sistema  $\begin{cases} ax - y + z = 0 \\ x + y + az = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$  según los valores del parámetro  $a$  [1,5 puntos]. Resolverlo en los casos en que admita infinitas soluciones [1 punto].

SOLUCIÓN.

Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son:  $\left( \begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$

Empecemos estudiando el rango de A según los valores de a:

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a+1+1-a^2 = -a^2+a+2=0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

X Para  $a \neq -1$  y  $a \neq 2$ :  $\text{rg } A = \text{rg } B = 3 = n^\circ$  de incógnitas  $\Rightarrow$  el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

X Para  $a = -1$ : las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son:  $\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$

Puesto que el menor  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$

Orlamos el menor con los términos independientes:  $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+3+1+3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } B = 3$

Como  $\text{rg } A \neq \text{rg } B \Rightarrow$  el sistema es INCOMPATIBLE.

X Para  $a = 2$ : las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son:  $\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$

Puesto que el menor  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$

Orlamos el menor con los términos independientes:  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+3+1-6=0 \Rightarrow \text{rg } B = 2$

Como  $\text{rg } A = \text{rg } B = 2 < n^\circ$  de incógnitas  $\Rightarrow$  el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

X Debemos resolver el sistema en este último caso, es decir para  $a = 2$ : a la vista del menor que da rango a la matriz de los coeficientes, la segunda y tercera ecuaciones son independientes respecto a las incógnitas  $x$  e  $y$ . Consideramos  $z$  como un parámetro:  $z = \lambda$ .

$$\begin{cases} x + y = 3 - 2\lambda \\ -x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2y = 4 - 2\lambda \Rightarrow y = 2 - \lambda ; x = 3 - 2\lambda - 2 + \lambda = 1 - \lambda.$$

Por tanto:  $\boxed{x = 1 - \lambda, y = 2 - \lambda, z = \lambda}$

2. Dada la función  $f(x) = -x - \frac{1}{x}$  se pide

- a) Asintotas y simetrías de la curva  $y = f(x)$  [0,5 puntos].
- b) Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento [1,5 puntos].
- c) Dibujar la gráfica [0,5 puntos].

**SOLUCIÓN.**

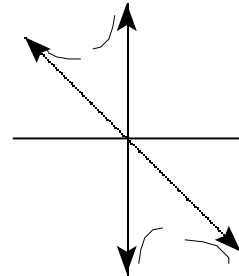
a) X  $x = 0$  es una asíntota vertical de la función pues  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-x - \frac{1}{x}\right) = \infty$ .

Además:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-x - \frac{1}{x}\right) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x - \frac{1}{x}\right) = -\infty$

X  $y = -x$  es una asíntota oblicua de la función. Además:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0^+$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0^-$

X Simetrías:  $f(-x) = x + \frac{1}{x} = -f(x) \Rightarrow$  la función es simétrica respecto al origen de coordenadas.



b)  $f'(x) = -1 + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1, x = 1$  (puntos críticos)

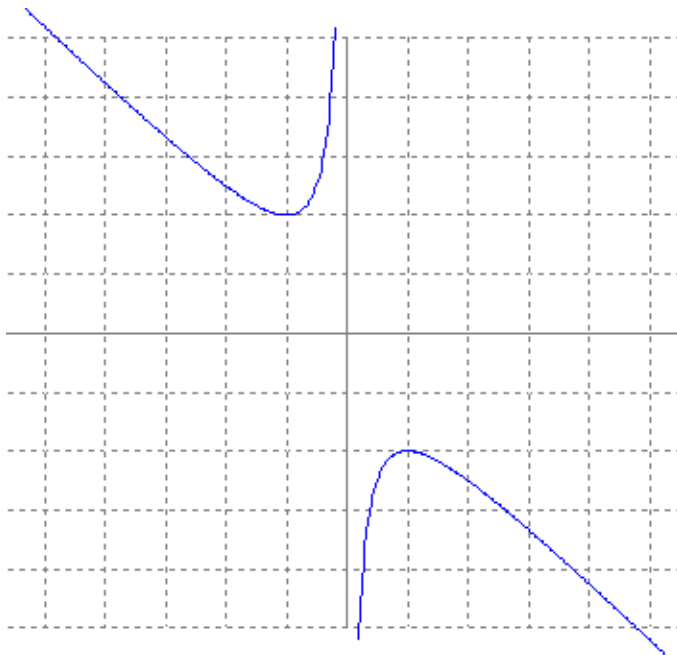
$f''(x) = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo en } (-1, 2) \\ f''(1) < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo en } (1, -2) \end{cases}$

X Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$f' < 0$	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$
-1	0	1	

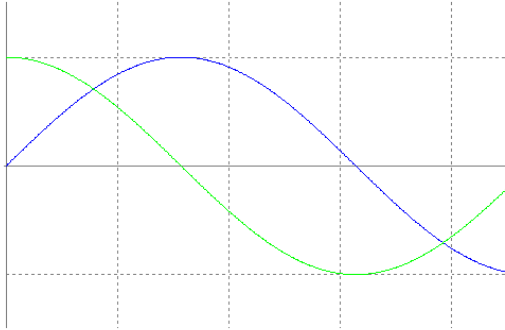
La función es creciente en  $(-1, 0) \cup (0, 1)$  y decreciente en  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

c)



3. Hallar el área limitada en el primer cuadrante por las gráficas de las funciones  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  y el eje de ordenadas [2 puntos]

**SOLUCIÓN.**



En el primer cuadrante, el punto de corte de ambas funciones es:

$$\sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto: } S &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx = [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} = \\ &= \left( \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - (\sin 0 + \cos 0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 = \\ &= \boxed{(\sqrt{2} - 1) u^2} \end{aligned}$$

4. Sea  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  una base ortonormal, hallar todos los vectores que son ortogonales a  $\vec{u}$  y a  $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$  que tengan módulo 1. [1,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**

Sean  $\vec{u} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{w} = (0, 0, 1)$  los vectores de la base ortonormal y  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  las coordenadas de los vectores buscados respecto a la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{x} \perp \vec{u} &\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \vec{x} \perp (\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) &\Rightarrow \vec{x} \cdot (\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) = 0 \Rightarrow (0, x_2, x_3) \cdot (1, 1, -1) = 0 \Rightarrow x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 \end{aligned}$$

luego  $\vec{x} = (0, x_3, x_3)$ .

$$\text{Y como } |\vec{x}| = 1 \Rightarrow \sqrt{x_3^2 + x_3^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2x_3^2} = 1 \Rightarrow 2x_3^2 = 1 \Rightarrow x_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto:  $\boxed{\vec{x} = \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}$  y  $\boxed{\vec{x} = \left( 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)}$

5. Nos dan la recta  $r$  determinada por los puntos A (2, 1, 1) y B (0, 1, 1) y la recta  $s$  determinada por los puntos C (1, 2, 1) y D (1, 4, 2). Razonar su posición relativa. [1,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**

$\vec{AB} = (-2, -2, -2)$  y  $\vec{CD} = (0, 2, -1)$ . Como  $\vec{AB}$  y  $\vec{CD}$  son linealmente independientes: las rectas se cortan o se cruzan.

Consideremos el vector  $\vec{AC} = (-1, 1, -2)$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 2 + 1 = 0 \Rightarrow \text{el vector } \vec{AC} \text{ depende linealmente de } \vec{AB} \text{ y } \vec{CD} \Rightarrow \text{ las rectas se cortan}$$

## OPCIÓN B

1. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , encontrar todas las matrices B tales que  $AB = BA$  [1,5 puntos]; Calcular  $A^n$  con n entero positivo [1 punto].

### SOLUCIÓN.

$$X \text{ Sea } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{32} & b_{33} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_{11} = b_{22} = b_{33} = a \\ b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0 \\ b_{21} = b_{32} = b \\ b_{31} = c \end{cases} \quad \text{luego: } B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

$$X \text{ } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función f dada por  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$  razonando las respuestas [2 puntos].

### SOLUCIÓN.

X Continuidad: la función es continua en  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$  por tratarse de funciones polinómicas. Estudiemos la continuidad en  $x = -1$  y en  $x = 1$ :

$$\boxed{x = -1}: \quad \begin{array}{l} \text{a) } \exists f(-1) = 1 \\ \text{b) } \exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x): \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x + 2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \Rightarrow \text{ la función es continua en } x = -1 \end{array}$$

$$\boxed{x = 1}: \quad \begin{array}{l} \text{a) } \exists f(1) = 1 \\ \text{b) } \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x): \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow \text{ la función es continua en } x = 1 \end{array}$$

Por tanto, la función es continua  $\forall x$

X Derivabilidad:  $f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 4x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$\exists f'(x) \forall x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$  por tratarse de funciones polinómicas.

Veamos si es derivable en  $x = -1$  y en  $x = 1$ :

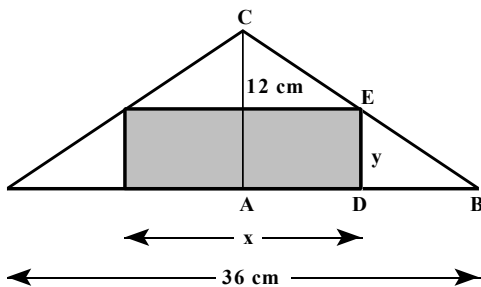
$$\boxed{x = -1}: \quad \left. \begin{array}{l} f'(-1^-) = 2 \cdot (-1) + 2 = 0 \\ f'(-1^+) = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \exists f'(-1)$$

$$\boxed{x = 1}: \quad \left. \begin{array}{l} f'(1^-) = 0 \\ f'(1^+) = 4 \cdot 1 - 1 = 3 \end{array} \right| \Rightarrow \nexists f'(1)$$

Por tanto, la función no es derivable en  $x = 1$ .

3. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo isósceles cuya base es el lado desigual y mide 36 cm y la altura correspondiente mide 12 cm. Suponer que un lado del rectángulo está en la base del triángulo [2,5 puntos].

**SOLUCIÓN.**



Sean  $x$  e  $y$  las dimensiones del rectángulo. La función que debe ser máxima es:  $S = x \cdot y$

Busquemos una relación entre las variables  $x$  e  $y$ :

Los triángulos  $ABC$  y  $DBE$  son semejantes por estar en posición de Tales. Sus lados son entonces proporcionales:

$$\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{DB} \Leftrightarrow \frac{12}{y} = \frac{18}{18 - \frac{x}{2}} \Leftrightarrow 18y = 216 - 6x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{216 - 6x}{18} = 12 - \frac{x}{3} \quad \text{y por tanto: } S = x \cdot y = x \cdot \left(12 - \frac{x}{3}\right) = 12x - \frac{1}{3}x^2 \rightarrow \text{máxima}$$

$$S'(x) = 12 - \frac{2}{3}x = 0 \Rightarrow x = 18 \quad \text{y como } S''(x) = -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow x = 18 \text{ hace el área máxima.}$$

Por tanto, las dimensiones del rectángulo de área máxima son: base = 18 cm , altura = 6 cm

4. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $(6, 0)$  y  $(0, 4)$  y que tiene el centro en la recta  $x - y = 0$ . [1,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**

Si el centro está en la recta  $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$ , sus coordenadas son  $C(a, a)$ . La distancia de  $C$  a los puntos dados de la circunferencia es la misma:  $\sqrt{(a-6)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + (a-4)^2} \Leftrightarrow a^2 - 12a + 36 + a^2 = a^2 + a^2 - 8a + 16 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 20 = 4a \Rightarrow a = 5 \Rightarrow C(5, 5).$$

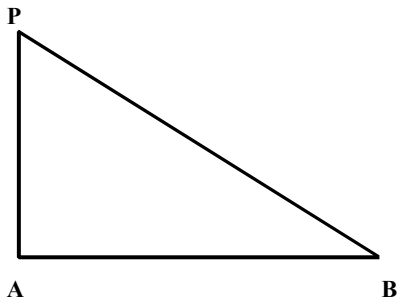
El radio es la distancia de C a cualquiera de los puntos de la circunferencia:  $r = \sqrt{5^2 + (5-4)^2} = \sqrt{26}$ .

La ecuación de la circunferencia es entonces:

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 26 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 26 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 - 10x - 10y + 24 = 0}$$

5. Hallar el punto P de la recta r de ecuaciones paramétricas  $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 \end{cases}$  que con los puntos A (1, 1, 1) y B (3, 1, 0) forma un triángulo rectángulo de hipotenusa BP. [1,5 puntos]

**SOLUCIÓN.**



Si la hipotenusa es BP, el ángulo recto debe estar en A y, por tanto,  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

Un punto P de la recta tiene por coordenadas:  $P(2 + \lambda, 1 + \lambda, 1)$ ,

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 0, -1) \\ \overrightarrow{AP} = (1 + \lambda, \lambda, 0) \end{array} \quad \left| \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{P(1, 0, 1)}$$