PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2013

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Sea $M=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{m+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{m-1} \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de *m* para que los vectores fila de *M* son linealmente independientes.
b) Estudia el rango de *M* según los valores de *m*.
c) Para $m=1$, calcula la inversa de *M*.
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz *M*:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix}=m^2+m=0 \Rightarrow m=0\ ;\ m=-1$$

Para todos los valores de $m \neq 0\ y\ -1$, el determinante es distinto de cero y los vectores son linealmente independientes.

b) Calculamos el rango de *M* según los valores de *m*.

	Rango(M)
$m=0$	2
$m=-1$	2
$m \neq 0\ y\ -1$	3

c) Calculamos la inversa de M para $m=1$:

$$(M)^{-1}=\frac{(M^d)^t}{|M|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^t}{2}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2=2I$ y calcula A^{-1}.
b) Calcula A^{2013} y su inversa.
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Comprobamos que $A^2=2I$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2I$$

Calculamos la inversa:

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^t}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

También la podemos calcular de la siguiente forma:

$$A^2=2I\Rightarrow A\cdot A=2I\Rightarrow A\cdot\left(\frac{1}{2}A\right)=I\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

b)

$$A^{2013}=A^{2012}\cdot A=(A^2)^{1006}\cdot A=(2I)^{1006}\cdot A=2^{1006}\cdot(I)^{1006}\cdot A=2^{1006}\cdot A=\begin{pmatrix}2^{1006} & 2^{1006}\\ 2^{1006} & -2^{1006}\end{pmatrix}$$

$$(A^{2013})^{-1}=A^{-1}\cdot A^{-1}\cdots(2013\ veces)\cdots A^{-1}\cdot A^{-1}=$$
$$=\frac{1}{2}A\cdot\frac{1}{2}A\cdots(2013\ veces)\cdots\frac{1}{2}A\cdot\frac{1}{2}A=$$
$$=\frac{1}{2^{2013}}A^{2013}=\frac{1}{2^{2013}}\cdot 2^{1006}\cdot A=\frac{1}{2^{1007}}\cdot A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2^{1007}} & \frac{1}{2^{1007}}\\ \frac{1}{2^{1007}} & -\frac{1}{2^{1007}}\end{pmatrix}$$

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

a) Halla A^{-1}.

b) Calcula la matriz X **que satisface** $A\cdot X = B^t\cdot C$ **(**B^t **es la traspuesta de B).**

c) Halla el determinante de $A^{2013}\cdot B^t\cdot B\cdot(A^{-1})^{2013}$.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la inversa:

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^t}{-2}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A\cdot X = B^t\cdot C \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B^t\cdot C \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B^t\cdot C$

Calculamos la matriz X

$$X = A^{-1}\cdot B^t\cdot C=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 14 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Calculamos

$$|B^t\cdot B|=\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right|=8-4-4=0$$

Luego:

$$|A^{2013}\cdot B^t\cdot B\cdot(A^{-1})^{2013}|=|A|^{2013}\cdot|B^t\cdot B|\cdot\left|\frac{1}{A}\right|^{2013}=|B^t\cdot B|=0$$

Sabiendo que el determinante de una matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes, indicando en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$

b) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden *n*, sabemos que se cumple que $|k\cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como *A* es una matriz de orden 3, tenemos que: $|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = (-8)\cdot 4 = -32$

Por otro lado, sabemos que: $A\cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A\cdot A^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso será: $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{4}$

b) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & -b & c \\ d & -e & f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -2\cdot 4 = -8$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo".

$$\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)\cdot(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3\cdot 4 = -12$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: "Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo". En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: "Si en un determinante se cambian entre si dos filas o columnas, el determinante cambia de signo".

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula X e Y tales que $X - Y = A^t$ y $2X - Y = B$ (A^t es la matriz traspuesta de A).
b) Calcula Z tal que $AZ = BZ + A$.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Planteamos el sistema matricial $\left.\begin{array}{l} X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

Si cambiamos la primera ecuación de signo y sumamos, tenemos que: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y

sustituyendo en la primera ecuación tenemos que: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $AZ = BZ + A \Rightarrow (A - B)Z = A \Rightarrow Z = (A - B)^{-1} \cdot A$

Calculamos $(A - B) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su inversa: $(A - B)^{-1} = \dfrac{\left[(A - B)^d\right]^t}{|A - B|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}^t}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Luego, $Z = (A - B)^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Sean A y B las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$
a) Calcula las matrices X e Y para las que $2X-Y=A$ y $X-3Y=B$.
b) Halla la matriz Z que verifica $B^2+ZA+B^t=3I$ (I denota la matriz identidad y B^t la matriz traspuesta de B).
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Planteamos el sistema matricial $\left.\begin{array}{l} 2X-Y=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ X-3Y=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

Si multiplicamos la segunda ecuación por -2 y sumamos, tenemos que:

$$5Y=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

y sustituyendo en la segunda ecuación tenemos que: $X=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $B^2+ZA+B^t=3I \Rightarrow ZA=3I-B^2-B^t \Rightarrow Z=(3I-B^2-B^t)\cdot A^{-1}$

Calculamos $(3I-B^2-B^t)=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix}$

Calculamos su inversa: $A^{-1}=\dfrac{(A^d)^t}{|A|}=\dfrac{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t}{1}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Luego, $Z=(3I-B^2-B^t)\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} -35 & 33 \\ 58 & -63 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -76 & -39 \\ 101 & 48 \end{pmatrix}$

Sea M una matriz cuadrada de orden 3 tal que su determinante es $\det(M)=2$. Calcula:
a) El rango de M^3.
b) El determinante de $2M^t$ (M^t es la matriz traspuesta de M).
c) El determinante de $(M^{-1})^2$.
d) El determinante de N, donde N es la matriz resultante de intercambiar la primera y segunda filas de M.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $|M^3|=|M\cdot M\cdot M|=|M|\cdot|M|\cdot|M|=2\cdot 2\cdot 2=8\neq 0\Rightarrow$ El rango es 3

b) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n, sabemos que se cumple que $|k\cdot A|=k^n\cdot|A|$; en nuestro caso como M es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2M^t|=|2M|=(2)^3\cdot|M|=(8)\cdot 2=16$

c) Sabemos que: $M\cdot M^{-1}=I\Rightarrow|M\cdot M^{-1}|=|M|\cdot|M^{-1}|=|I|=1\Rightarrow|M^{-1}|=\dfrac{1}{|M|}$; luego en nuestro caso será: $|M^{-1}|^2=\dfrac{1}{|M|^2}=\dfrac{1}{4}$

d) Si en un determinante cambiamos dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo, luego, el determinante de N vale -2

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Halla, si es posible, A^{-1} **y** B^{-1}**.**
b) Halla el determinante de $AB^{2013}A^t$**,** A^t **la matriz traspuesta de** A**.**
c) Calcula la matriz X **que satisface** $A\cdot X-B=AB$**.**
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz inversa de A.

$$(A)^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{2}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matriz B no tiene inversa, ya que su determinante vale 0.

b) $|AB^{2013}A^t|=|A|\cdot|B^{2013}|\cdot|A^t|=2\cdot 0^{2013}\cdot 2=0$

c) Resolvemos la ecuación matricial.

$$A\cdot X=B+AB\Rightarrow X=A^{-1}(B+AB)=A^{-1}B+B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$